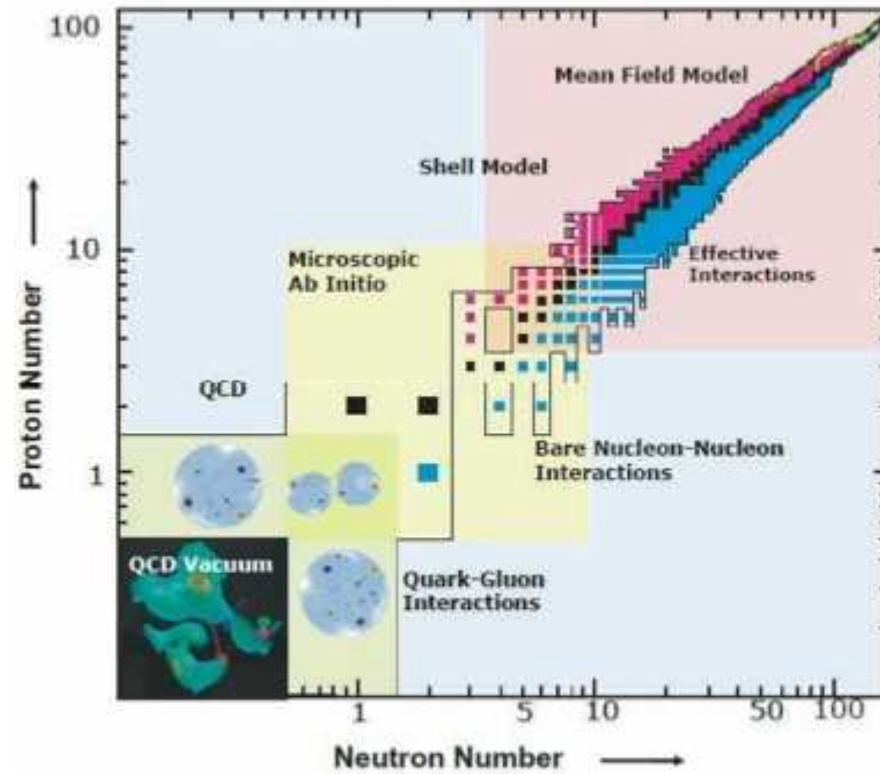


# Modelo de capas

- Introducción
- Modelo de capas



## Introducción

- El núcleo es una estructura de gran complejidad formada por  $A$  cuerpos interactuando entre sí,

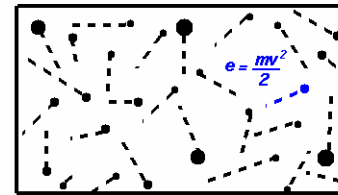
$$H = \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$$

- Desde un punto de vista formal el potencial de interacción contiene términos a 2, 3, .... cuerpos, lo cual hace que su resolución sea técnicamente inviable.
- Por lo tanto simplificaremos al máximo la teoría reteniendo grados de libertad concretos/efectivos. Teoría de gases.

- Estrategias:

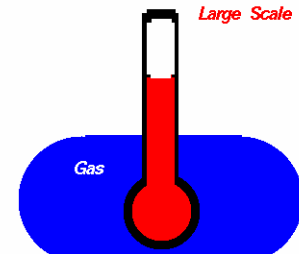
- Microscópicos (modelo de partícula individual):
  - El hamiltoniano depende de grados de libertad de los nucleones constituyentes.
  - Utiliza un potencial fenomenológico.
  - La resolución de la ecuación de Schrödinger es muy compleja para  $A > 4$ .
- Macroscópicos (modelos colectivos):
  - El hamiltoniano depende de grados de libertad colectivos del núcleo
  - Pueden en principio relacionarse con las coordenadas microscópicas

Small Scale  $m = \text{mass}$   $v = \text{velocity}$   
 $e = \text{kinetic energy}$



Temperature is a measure of the average kinetic energy of translation of the gas molecules.

Large Scale



Objects in thermal equilibrium have the same temperature.

## El modelo de capas

- Modelo atómico de capas → Modelo nuclear de capas
- Es aplicable a un número amplio de núcleos
- Uno de los aspectos experimentales bien establecidos del que el modelo pretende dar cuenta es la existencia de núcleos con **números mágicos** ( $Z, N=2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ ) cuyas principales propiedades son:
  - Energías de ligadura muy elevadas
  - Energías de separación  $S_p$  y  $S_n$  mayores que en los núcleos vecinos
  - Momentos cuadrupolares eléctricos  $Q \approx 0$ , con núcleos esféricos en el estado fundamental
  - Los doblemente mágicos  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{40}\text{Ca}$ ,  ${}^{90}\text{Zr}$ ,  ${}^{208}\text{Pb}$  son muy estables y abundantes
  - Discontinuidades en las energías de las partículas  $\alpha$  (núcleos de  ${}^4\text{He}$ ) emitidas

