

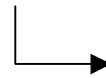
SIMETRIAS Y LEYES DE CONSERVACION

- 1. Introducción**
- 2. Conservación de la energía y el momento**
- 3. Conservación del momento angular**
- 4. Paridad**
- 5. Isospín**
- 6. Extrañeza**
- 7. Conjugación de carga**
- 8. Inversión temporal**

Introducción

- Las propiedades de **invariancia** de las ecuaciones de un sistema bajo transformaciones de simetría conducen a **leyes de conservación**.
- Transformaciones **continuas**: traslaciones y rotaciones en el espacio
- Transformaciones **discretas**: paridad, conjugación de carga, etc.
- La evolución temporal de un operador cuántico Q viene dada por la ecuación de Heisenberg:

$$i\hbar \frac{dQ}{dt} = i\hbar \frac{\partial Q}{\partial t} + [Q, H]$$



Hamiltoniano

- Si Q no depende explícitamente del tiempo, y conmuta con el hamiltoniano del sistema, será una constante. Los **números cuánticos conservados** están asociados a operadores que conmutan con el hamiltoniano

Conservación de la energía y el momento

- Un sistema aislado, no sometido a fuerzas externas, conserva la energía y el momento.
- Traslación infinitesimal en el espacio sobre un sistema descrito por la función de onda ψ :

$$\psi' = \psi(r + \delta r) = \psi(r) + \delta r \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} = \underbrace{\left(1 + \delta r \frac{\partial}{\partial r}\right)}_D \psi$$

$$\psi' = D\psi$$

- En función del operador cuántico momento $p = i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$,

$$D = \left(1 + ip \frac{\delta r}{\hbar}\right)$$

- Operador de traslación finita: $\Delta r = n\delta r$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + ip \frac{\delta r}{\hbar}\right)^n = \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \Delta r\right) \quad \swarrow \text{generador}$$

- Si el hamiltoniano es invariante bajo traslaciones entonces

$$[D, H] = 0 \Rightarrow [p, H] = 0$$

y el momento lineal p se conserva.

- Si hay invariancia frente a traslaciones espacio-temporales se conserva el momento y la energía

Conservación de la energía y el momento (desintegraciones)

Todas las desintegraciones y colisiones entre partículas conservan la energía total y el momento

- Magnitudes cinémáticas:
 - ✓ Cuadrimento de una partícula de energía total E y momento \vec{p} : $p = (E, \vec{p})$
 - ✓ Invariante relativista: producto escalar de cuadrimentos

$$p_i p_j = E_i E_j - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j$$

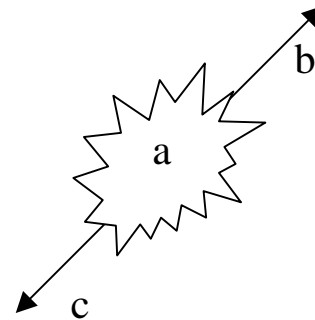
- ✓ Masa invariante \sqrt{s} de dos partículas:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$$

- Desintegración a dos partículas: $a \rightarrow b + c$ (centro de masas)

$$p_a = p_b + p_c$$

$$(m_a, \vec{0}) = (E_b, \vec{p}_b) + (E_c, \vec{p}_c)$$



- Las energías cinéticas de b y c vienen fijadas:

$$T_b = \frac{(m_a - m_b - m_c)(m_a - m_b + m_c)}{2m_a}$$

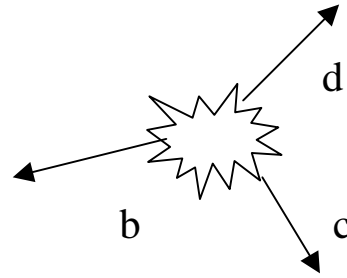
$$T_c = \frac{(m_a - m_b - m_c)(m_a - m_c + m_b)}{2m_a}$$

Conservación de la energía y el momento (desintegraciones)

- **Desintegración a tres partículas:** $a \rightarrow b + c + d$ (*centro de masas*)

