Introducción a la estadística espectral en física nuclear

Complejidad del núcleo atómico

- ¿Qué deberíamos hacer para calcular los niveles de energía de un núcleo?

$$[\sum_{n}\frac{P_n^2}{2m}+\sum_{n,m}V(r_n,r_m)]\Psi_i(r_1,...,r_N)=E_i\Psi_i(r_1,...,r_N)$$

Complejidad del núcleo atómico

- ¿Qué deberíamos hacer para calcular los niveles de energía de un núcleo?

$$[\sum_n \frac{P_n^2}{2m} + \sum_{n,m} V(r_n, r_m)]\Psi_i(r_1, ..., r_N) = E_i \Psi_i(r_1, ..., r_N)$$

- La densidad de niveles crece exponencialmente con la energía.
- Necesaria una descripción estadística.

Densidad acumulada de niveles

- Definición $N(E) = \sum_i \Theta(E - E_i)$

Densidad acumulada de niveles

- Definición $N(E) = \sum_i \Theta(E - E_i)$

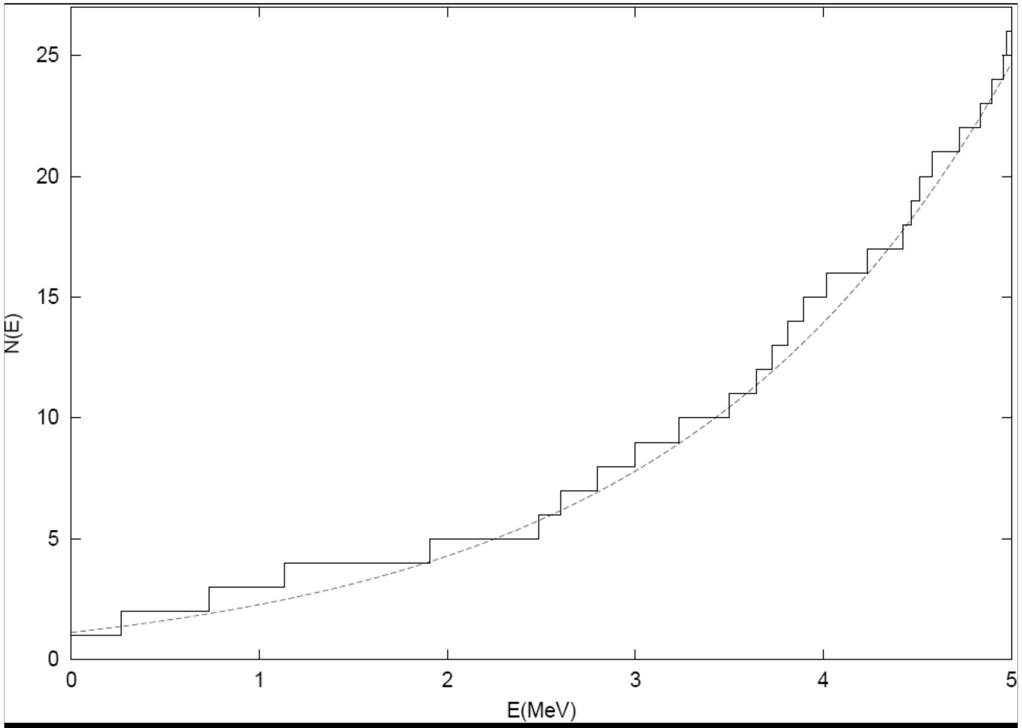
$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$$

Densidad acumulada de niveles

- Definición $N(E) = \sum_i \Theta(E - E_i)$ $\qquad \rho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$
- En general, se puede dividir entre una parte suave y una parte fluctuante $N(E) = \bar{N}(E) + \tilde{N}(E)$

Densidad acumulada de niveles

- Definición $N(E) = \sum_i \Theta(E - E_i)$ $\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$
- En general, se puede dividir entre una parte suave y una parte fluctuante $N(E) = \bar{N}(E) + \tilde{N}(E)$



Densidad de niveles (y II)

- La parte suave depende del sistema. Nos da su escala de energías característica.
- Para la estadística espectral nos interesa la parte fluctuante.
- El comportamiento de la parte fluctuante depende de las simetrías fundamentales del sistema y de sus propiedades dinámicas.