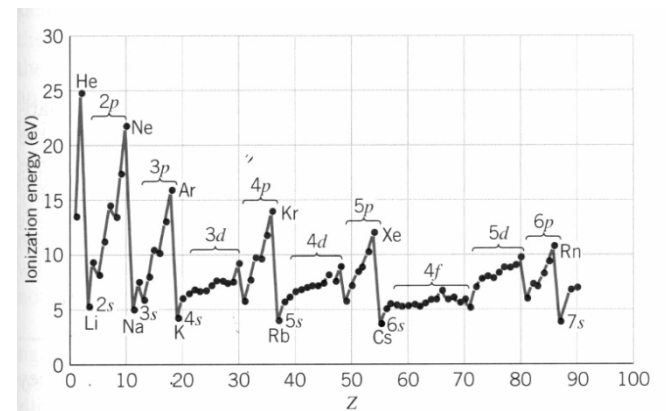
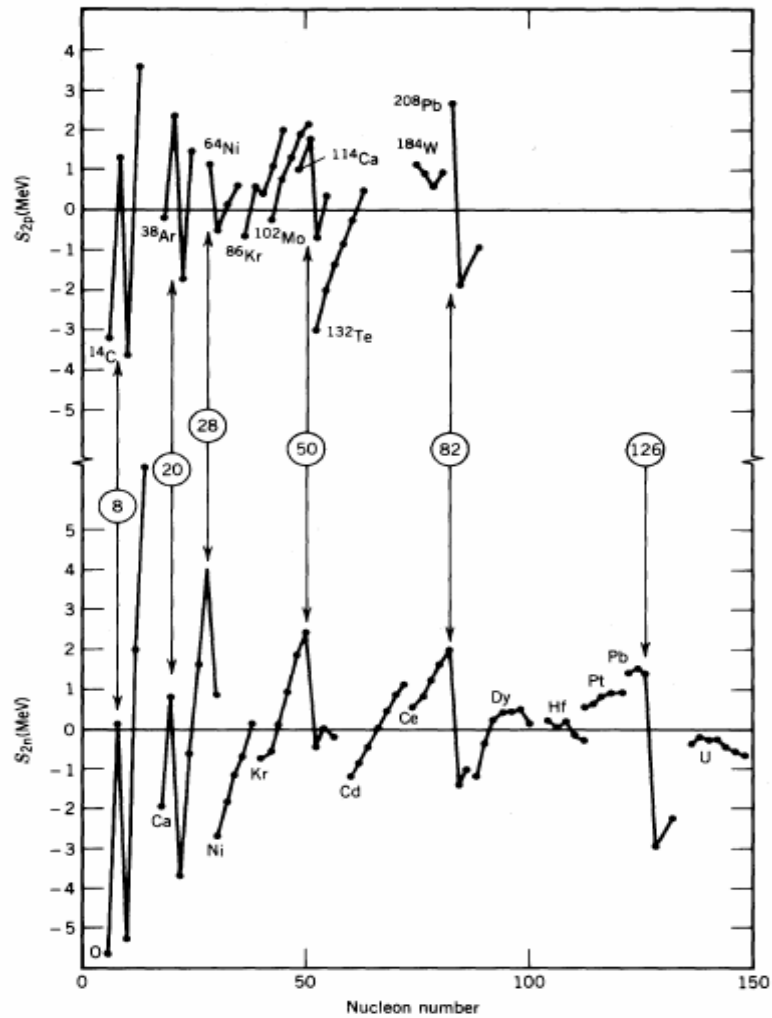
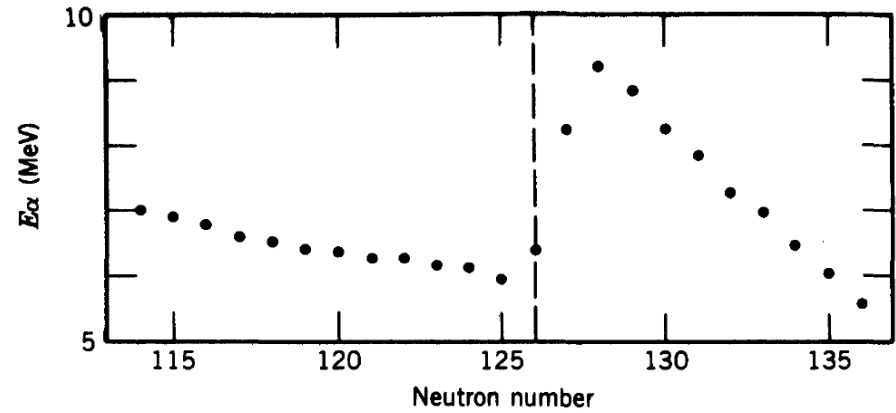


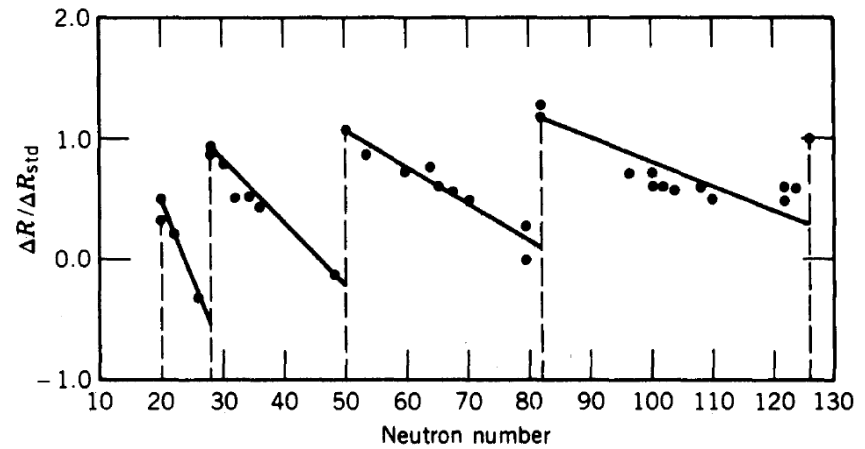
FIGURE 8.4 Ionization energies of neutral atoms of the elements.



(Arriba) Energías de separación de dos protones para secuencias de isótopos ( $N$  constante). Se indica el miembro de menor  $Z$ .  
 (Abajo) Energías de separación de dos neutrones. Los puntos que se representan son las diferencias respecto a las predicciones de la fórmula semiempírica de la masa. Los cambios bruscos corresponden a los números mágicos.



Energías de partículas  $\alpha$  emitidas por isótopos de Rn. Los cambios bruscos corresponden a los números mágicos.



Cambio en el radio de carga nuclear, normalizado al cambio esperado según la relación  $A^{1/3}$ , para  $\Delta N = 2$ . Los cambios bruscos corresponden a los números mágicos.

- Hipótesis básica: *La interacción de cada nucleón se describe en base a un potencial efectivo creado por la totalidad del núcleo.* La interacción nucleón - nucleón se expresa solo mediante un potencial promedio y el problema se reduce a un problema de un cuerpo.

- A la hora de elegir la forma concreta del potencial se suelen tomar varias posibilidades:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r \geq a \end{cases}$$

- Pozo infinito 3D.

- La solución de este potencial son las funciones esféricas de Bessel

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \phi) \rightarrow R_{nl}(r) = Nj_l(kr) \quad k^2 = \frac{2mE^2}{\hbar^2}$$

- Con energías  $E_{nl} = x_{nl}^2 \frac{\hbar^2}{2ma^2}$  donde  $x_{nl}$  son los ceros de la función de Bessel de orden  $l$ .

- Y degeneración  $2(2l+1)$ .

—————	1f (14)	34	X
—————	2s (2)	20	✓
—————	1d (10)	18	X
—————	1p (6)	8	✓
—————	1s (2)	2	✓

→ **No** reproduce correctamente los números mágicos.

□ Oscilador armónico:  $V(r) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2$

○ La solución de este potencial son los polinomios asociados de Laguerre

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \phi) \rightarrow R_{nl}(r) = N \cdot r^l \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha r^2} L_{\frac{1}{2}(n-l)}^{l+\frac{1}{2}}(\alpha r^2) \quad \alpha^2 = \frac{\mu\omega}{\hbar}$$

○ Con energías  $E_{nl} = \hbar\omega \left( 2n + l + \frac{3}{2} \right)$

○ Y degeneración  $[2n+l+1] \times [2n+l+2]$

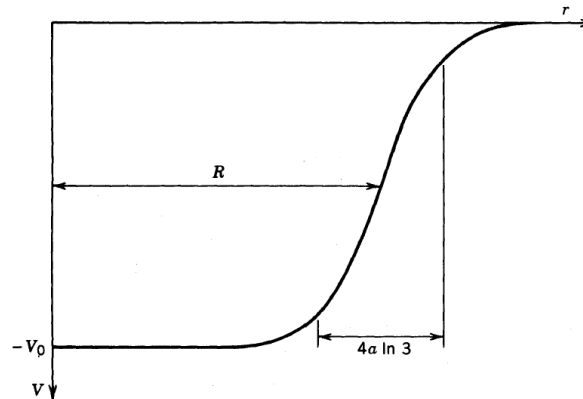
	2p,1f (6+14)	40	✗
	2s,1d (2+10)	20	✓
	1p (6)	8	✓
	1s (2)	2	✓

→ **No** reproduce correctamente los números mágicos.