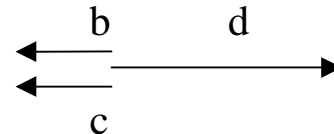
$$p_a = p_b + p_c + p_d$$

$$(\sqrt{s}, \vec{0}) = (E_b, \vec{p}_b) + (E_c, \vec{p}_c) + (E_d, \vec{p}_d)$$



- La energía de una de ellas es máxima cuando las otras dos salen con igual dirección y velocidad:

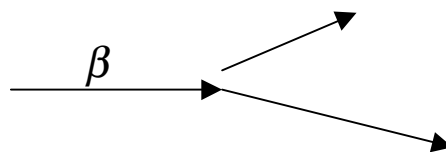
$$E_d^{\max} = \frac{s + m_d^2 - (m_b + m_c)^2}{2\sqrt{s}}$$



$$T_d^{\max} = \frac{(m_a - m_d)^2 - (m_b + m_c)^2}{2m_a}$$

- **Desintegración en vuelo:** aplicamos una *transformación de Lorentz*

$$E^{\text{lab}} = \gamma(E^{\text{cm}} + \beta p_z^{\text{cm}})$$



Conservación de la energía y el momento (colisiones)

• Colisiones: $a + b \rightarrow \underbrace{c + d + e + \dots}_M$

Masa invariante al cuadrado:

$$s = (p_a + p_b)^2 = (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a E_b - 2\vec{p}_a \vec{p}_b$$

que en el *sistema centro de masas* es 0

$$s = (E_a^* + E_b^*)^2 - (\vec{p}_a^* + \vec{p}_b^*)^2 \equiv E^{*2}$$

➤ **Blanco fijo:** $\vec{p}_b = \vec{0}$, $E_b = m_b$ → **a** → ○ **b**

➤ Energía disponible en centro de masas

$$E^{*2} = m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a$$

➤ Umbral de producción

$$E^{*2} = M^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^{umb}$$

$$\Rightarrow E_a^{umb} = \frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}$$

➤ **Colisionador:**



$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a E_b + 2p_a p_b \approx 4E_a E_b \quad \text{si } m_a, m_b \ll E_a, E_b$$

Si $E_a = E_b \Rightarrow E^* \approx 2E$ (con blanco fijo $E^* \approx \sqrt{2m_b E_a}$)

Conservación del momento angular

- Rotación infinitesimal $\delta\phi$ alrededor de un eje:

$$R = 1 + \delta\phi \frac{\partial}{\partial\phi}$$

- En función de operador momento angular (3ª componente):

$$J_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$R = 1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi$$

- Una rotación finita $\Delta\phi$ se obtiene como

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi \right)^n = \exp \left(\frac{i}{\hbar} J_z \Delta\phi \right)$$

- La invariancia del hamiltoniano bajo rotaciones conduce a

$$[R, H] = 0 \Rightarrow [J_z, H] = 0$$

- J_z se conserva, y si la invariancia es respecto de cualquier eje implica la conservación del vector momento angular

Todas las desintegraciones y reacciones entre partículas conservan el momento angular total (orbital más espín)

Paridad

- Transformación discreta que invierte las coordenadas espaciales

$$P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

- P es un operador unitario ($P^2 = 1$), por lo que los valores propios (si hay) solo pueden ser $+1$ ó -1 (**paridad del sistema**)
- Si el hamiltoniano de un sistema conmuta con el operador P , la paridad del sistema se conserva.
- *Ejemplo: potencial central.* Los estados de momento angular definido dados por armónicos esféricos Y_{lm} tienen paridad definida con valor $(-1)^l$
- La paridad es un número cuántico multiplicativo. Los sistemas compuestos $\psi = \phi_a \phi_b \phi_c \dots$ tienen paridad

$$P(\psi) = P(\phi_a)P(\phi_b)P(\phi_c)\dots$$

- Cada partícula elemental tiene asociada una **paridad intrínseca**.
- Por convenio las paridades del protón, el neutrón y el hiperón Λ son positivas.
- Fermión y antifermión tienen distinta paridad, mientras que bosón-antibosón tienen igual paridad

La paridad se conserva rigurosamente en las interacciones fuertes y electromagnética, pero no en las débiles.