Reescalado de los niveles

- Procedimiento para eliminar la parte suave de la densidad de estados.
- Vamos a hacer un mapa entre los niveles de energía originales y unos nuevos niveles reescalados. $E_i \to \epsilon_i \;\; \epsilon_i = \bar{N}(E_i)$

Reescalado de los niveles

- Procedimiento para eliminar la parte suave de la densidad de estados.
- Vamos a hacer un mapa entre los niveles de energía originales y unos nuevos niveles reescalados.

$$E_i \to \epsilon_i \quad \epsilon_i = \bar{N}(E_i)$$

- Ahora, la parte suave es la misma para todos los sistemas y podemos comparar las propiedades estadísticas de la parte fluctuante.

$$\bar{n}(\epsilon_i) = 1$$

Tipos de espectros

Condiciones para una teoría de matrices aleatorias

- Que sean tratables matemáticamente
- Que la colectividad en su conjunto sea invariante bajo las transformaciones de simetría apropiadas
- Propiedades ergódicas de la colectividad que nos permitan utilizar resultados promedio para caracterizar un sistema físico.

Teoría de matrices aleatorias

Cuatro colectividades de matrices aleatorias:

- Colectividad Ortogonal Gaussiana (GOE): Sistemas invariantes bajo inversión temporal y simetría bajo rotaciones o con espín entero.
- Colectividad Unitaria Gaussiana (GUE): Sistemas no invariantes bajo inversión temporal.
- Colectividad Simplectica Gaussiana (GSE): Sistemas invariantes bajo inversión temporal pero sin simetría bajo rotaciones y con espín semientero.

- Colectividad Diagonal Gaussiana (GDE): Sólo elementos diagonales.

Distribución de probabilidad de los elementos de matriz:

GOE
$$p(H_{11},...,H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^2 \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp\left\{-A\sum_{n,m} H_{nm}^2\right\}$$

GUE
$$p(H_{11},...,H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^2 \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp\left\{-A\sum_{n,m} \left[(Re\,H)_{nm}^2 + (Im\;H)_{nm}^2\right]\right\}$$

Distribución de autovalores
$$P(E_1,....,E_N) \propto \prod_{n>m} |E_n - E_m|^\nu \, exp\left(-A\sum_n E_n^2\right)$$

GOE $\nu = 1$

GUE $\nu = 2$

GSE $\nu = 4$

GDE $\nu = 0$

Distribución de probabilidad de los elementos de matriz:

GOE

$$p(H_{11}, ..., H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^2 \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp\left\{-A\sum_{n,m} H_{nm}^2\right\}$$

GUE

$$p(H_{11}, ..., H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^2 \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp\left\{-A\sum_{n,m} \left[(Re\, H)_{nm}^2 + (Im\ H)_{nm}^2\right]\right\}$$

Distribución de autovalores

$$P(E_1, ..., E_N) \propto \prod_{n>m} |E_n - E_m|^\nu \, exp\left(-A\sum_n E_n^2\right)$$