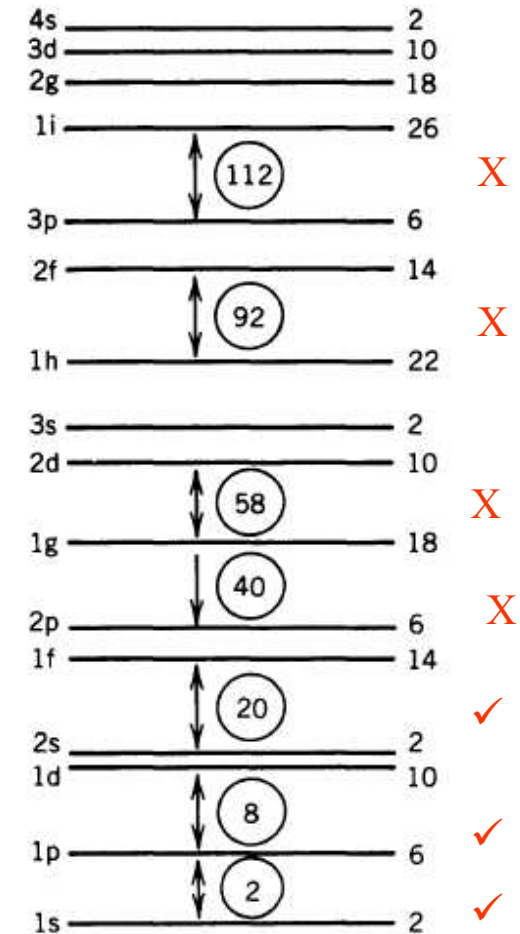
○ De hecho ambos potenciales requieren energía de separación  $\infty$  y no incorporan la corteza nuclear de forma correcta. El pozo infinito es demasiado abrupto y el potencial armónico demasiado suave.

- Un potencial más realista sería un potencial proporcional a la densidad nuclear, el potencial de Saxon-Woods.

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$



- $4a \ln 3$  representa la anchura de la superficie (anchura entre el 90% y 10% de la densidad máxima)
- $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$  y  $a \approx 0.55 \text{ fm}$  y se ajusta para dar correctamente el espaciado de los estados.  $R$  se toma como  $R_0 A^{1/3}$
- El esquema de niveles de energía es intermedio entre los dos anteriores. Más atractivo que el oscilador en la región de radios altos y baja los niveles de alto momento angular para un número cuántico de oscilador dado.
- La degeneración en energía de los niveles es  $2(2l+1)$ .
- Tampoco reproduce correctamente todos los números mágicos.



# Spherical potentials

## Infinite square well

$$V(r) = -V_0 \quad \text{for } r \leq R$$

$$= +\infty \quad \text{for } r > R$$

## Harmonic oscillator

$$V(r) = \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2$$

## Woods-Saxon potential

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left[\frac{(r-R)}{a}\right]}$$

## Eigen-functions

$$\psi \sim j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\Omega)$$

$$\psi \sim R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\Omega)$$

numerically

$$R_{n\ell}(r) = r^\ell e^{-\frac{1}{2}r^2} L_{n-1}^{\ell+1/2}(r^2)$$

## Eigen-energies

$$E(n, \ell) = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \xi_{n\ell}^2$$

$$\xi_{n\ell}: \text{root of } j_\ell(\xi) = 0$$

$$E(n, \ell) = \hbar\omega_0 (2n + \ell + 3/2)$$

$$= \hbar\omega_0 (N + 3/2)$$

intermediate



# Spherical potentials

## Woods-Saxon potential

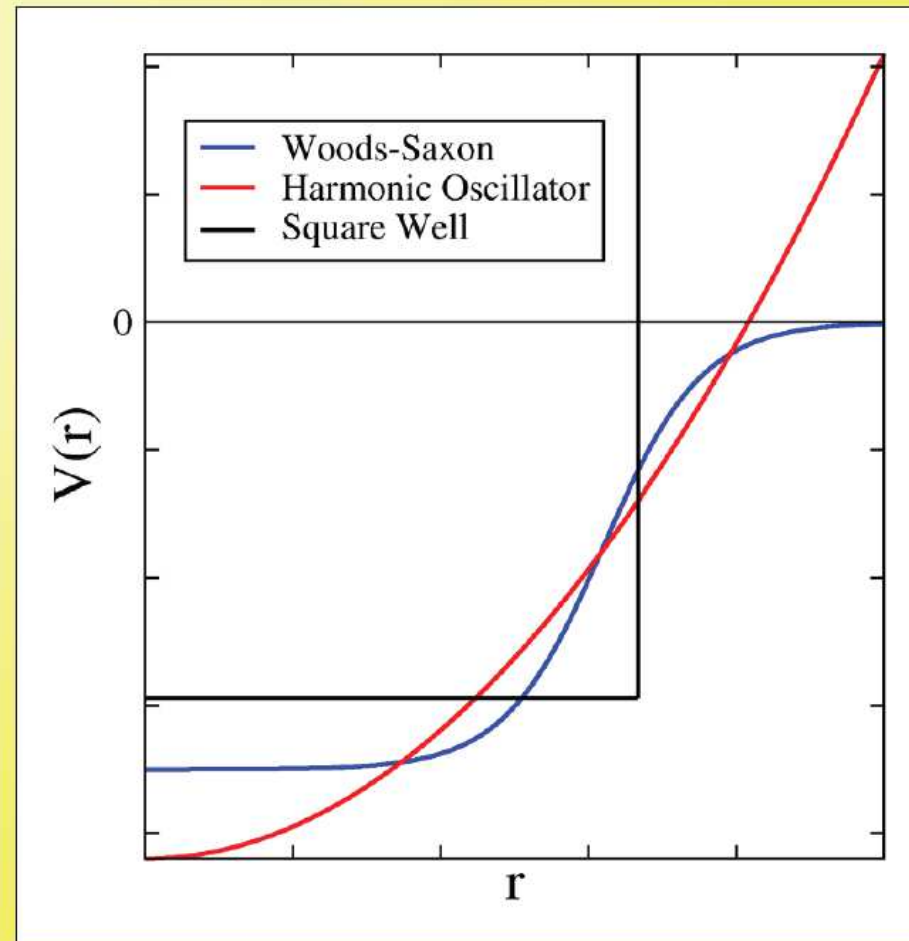
$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R)/a]}$$