Paridad (ejemplos)

- Desintegración **fuerte** del meson $\phi(1020MeV)$:

$$\phi(1^?) \rightarrow K^+(0^-)K^-(0^-) \quad (\Gamma = 4,43MeV \Rightarrow \tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \approx 10^{-22} s)$$

- ✓ Conservación del momento angular: $J(\phi) = 1 = \underbrace{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}_0 + \vec{l} \Rightarrow l = 1$
- ✓ Conservación de la paridad $P(\phi) = \underbrace{P(K^+)P(K^-)}_{+1} (-1)^l$
- ✓ Por tanto paridad intrínseca del ϕ : $P(\phi) = (+1)(-1)^1 = -1$

- Desintegración **electromagnética** del barión $\Sigma^0(1192MeV)$:

$$\Sigma^0(\frac{1}{2}^?) \rightarrow \Lambda(\frac{1}{2}^+) + \gamma(1^-) \quad (\tau = 7,4 \times 10^{-20} s)$$

- ✓ Conservación del momento angular: $\frac{\vec{1}}{2} = \frac{\vec{1}}{2} + \underbrace{\vec{1} + \vec{l}}_{\vec{l}} \Rightarrow L = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$
- ✓ Pero los fotones no pueden llevar momento angular nulo $\Rightarrow L=1$
- ✓ Experimentalmente: fotones con carácter dipolar magnético
 $M1 \Rightarrow$ sin cambio de paridad $\Rightarrow P(\Sigma^0) = P(\Lambda) = +1$

Paridad (ejemplos)

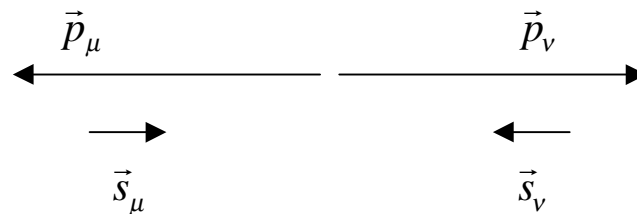
- Desintegración **débil** del mesón π^+ ($139,5\text{MeV}$)

$$\pi^+(0^-) \rightarrow \mu^+(\frac{1}{2}) + \nu_\mu(\frac{1}{2}) \quad (\tau = 2,6 \times 10^{-8} \text{ s})$$

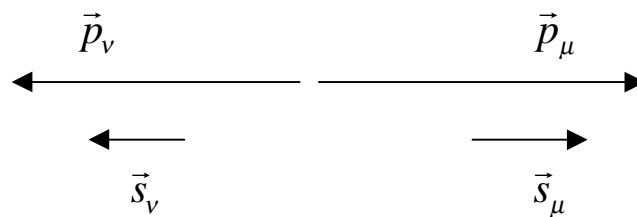
- ✓ Conservación del momento angular

$$\vec{0} = \frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{1}}{2} + \vec{l} \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ \text{espines antiparalelos} \end{cases}$$

- ✓ Como la helicidad del neutrino es negativa también lo será la del muón



- ✓ Bajo una transformación de paridad el proceso sería



- ✓ Este proceso no existe en la naturaleza, no hay neutrinos dextrógiros. Por tanto se viola la paridad.

Isospín

- Los hadrones con propiedades similares y masas casi idénticas se agrupan en los llamados *multipletes de isospín*

$$(p,n), (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), (\pi^+, \pi^0, \pi^-), (\Lambda), (\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$$

- Un multiplete se caracteriza por un número cuántico interno I llamado **isospín**, que caracteriza a un vector \vec{I} en el espacio de isospín, con terceras componentes I_3 asociadas a cada partícula de multiplete.