GOE $\nu = 1$

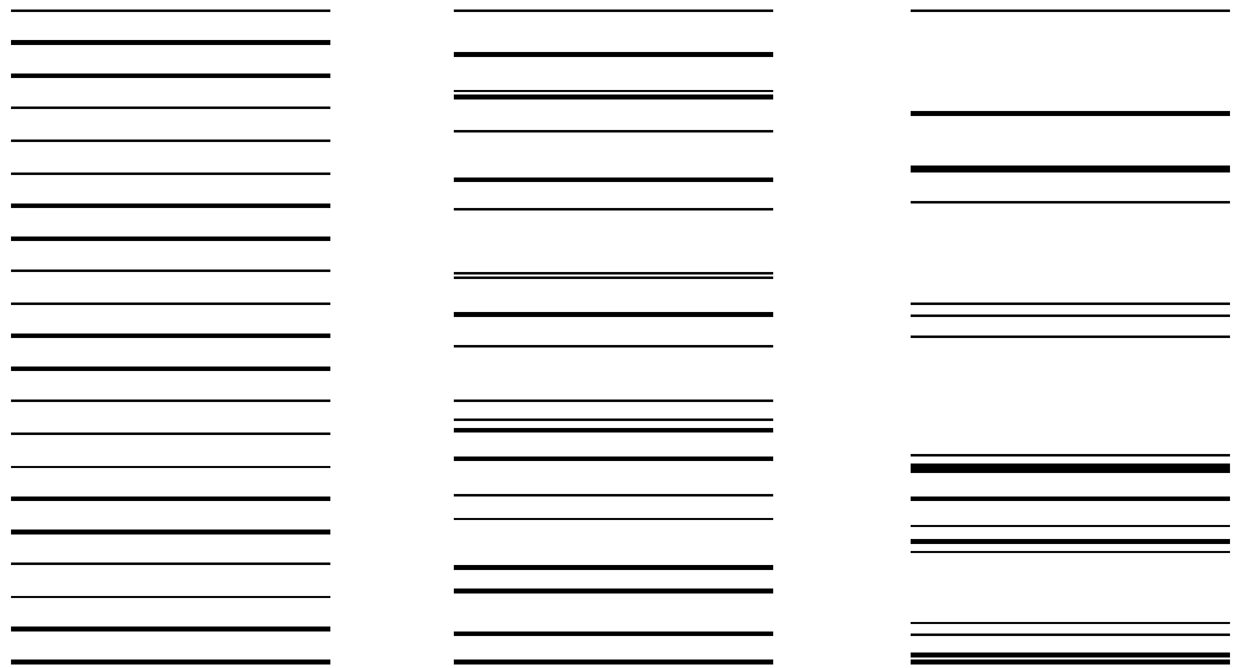
GUE $\nu = 2$

GSE $\nu = 4$

GDE $\nu = 0$

Repulsión de niveles

Teoría de matrices aleatorias



Equiespaciado GOE Poisson

Teoría de matrices aleatorias

Equiespaciado GOE Poisson

Caótico Integrable

Repulsión de niveles

- Cruces evitados

- Distribución de espaciamientos P(s)

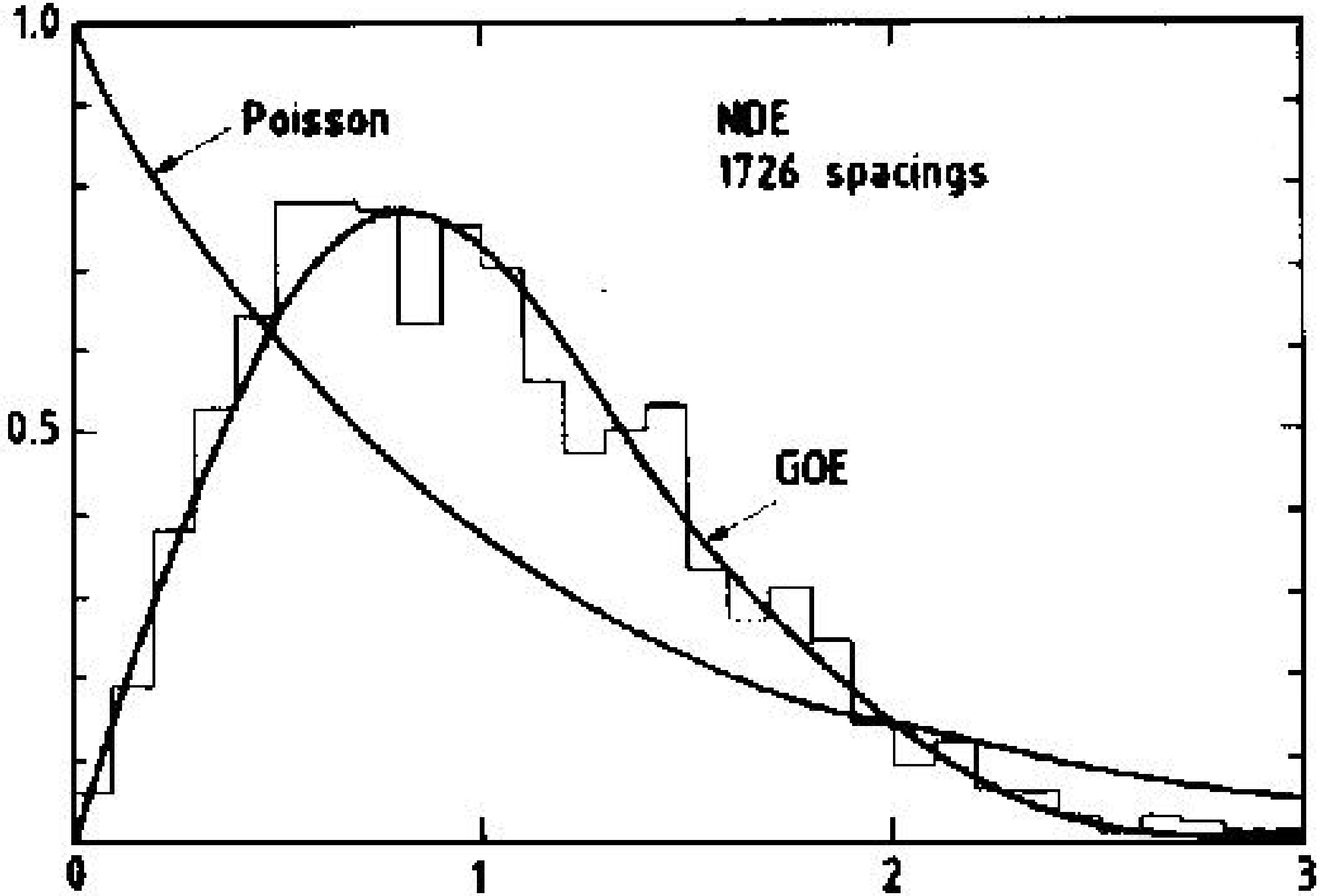
$$s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$$