## Harmonic oscillator

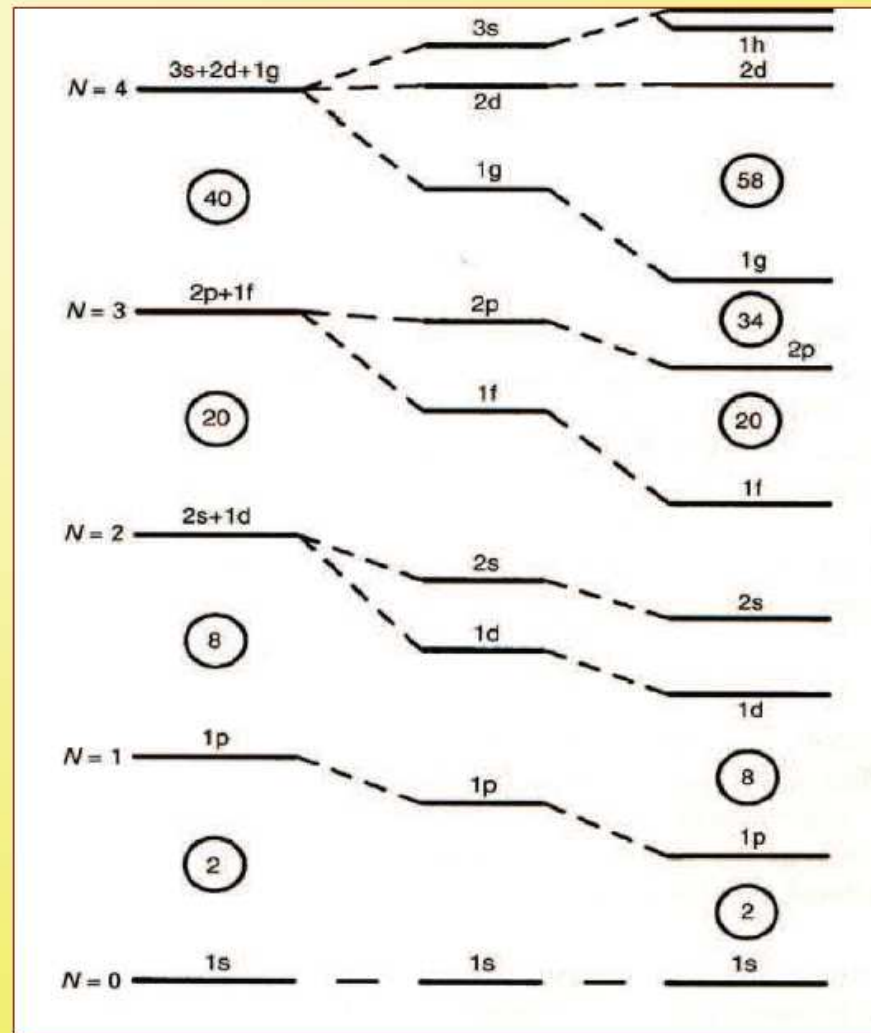
$$V(r) = \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2$$

## Infinite square well

$$V(r) = -V_0 \quad \text{for } r \leq R$$
$$= +\infty \quad \text{for } r > R$$



# Spherical potentials



H.O.

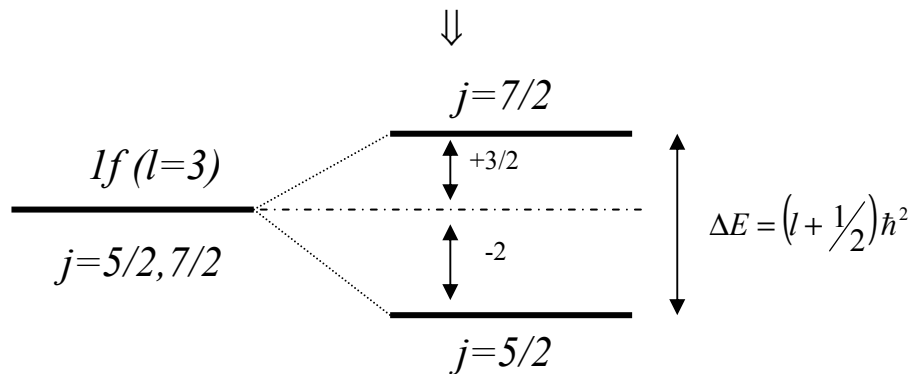
W.S.

Square

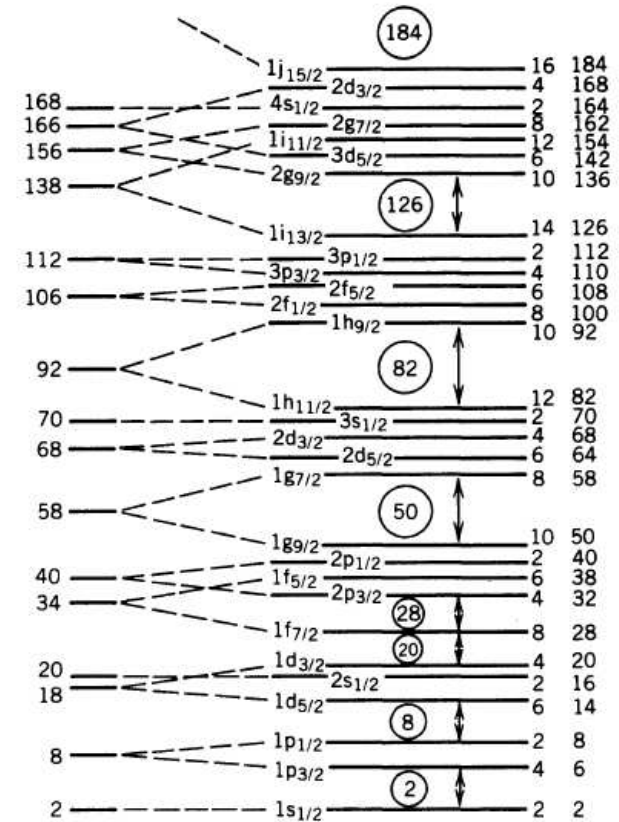
- En lo que respecta al término central  $V(r)$  no existen muchas más mejoras que se puedan introducir. En 1949 Mayer, Haxel, Suess y Jensen propusieron que la solución correcta era introducir un término de espín-órbita

$$j^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2 = l^2 + s^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} \rightarrow \vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$$

$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)$$



- Ajustando la forma radial del término de espín-órbita se logran reproducir correctamente todos los números mágicos y se predicen nuevos valores,  $Z, N=184$ .
- La degeneración en cada orbital es  $2j+1$ .



## ■ Modelo extremo de partícula independiente

- La secuencia de niveles del modelo de capas se va llenando por orden creciente de energía, siguiendo el principio de exclusión de Pauli

- En el modelo de partícula independiente extremo las propiedades del núcleo vienen determinadas únicamente por las del nucleón (hueco) desapareado

- Como el nucleón/hueco desapareado ocupa un estado de momento angular  $j$  bien definido

$$J = j \quad \text{donde} \quad P = (-1)^l \quad \text{y} \quad l = j \pm \frac{1}{2}$$

⇒ el momento angular orbital fija el valor de la paridad.