- A cada hadrón de carga Q , le asignamos un valor

$$I_3 = \frac{Q}{e} - \frac{(B+S)}{2}$$

con *número bariónico* $B=1$ para bariones, $B=-1$ para antibariones y $B=0$ para mesones. (S es la extrañeza)

$$\begin{cases} I_3(p) = 1 - \frac{1}{2} = +\frac{1}{2} \\ I_3(n) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I_{p,n} = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} I_3(\pi^+) = 1 - 0 = +1 \\ I_3(\pi^0) = 0 - 0 = 0 \\ I_3(\pi^-) = -1 - 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow I_\pi = 1$$

- **El isospín se conserva en las interacciones fuertes** (independencia de la carga en la interacción fuerte entre nucleones), pero no en los procesos electromagnéticos ni en los débiles.
- $\eta'(958, I=0) \rightarrow \eta(547, I=0) + \pi^0(I=1)$ prohibido fuertemente
- $\eta' \rightarrow \eta + \pi^0 + \pi^0$ permitido fuertemente

Isospín

- Estados de isospín de un sistema de dos nucleones ($I(p)=I(n)=1/2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(I=1, I_3=1) = p(1)p(2) \\ \chi(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [p(1)n(2) + n(1)p(2)] \\ \chi(1,-1) = n(1)n(2) \end{array} \right. \quad \text{Estados tripletes de isospín}$$

$$\left\{ \chi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [p(1)n(2) - n(1)p(2)] \right. \quad \text{Estado singlete de isospín}$$

- Función de onda total del sistema NN

$$\psi = \phi(\text{espacial})\alpha(\text{espin})\chi(\text{isospin})$$

- Aplicación al deuterón (sistema de dos nucleones idénticos)

- ✓ $S=1 \Rightarrow \alpha(\text{espin})$ simétrica
- ✓ $l=0$ (onda S) $\Rightarrow \phi(\text{espacial})$ simétrica
- ✓ $\chi(\text{isospin})$ necesariamente antisimétrica $\Rightarrow I(\text{deuteron})=0$

- Aplicación de la conservación isospín

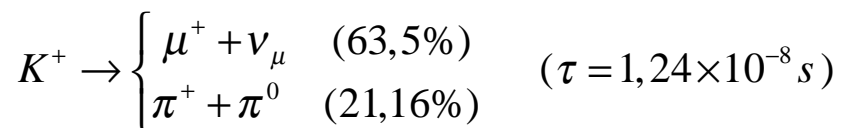
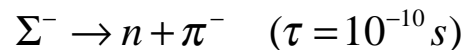
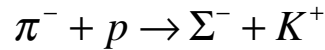
$$p + p \rightarrow d + \pi^+ \quad p + n \rightarrow d + \pi^0$$

$$I = \vec{1}(100\%) \rightarrow \vec{0} + \vec{1} \quad I = \begin{cases} \vec{0}(50\%) \not\rightarrow \vec{0} + \vec{1} \\ \vec{1}(50\%) \rightarrow \vec{0} + \vec{1} \end{cases}$$

$$\frac{\sigma(p + n \rightarrow d + \pi^0)}{\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+)} = \frac{1}{2}$$

Extrañeza

- Algunos mesones y bariones se desintegran de forma “*extraña*”, con vidas medias demasiado largas, a pesar de producirse en interacciones fuertes



- Se introduce la **extrañeza** como un número cuántico que se conserve en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero que se viole en 1 unidad en los procesos débiles
- Las partículas extrañas se producen a pares (*producción asociada*)
- Partículas no extrañas : $S = 0$
- Arbitrariamente $S(K^+) = 1 \Rightarrow S(K^-) = -1$ ($\pi^- + p \rightarrow n + K^+ + K^-$)
- Los kaones son los mesones extraños más ligeros, por lo que se desintegran débilmente
- Existen *resonancias mesónicas* extrañas más pesadas que los kaones que se desintegran en mesones extraños ligeros sin violar extrañeza
 $K^*(892) \rightarrow K + \pi$ ($\tau \sim 10^{-23}$) con $S = +1$ ó $S = -1$ a ambos lados.