- Fórmula de Wigner $$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp(-\frac{\pi}{4} s^2)$$

- Niveles no correlacionados (Poisson)

$$P(s) = \exp(-s)$$

Ejemplos de física nuclear



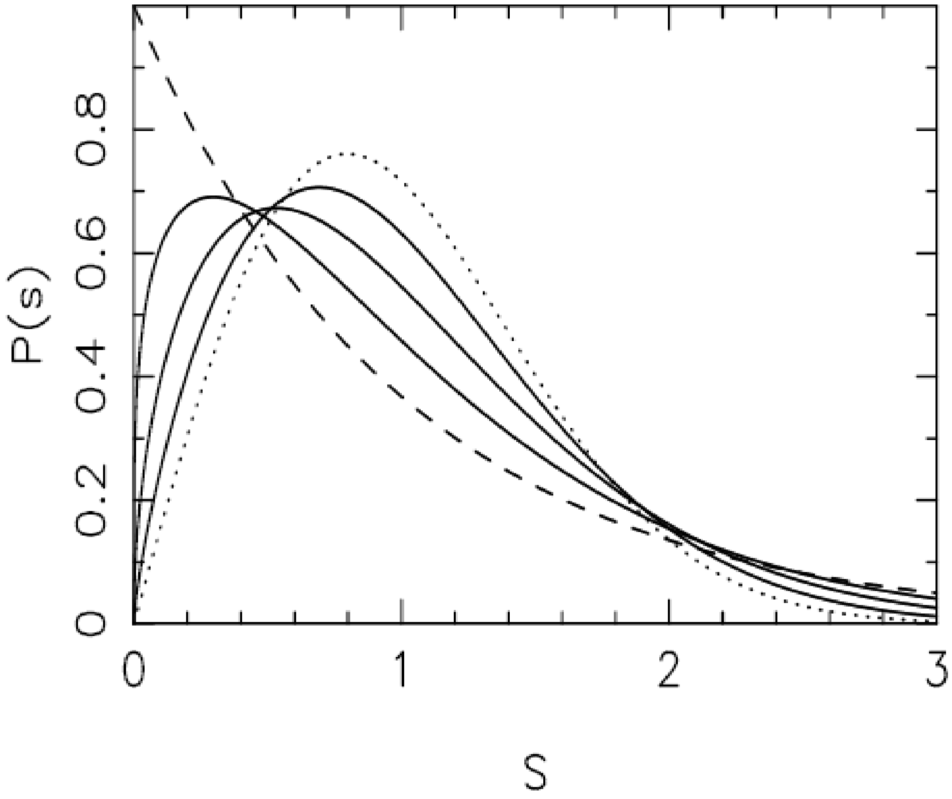
R. U. Haq, A. Pandey and O. Bohigas, Phys. Rev. Lett. 48,1086 (1982)