- El modelo funciona muy bien cerca de capa cerrada

- Un nucleón sobre capa cerrada
- Falta un nucleón para capa cerrada ⇒ hueco

- Lejos de capa cerrada el nucleón desapareado también determina las propiedades del nucleón, pero:

- Las fuerzas residuales no incluidas en el potencial central efectivo producen fuerzas de emparejamiento muy intensas que modifican los niveles energéticos y acoplan nucleones por pares a  $J^P = 0^+$
- Estas fuerzas son especialmente intensas cerca de capas cerradas
- Lejos de capa cerrada no son tan intensas debido a los nucleones de valencia, lo que origina discrepancias entre el modelo y la realidad

■ Ejemplo

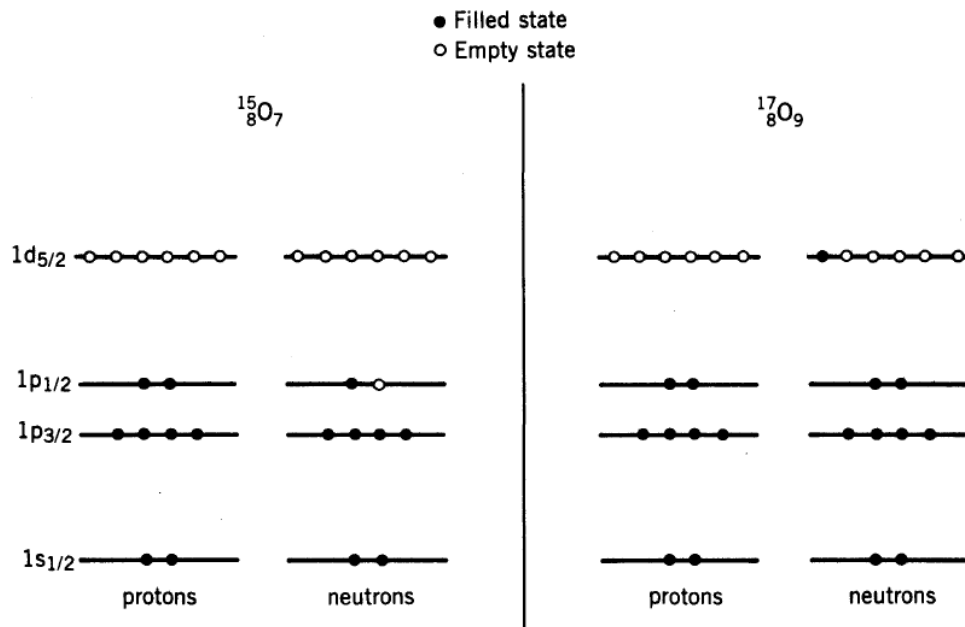
$${}^{15}_8\text{O}_7 \rightarrow 1p_{1/2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l=1 \Rightarrow P = (-1)^l = -1 \\ j = 1/2 \end{array} \right\} \rightarrow J^P = \frac{1}{2}^-$$

Experimentalmente:

$$J^P ({}^{15}_8\text{O}_7) = \frac{1}{2}^-$$

$${}^{17}_8\text{O}_9 \rightarrow 1d_{5/2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l=2 \Rightarrow P = (-1)^l = +1 \\ j = 5/2 \end{array} \right\} \rightarrow J^P = \frac{5}{2}^+$$

$$J^P ({}^{17}_8\text{O}_9) = \frac{5}{2}^+$$



*El modelo de capas extremo de partícula independiente es capaz de predecir correctamente la  $J^P$  de la mayor parte de los estados fundamentales de los núcleos con  $A$  impar*

- Momentos magnéticos dipolares

- El modelo de partícula independiente predice que el momento dipolar magnético de un núcleo con A impar es debido exclusivamente al del nucleón desapareado. Por ello,

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_N}{\hbar} (g^{(s)} \vec{s} + g^{(l)} \vec{l})$$

$$\vec{\mu}_l = g^{(l)} \frac{e\hbar}{2m_p} \frac{\vec{l}}{\hbar} = g^{(l)} \mu_N \frac{\vec{l}}{\hbar} \quad g^{(l)} = \begin{cases} g_p^{(l)} = 1 \\ g_n^{(l)} = 0 \end{cases} \quad \vec{\mu}_s = g^{(s)} \frac{e\hbar}{2m_p} \frac{\vec{s}}{\hbar} = g^{(s)} \mu_N \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad g^{(s)} = \begin{cases} g_p^{(s)} = 5.5856912(22) \\ g_n^{(s)} = -3.8260837(18) \end{cases}$$

- Tomando como eje z la dirección del campo magnético tenemos

$$\mu = \langle j, m = j | \mu_z | j, m = j \rangle = \frac{\mu_N}{\hbar} \left\{ (g^{(s)} - g^{(l)}) \langle j, j | s_z | j, j \rangle + g^{(l)} \langle j, j | j_z | j, j \rangle \right\}$$

- Donde obtenemos (utilizando el Teorema de Landé):

$$\mu = \begin{cases} j = l + 1/2 \Rightarrow \mu_N [g^{(l)}(j - 1/2) + 1/2 g^{(s)}] \\ j = l - 1/2 \Rightarrow \mu_N \frac{j}{j+1} [g^{(l)}(j + 3/2) - 1/2 g^{(s)}] \end{cases}$$

- Momento magnético de un nucleón con  $\vec{l}$  y  $\vec{s}$

$$\vec{\mu} = (g_l \vec{l} + g_s \vec{s}) \frac{\mu_N}{\hbar} \quad (i = p, n)$$

observable en la dirección  $z$  que define un campo magnético  $\vec{B}$  o  $j_z$  ( $\vec{l}$  y  $\vec{s}$  no tienen una dirección bien definida;  $\vec{j}$  sí)

- En esa dirección:  $\langle \mu \rangle = [g_l \langle j_z \rangle + (g_s - g_l) \langle s_z \rangle] \frac{\mu_N}{\hbar}$

- $\langle j_z \rangle = j \hbar$

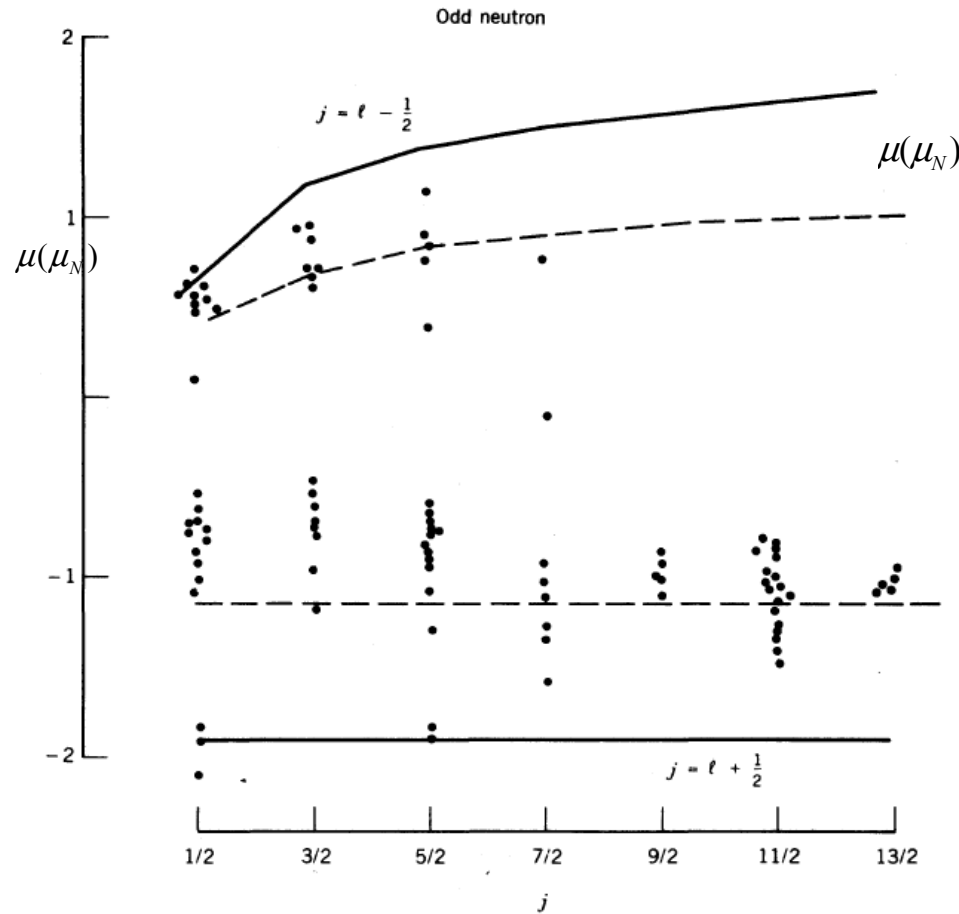
- La proyección de  $\vec{s}$  sobre  $\vec{j}$  es:  $\frac{\vec{s} \cdot \vec{j}}{j} \frac{\vec{j}}{j} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{s} \cdot (\vec{l} + \vec{s})}{j^2}$