Extrañeza

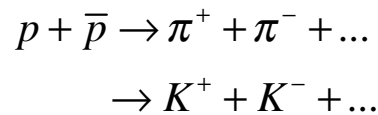
- El barión extraño más ligero es el $\Lambda^0(1116)$ ($\pi^+ + n \rightarrow \Lambda^0 + K^+$), no puede desintegrarse fuertemente en $\Lambda^0 \rightarrow p + K^-$ ($m_p + m_K = 1431,9 \text{ MeV}$) y lo hace débilmente violando extrañeza

$$\Lambda^0 \rightarrow p\pi^- \quad \Lambda^0 \rightarrow n\pi^0 \quad (\tau \sim 10^{-10} \text{ s})$$

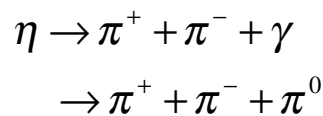
Name	Mass (MeV/c ²)	Spin-Parity	Isospin <i>T, T₃</i>	Strangeness	Width or Decay Lifetime	Principal Decay Modes
Λ^0	1116	$\frac{1}{2}^+$	0, 0	-1	$2.6 \times 10^{-10} \text{ s}$	$p\pi^-$ (64%); $n\pi^0$ (36%)
Σ^+	1189	$\frac{1}{2}^+$	1, +1	-1	$0.80 \times 10^{-10} \text{ s}$	$p\pi^0$ (52%); $n\pi^+$ (48%)
Σ^0	1192	$\frac{1}{2}^+$	1, 0	-1	$5.8 \times 10^{-20} \text{ s}$	$\Lambda\gamma$
Σ^-	1197	$\frac{1}{2}^+$	1, -1	-1	$1.5 \times 10^{-10} \text{ s}$	$n\pi^-$
Ξ^0	1315	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	-2	$2.9 \times 10^{-10} \text{ s}$	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	1321	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-2	$1.6 \times 10^{-10} \text{ s}$	$\Lambda\pi^-$
Σ^{*+}	1382	$\frac{3}{2}^+$	1, +1	-1	35 MeV	} $\Lambda\pi$ (80%); $\Sigma\pi$ (12%)
Σ^{*0}	1382	$\frac{3}{2}^+$	1, 0	-1	35 MeV	
Σ^{*-}	1387	$\frac{3}{2}^+$	1, -1	-1	40 MeV	
Ξ^{*0}	1532	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	-2	9 MeV	} $\Xi\pi$
Ξ^{*-}	1535	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-2	10 MeV	
Ω^-	1673	$\frac{3}{2}^+$	0, 0	-3	$0.82 \times 10^{-10} \text{ s}$	ΛK (69%); $\Xi\pi$ (31%)

Conjugación de carga

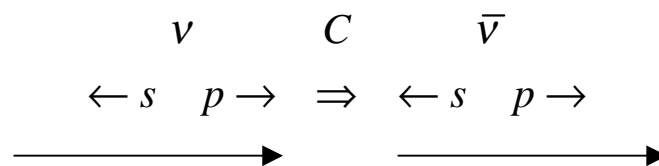
- La operación **conjugación de carga C** invierte el signo de la carga eléctrica y del momento magnético de la partícula dejando el resto de coordenadas iguales.
- La conjugación de carga implica el intercambio de partícula por antipartícula
- Las interacciones fuertes y electromagnéticas son invariantes bajo C. Se producen mesones positivos y negativos en proporciones iguales, en procesos fuertes



o electromagnéticos



- Las interacciones débiles violan C. Un neutrino levógiro se transforma bajo C en un antineutrino levógiro, que no existe.



- Si aplicamos C y P de forma simultánea, aparece un antineutrino dextrógiro (que sí que existe), y por tanto CP es una buena simetría.
- En 1964 se descubrió una pequeña violación de CP en la desintegración débil de los kaones neutros, del orden de 10^{-4}

Conjugación de carga

- Solo los bosones neutros que sean sus propias antipartículas ($S = I = B = C = 0$) pueden ser estados propios del operador C