Estadística mezclada

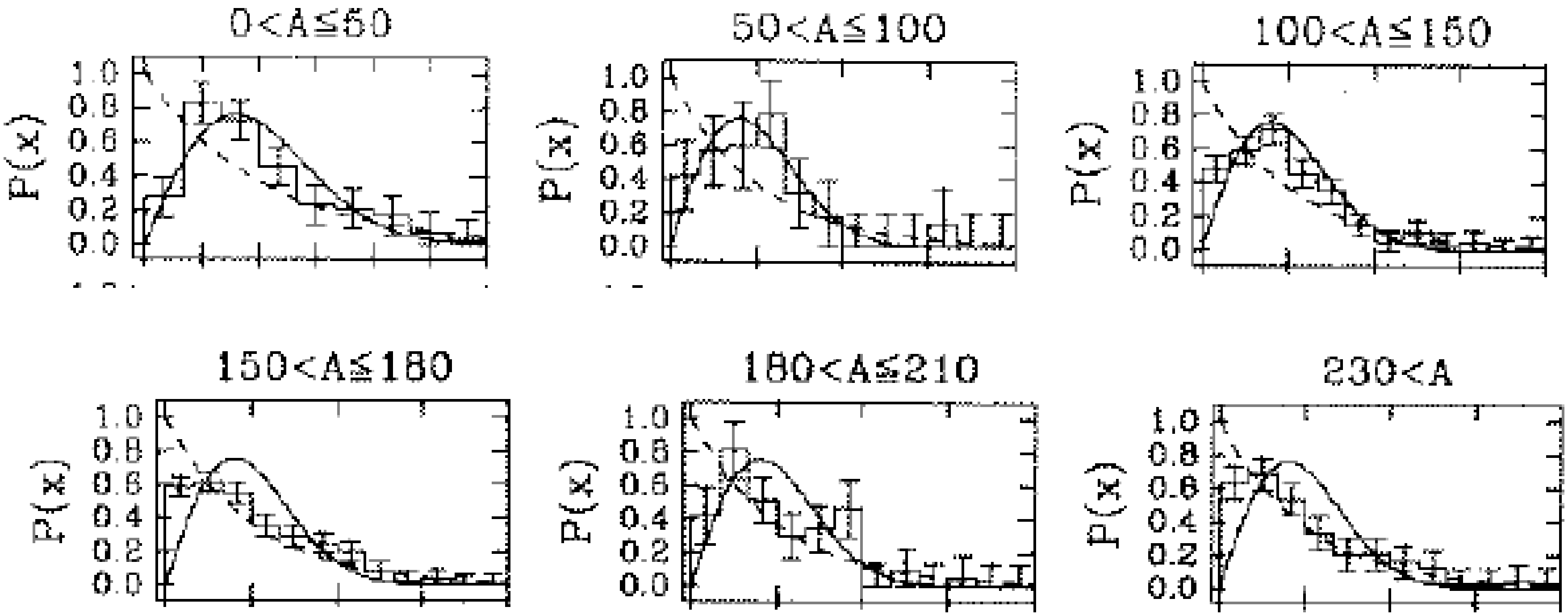
Fórmula de Brody

$$P(s,\omega) = \alpha(\omega+1)s^{\omega}\exp\left(-\alpha s^{\omega+1}\right)\ ,\ \alpha = \left(\Gamma\left[\frac{\omega+2}{\omega+1}\right]\right)^{\omega+1}$$

Interpola entre Poisson y GOE



T. A. Brody, Lett. Nuovo Cimento 7, 482 (1973)



J.F. Shriner, Jr., G.E. Mitchell and T. von Egidy, Z. Phys. A338 (1991) 309.