$$\langle s_z \rangle = \langle j_z \rangle \frac{\langle \vec{s} \cdot \vec{l} \rangle + \langle \vec{s}^2 \rangle}{j(j+1)\hbar^2} = j\hbar \frac{\frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\hbar^2 + s(s+1)\hbar^2}{j(j+1)\hbar^2}$$

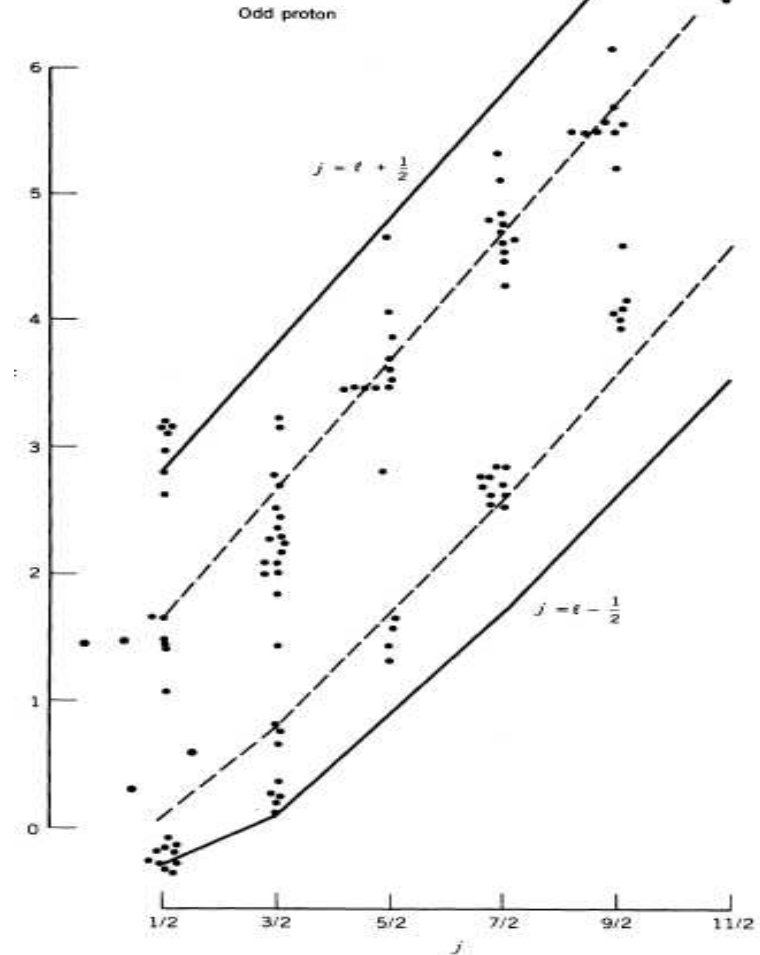
$$\langle s_z \rangle = \frac{j}{2j(j+1)} [j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)] \hbar$$

$$\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \Rightarrow \langle s_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \\ j = l - \frac{1}{2} \Rightarrow \langle s_z \rangle = -\frac{\hbar}{2} \frac{j}{(j+1)} \end{cases}$$

**Momentos magnéticos y líneas de Schmidt para núcleos con N impar**



**Momentos magnéticos y líneas de Schmidt para núcleos con Z impar**



- Valores experimentales cercanos a las líneas de Schmidt, pero no iguales.
  - Una posible mejora pasa por suponer que el valor de los factores giromagnéticos de los nucleones libres y de los nucleones en el núcleo no tienen porque ser iguales:  $g_s^{nucleo} = 0.6 g_s^{libre}$ .
- Para núcleos ligeros el acuerdo entre modelo y experimento es bastante satisfactorio



- Momento cuadrupolar eléctrico.

- El momento cuadrupolar  $Q$  en el modelo de partícula independiente viene determinado por el valor esperado del operador

$$Q_{sp} = e \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \psi(\vec{r}) | r^2 Y_{20}^*(\theta, \varphi) | \psi(\vec{r}) \rangle$$

sobre la función de onda del nucleón desapareado:

$$|jj\rangle = \sum_{m_l} \sum_{m_s} \langle l, m_l; s, m_s | jj \rangle |l, m_l\rangle |s, m_s\rangle$$

- Tras operar sobre los armónicos esféricos utilizando sus propiedades [*Varshalovich, "Quantum Theory of Angular Momentum"*] obtenemos

$$Q_{sp} = -e \langle r^2 \rangle \frac{2j-1}{2(j+1)} = -e \frac{3}{10} \left( \frac{2j-1}{j+1} \right) R_0^2 A^{2/3}$$