$$\gamma, \pi^0, \eta^0, \eta', \rho^0, \omega^0, \phi, J/\psi, \Upsilon$$

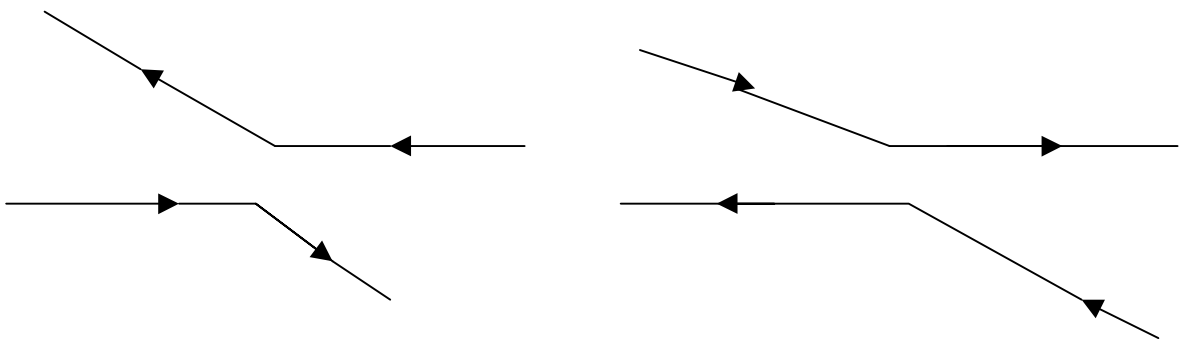
- Ni los bariones ni los leptones son estados propios de C
- Desintegración del π^0 ($\tau = 8,4 \times 10^{-17} s$)
 - ✓ El pion neutro se desintegra en 2 fotones pero no en 3 fotones

$$\frac{\pi^0 \rightarrow 3\gamma}{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} < 3 \times 10^{-8}$$

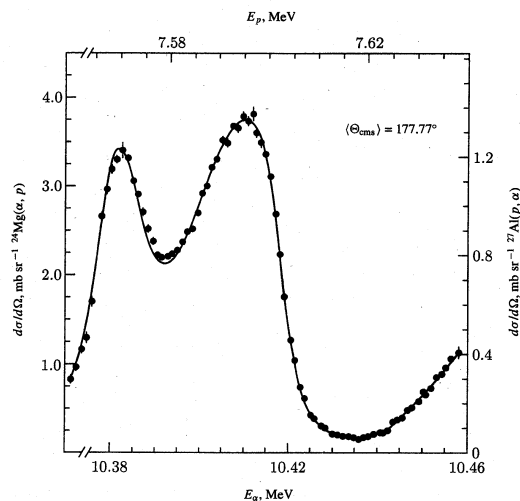
- ✓ Como $C|\pi^0\rangle = \eta|\pi^0\rangle$ y $C^2|\pi^0\rangle = \eta^2|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle \Rightarrow \eta = \pm 1$
- ✓ Además $C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$ (ya que el campo electromagnético es producido por cargas en movimiento que cambian bajo C)
- ✓ Por tanto $C(\pi^0) = C(2\gamma) = (-1)^2 = +1$
- ✓ En consecuencia $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ está prohibida si C se conserva en las interacciones electromagnéticas

Inversión temporal

- El operador inversión temporal T transforma un estado $|\psi(t)\rangle$ en $|\psi(-t)\rangle$
- Si T es una buena simetría para cada proceso existe el proceso idéntico invertido temporalmente (*principio de microrreversibilidad*)



- En las interacciones fuertes T es una buena simetría



Secciones eficaces diferenciales de la reacción $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ y su inversa

Inversión temporal

- La violación de CP en las interacciones débiles implica la violación de T puesto que la simetría CPT es rigurosa para todas las interacciones (*teorema CPT*)

Quantity		Effect of T	Effect of P
position	\mathbf{r}	\mathbf{r}	$-\mathbf{r}$
momentum	\mathbf{p}	$-\mathbf{p}$	$-\mathbf{p}$
spin	$\boldsymbol{\sigma}$, axial vector ($\mathbf{r} \times \mathbf{p}$)	$-\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\sigma}$
electric field	\mathbf{E} ($= -\nabla V$)	\mathbf{E}	$-\mathbf{E}$
magnetic field	\mathbf{B} , axial vector	$-\mathbf{B}$	\mathbf{B}
magnetic dipole moment	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$
electric dipole moment	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$	$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$	$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$
longitudinal polarisation	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$	$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$
transverse polarisation	$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$	$-\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$	$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$

- La búsqueda de violación de T en los procesos débiles es de gran importancia en la verificación de la simetría CPT