Correlaciones de largo alcance

Correlaciones de largo alcance

Variancia del número de niveles en un intervalo de longitud L

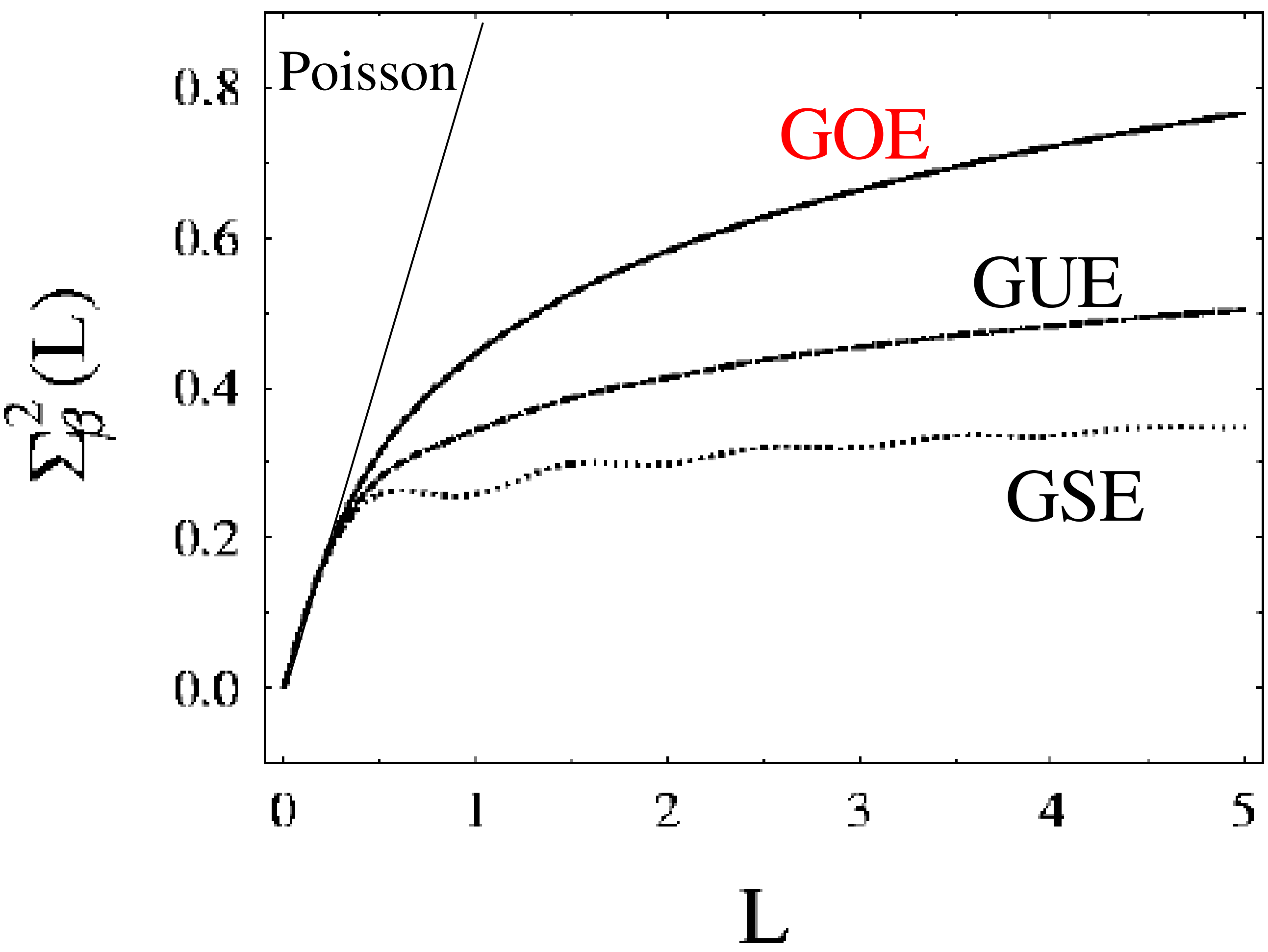
$$\Sigma^2(L) = \langle n(E,L)^2 \rangle - L^2$$