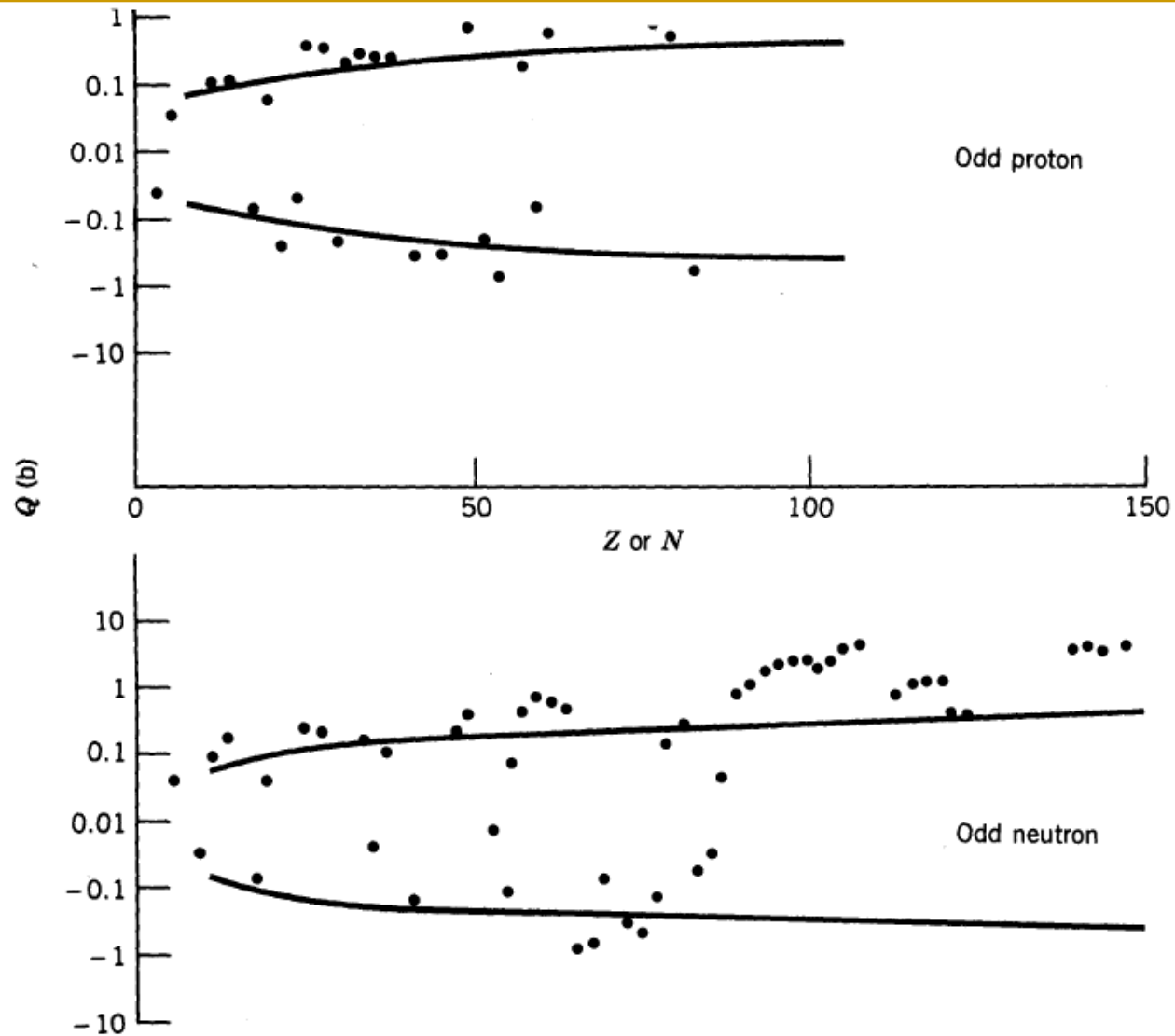
- Con esta expresión se predicen valores entre 0.015 barn ( $A = 10$ ) y 0.5 barn ( $A = 220$ ).
- Para un neutrón se tendría  $Q = 0$ , ya que su carga es nula.
- En subcapas con más de un nucleón se pueden sumar las contribuciones de cada nucleón
  - Si se tienen  $n$  protones en una capa ( $1 \leq n \leq 2j$ ):
  - Un hueco ( $n=2j$ ) se comporta como  $Q = -Q_{sp}$

$$Q = Q_{sp} \left\{ 1 - 2 \frac{n-1}{2j-1} \right\}$$

■ Ejemplos:

Estado	$Q$ calculado (b) ( $p$ desapareado)	$Q$ medido (b) ( $p$ desapareado)	$Q$ calculado (b) ( $n$ desapareado)	$Q$ medido (b) ( $n$ desapareado)
$1p_{3/2}$	-0.013	-0.0366 ${}^7_3\text{Li}_4$	0.00	
$1d_{5/2}$	-0.036	-0.12 ${}^{19}_9\text{F}_{10}$	0.00	-0.026 ${}^{17}_8\text{O}_9$
$1d_{3/2}$	-0.037	-0.0825 ${}^{35}_{17}\text{Cl}_{18}$	0.00	-0.064 ${}^{33}_{16}\text{S}_{17}$
$1f_{7/2}$	-0.071	-0.26 ${}^{43}_{21}\text{Sc}_{22}$	0.00	-0.080 ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$
$2p_{3/2}$	-0.055	-0.209 ${}^{63}_{29}\text{Cu}_{34}$	0.00	-0.0285 ${}^{53}_{24}\text{Cr}_{29}$
$1f_{5/2}$	-0.086		0.00	-0.20 ${}^{61}_{28}\text{Ni}^*_{33}$
$1g_{9/2}$	-0.13	-0.32 ${}^{93}_{41}\text{Nb}_{52}$	0.00	-0.17 ${}^{73}_{32}\text{Ge}_{41}$
$1g_{7/2}$	-0.14	-0.49 ${}^{123}_{51}\text{Sb}_{72}$	0.00	
$2d_{5/2}$	-0.12	-0.36 ${}^{121}_{51}\text{Sb}_{70}$	0.00	-0.236 ${}^{91}_{40}\text{Zr}_{51}$

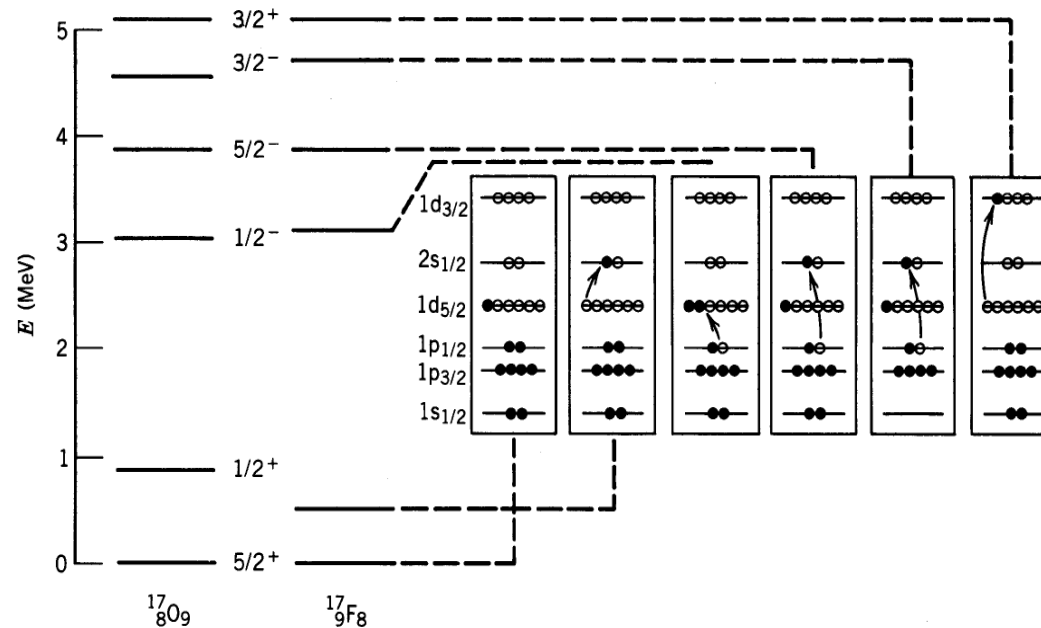
- ❑ Los valores calculados para  $p$  tienen el signo correcto, pero son 2 ó 3 veces inferiores
- ❑ Para neutrones son más pequeños, pero no nulos
- ❑ El modelo es parcialmente satisfactorio