Rigidez espectral

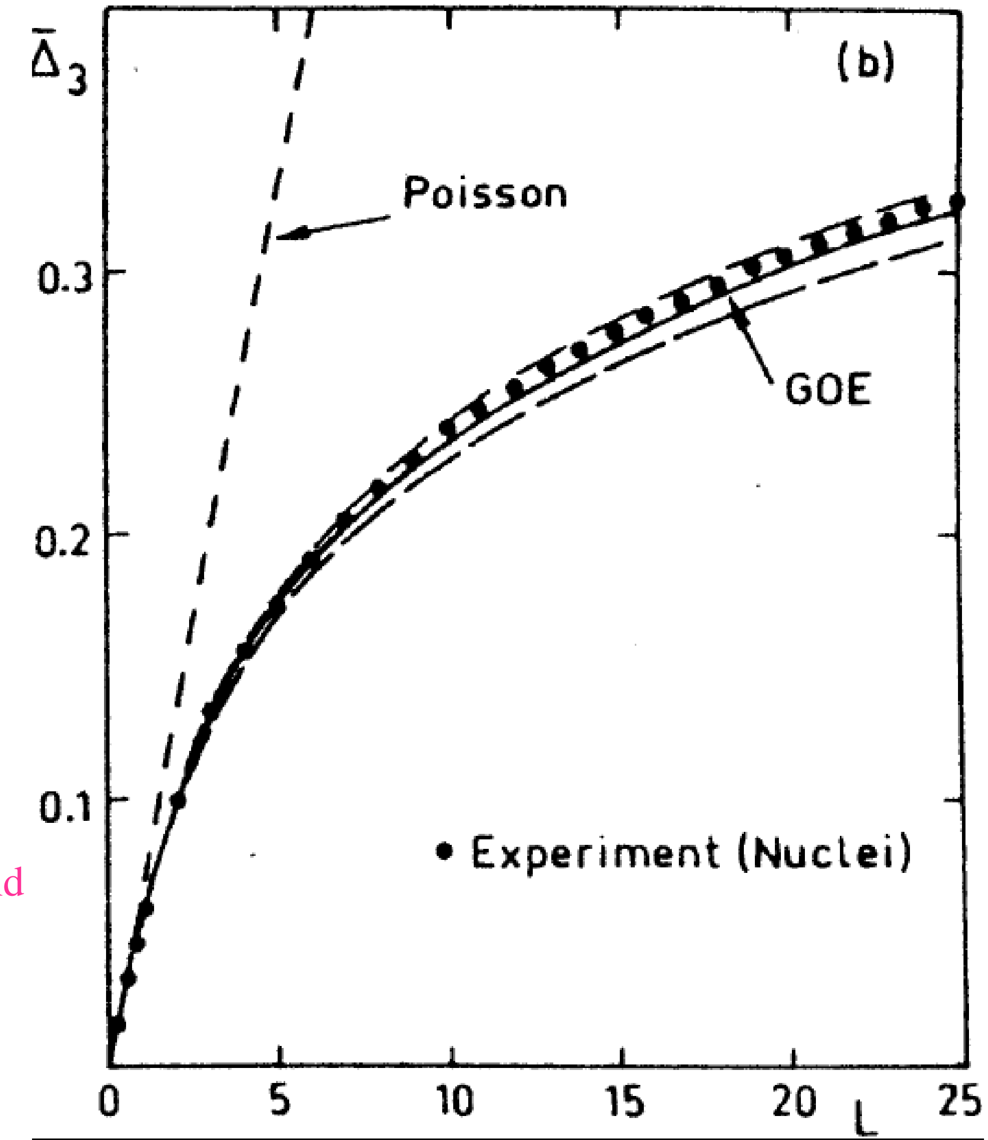
$$\Delta_3(L) = \left\langle \frac{1}{L} \min_{A,B} \int_{E-L/2}^{E+L/2} \left[\bar{N}(E) - AE - B\right]^2 dE \right\rangle$$