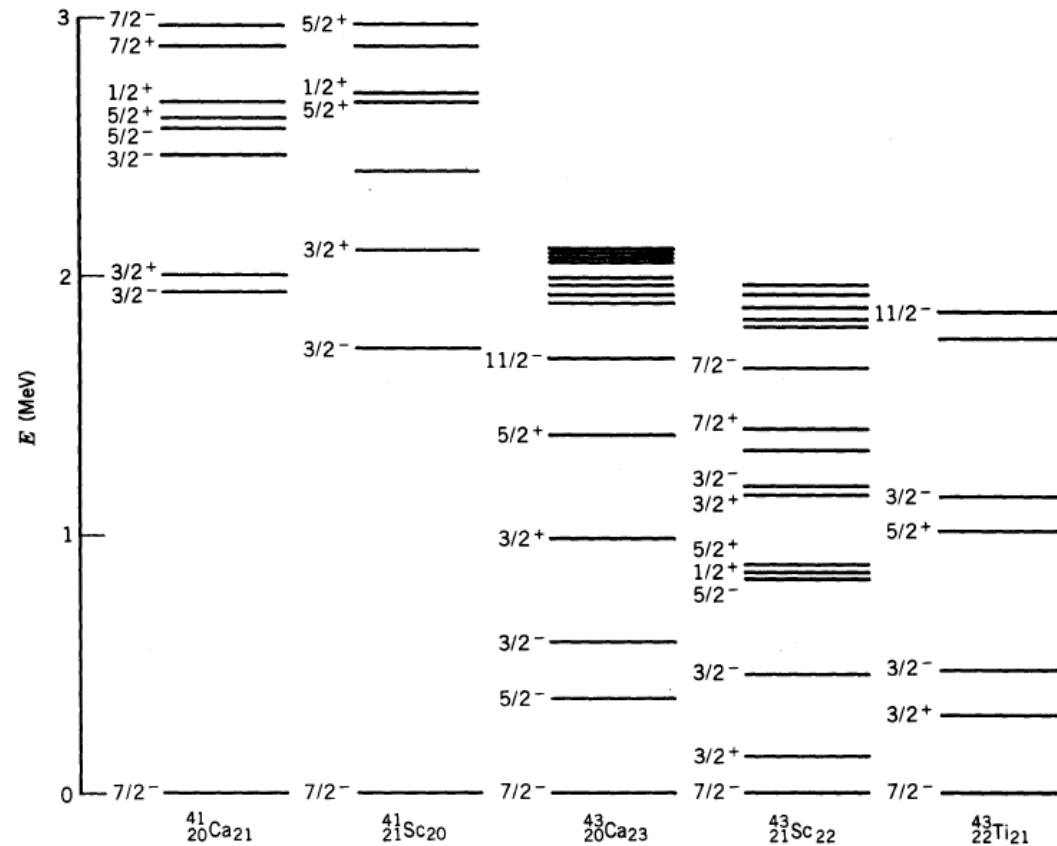
*Momentos cuadrupolares experimentales para núcleos con  $Z$  ó  $N$  impar. Las líneas continuas indican los límites  $Q \sim \langle r^2 \rangle$  que se esperan en el modelo de capas. Para las regiones  $60 < Z < 80$ ,  $Z > 90$ ,  $90 < N < 120$ ,  $N > 140$  los valores experimentales son mas de un orden de magnitud mayores que los predichos por el modelo de capas.*

- Nucleones de valencia.

- A pesar de su simplicidad, el modelo extremo de partícula independiente permite predecir bastante correctamente los espines-paridades de prácticamente todos los núcleos con A impar, pero es menos predictivo (pero aún satisfactorio) para los momentos magnéticos y eléctricos
- Una mejor aproximación es considerar todos los nucleones de una subcapa  $j$ 
  - Nucleones de valencia
  - Reproduce sustancialmente mejor la estructura de estados excitados
- Ejemplo: estructura de niveles del  $^{17}\text{O}$  y  $^{17}\text{F}$ ,

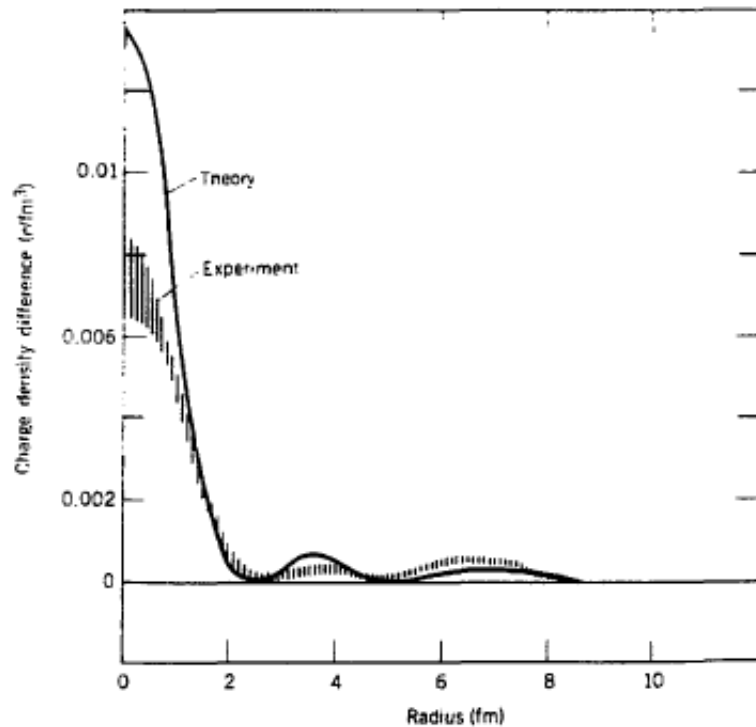


- Otro ejemplo: niveles de energía de núcleos con nucleón desapareado en el nivel  $1f_{7/2}$



- Si solo el nucleón desapareado fuera relevante todos tendrían la misma estructura de niveles
- La riqueza y diferencia de niveles proviene del acoplamiento de los nucleones de valencia
  - La riqueza de niveles aumenta con el número de nucleones (o huecos) de valencia

- Una de las hipótesis subyacentes al modelo de capas es que los nucleones retienen su carácter independiente en el interior del núcleo. Esto es equivalente a preguntarse si la distribución de carga nuclear del nucleón es la misma si se encuentra libre o ligado en el interior del núcleo.
- Comparamos medidas de la densidad de carga eléctrica en un núcleo que tiene un protón aislado en un orbital externo  $nS_{1/2}$  con el que carece de él.



- En este caso se compara gracias a un experimento de difusión de electrones de alta energía (ver tema anterior) un núcleo de  $^{205}_{81}\text{Tl}_{124}$  y  $^{206}_{82}\text{Pb}_{124}$ . Se puede comprobar como la densidad de carga eléctrica se corresponde con un protón en capa  $3s_{1/2}$ .