$$\Delta_3(L) = \frac{2}{L^4} \int_0^L (L^3 - 2L^2E + E^3)\Sigma^2(E)dE$$

Correlaciones de largo alcance

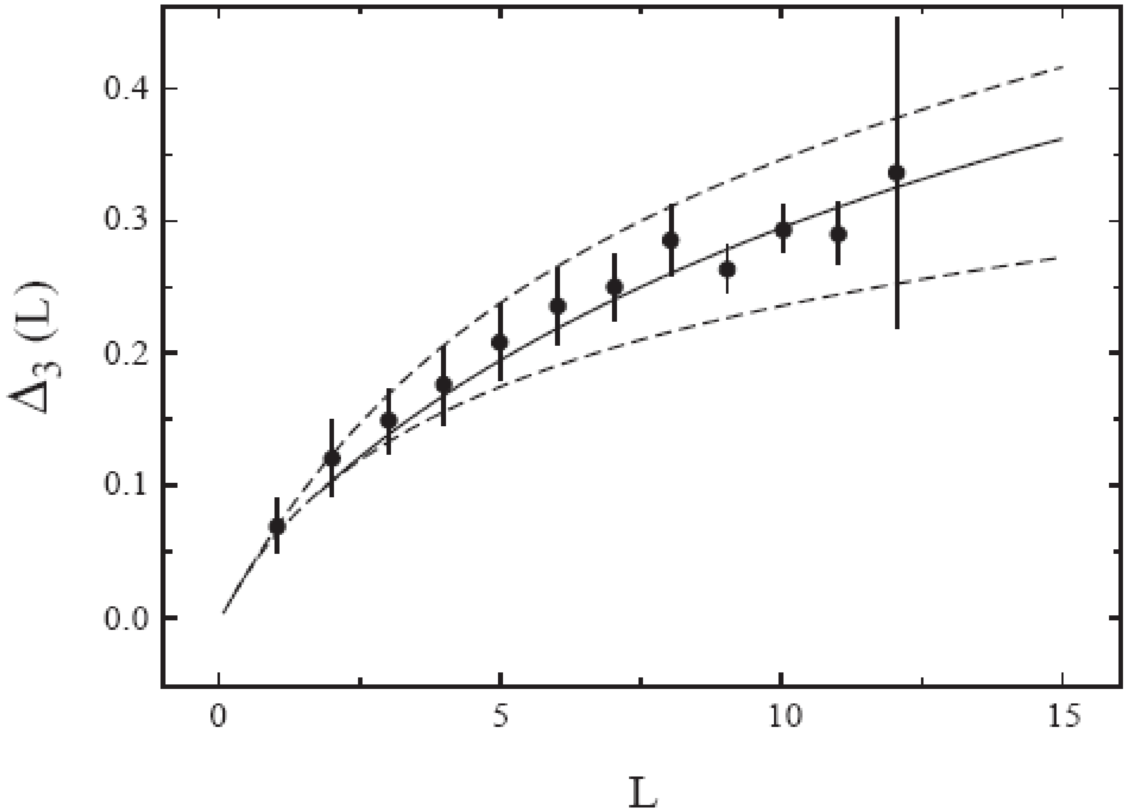


Nuevos ejemplos de física nuclear



R. U. Haq, A. Pandey and O. Bohigas, Phys. Rev. Lett. 48,1086 (1982)

^{26}Al



Transición entre GOE y una mezcla de dos GOEs
Podemos medir el grado de mezcla de las distintas componentes de isospin

T. Guhr and H.A. Weidenmüller, Ann. Phys. (NY) 199 (1990) 412.

Interacciones aleatorias a dos cuerpos: EGOE(2) (o TBRE)

- Descripción más realista. El Hamiltoniano es el mismo que en el modelo de capas pero con elementos de matriz aleatorios.

- Se puede demostrar numéricamente que las fluctuaciones espectrales son las mismas que para el GOE. No hay resultados analíticos.

Referencias

- M. L. Mehta, Random matrices, Academic Press, London (1991).
- T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, S. S. M. Wong, Rev. Mod. Phys. 53, 385 (1981).
- T. Guhr, A. Müller-Groeling,H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. 299, 189 (1998).

- http://nuclear.fis.ucm.es/research/thesis/armando_tesis.pdf
- http://nuclear.fis.ucm.es/research/thesis/rafa_tesis.pdf