Instituto de Estructura de la Materia
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

FLUCTUACIONES ESPECTRALES Y CAOS

Armando Relaño Pérez

5 de junio de 2007. Universidad Complutense de Madrid

OBJETIVOS:

☞ Profundizar en el estudio de las propiedades estadísticas de las fluctuaciones espectrales.

☞ Relacionarlas con el caos en mecánica cuántica.

$$\Downarrow$$

⋆Adquirir nociones básicas sobre este tema.

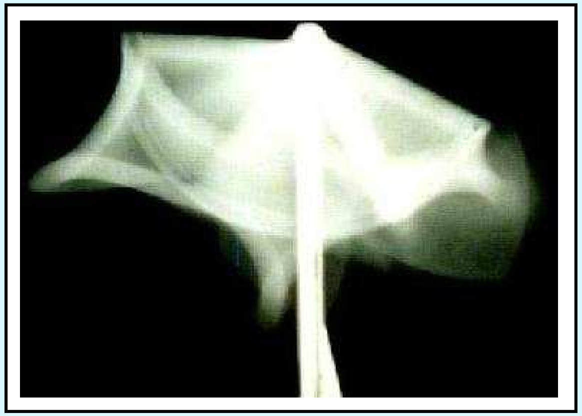
CONTENIDOS:

- ☞ Introducción al caos: caos en mecánica clásica.
- ☞ Definición cuántica del caos: fluctuaciones espectrales.
- ☞ Caos en física nuclear; algunas aplicaciones.

Introducción al Caos

El caos está presente en multitud de fenómenos cotidianos

- Trayectorias de gran complejidad ⟶



- Extrema sensibilidad a condiciones iniciales (efecto mariposa).
- Comportamiento impredecible.

El **mapa logístico** como ejemplo sencillo de sistema caótico:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n); \; r \in (1,4), \; x_n \in (0,1) \, \forall n$$

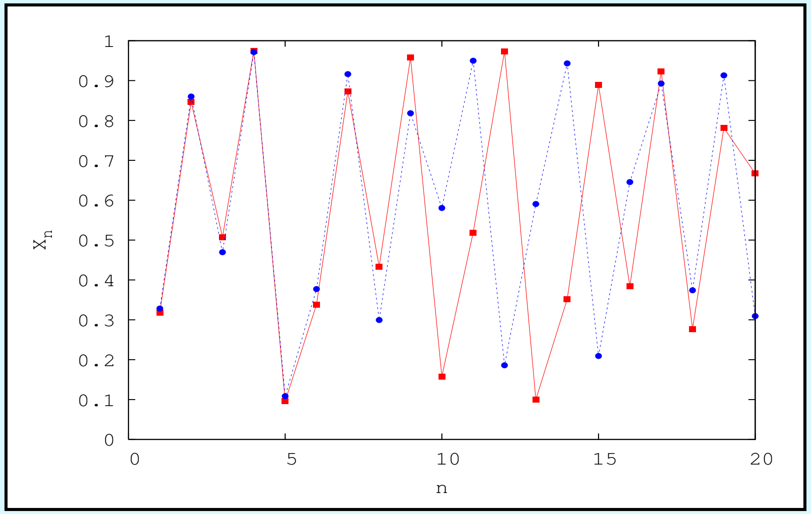
Si $3.57 < r < 4$, el sistema es caótico.

El **mapa logístico** como ejemplo sencillo de sistema caótico:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = r x_n (1 - x_n);\ r \in (1,4),\ x_n \in (0,1)\ \forall n}$$

Si $\mathbf{3.57} < \boldsymbol{r} < \mathbf{4}$, el sistema es caótico.

Ejemplo de trayectorias:

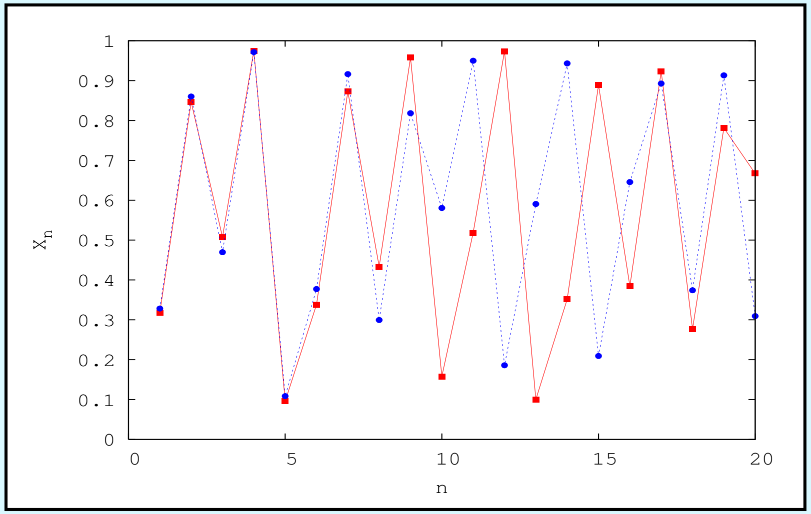


El **mapa logístico** como ejemplo sencillo de sistema caótico:

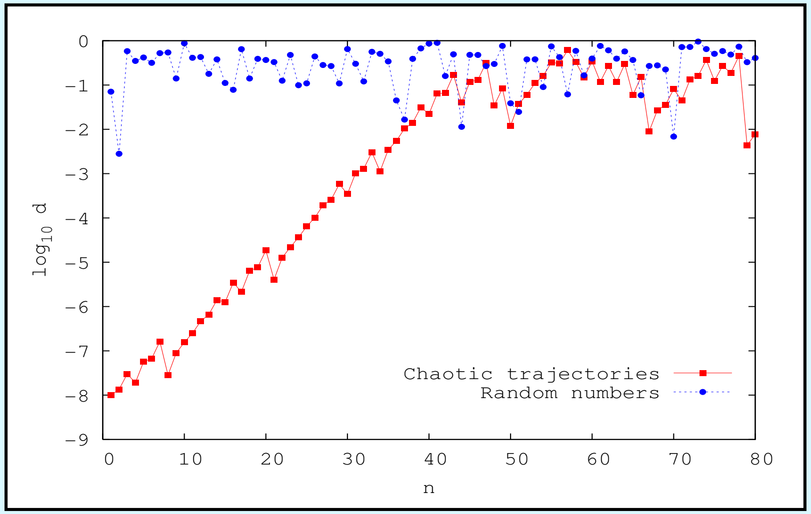
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n);\ r \in (1,4),\ x_n \in (0,1)\ \forall n$$

Si $3.57 < r < 4$, el sistema es caótico.

Ejemplo de trayectorias:



Evolución de la distancia:



Geometría del movimiento caótico

Un sistema **integrable** se comporta de forma sencilla y predecible. Sea un sistema de N grados de libertad:

$$\boldsymbol{H = H(q_1, q_2, \ldots, q_N; p_1, p_2, \ldots, p_N).}$$

Si existe una transformación canónica:

$$\boldsymbol{(q_1, q_2, \ldots, q_N; p_1, p_2, \ldots, p_N) \longrightarrow (I_1, I_2, \ldots, I_N; \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N),}$$

tal que

$$\boldsymbol{H = H(I_1, I_2, \ldots, I_N),}$$

el sistema es integrable y sus trayectorias son sencillas:

$$\boldsymbol{\frac{dI_j}{dt} = 0 \ \forall j; \ \frac{d\phi_j}{dt} = \omega_j(I_1, I_2, \ldots .I_N) \ \forall j.}$$

En el espacio de fases, las trayectorias están en un toro N-dimensional.

¿Caos en Mecánica Cuántica?

La **mecánica clásica** es una **aproximación** a la **mecánica cuántica**:

$$\text{Caos en Mecánica Clásica} \xrightarrow{?} \text{Caos en Mecánica Cuántica.}$$

¿Caos en Mecánica Cuántica?

La **mecánica clásica** es una **aproximación** a la **mecánica cuántica**:

Caos en Mecánica Clásica $\xrightarrow{?}$ Caos en Mecánica Cuántica.

La **estructura** de la mecánica cuántica es diferente a la de la mecánica clásica:

Mecánica Clásica	Mecánica Cuántica
$H(q_1, q_2, \ldots, q_N; p_1, p_2, \ldots, p_N)$	$H(q_1, q_2, \ldots, q_N; \hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_N)$
$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{dp_j}{dt}; \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{dq_j}{dt}$	$i\hbar \frac{d}{dt}\Psi(q_1, q_2, \ldots, q_N) = H\Psi(q_1, q_2, \ldots, q_N)$
Solución: $q_j(t)$	Solución: $\Psi(q_1, q_2, \ldots, q_N; t)$

Posibles definiciones del **caos** en **mecánica cuántica**:

$$\left.\begin{array}{l}\text{✐ La ecuación de Schrödinger} \\ \quad\text{no proporciona la trayectoria} \\ \text{✐ El principio de incertidumbre} \\ \quad\text{impide medir con precisión}\end{array}\right\} \not\rightarrow \text{Sensibilidad a condiciones iniciales}$$

$$\downarrow$$

$$\langle \boldsymbol{\Phi}(t_0) | \boldsymbol{\Psi}(t_0) \rangle = \langle \boldsymbol{\Phi}(t) | \boldsymbol{\Psi}(t) \rangle \;\; \forall t$$

Posibles definiciones del **caos** en **mecánica cuántica**:

- La ecuación de Schrödinger no proporciona la trayectoria
- El principio de incertidumbre impide medir con precisión

$\not\rightarrow$ Sensibilidad a condiciones iniciales

$\downarrow$

$$\langle \Phi(t_0) | \Psi(t_0) \rangle = \langle \Phi(t) | \Psi(t) \rangle \;\; \forall t$$

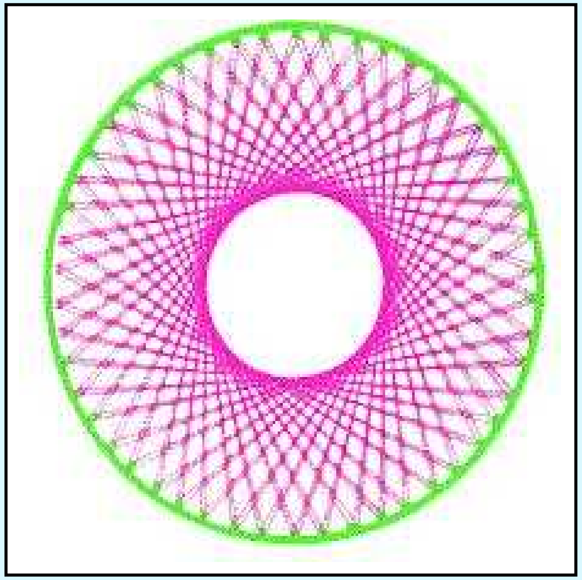
- La estructura matemática de la Mecánica Cuántica es diferente a la de la Mecánica Clásica

$\not\rightarrow$ Definición geométrica de integrabilidad

Estudio de la **mecánica cuántica** de sistemas **clásicamente caóticos**:

Estudio de la **mecánica cuántica** de sistemas **clásicamente caóticos**:

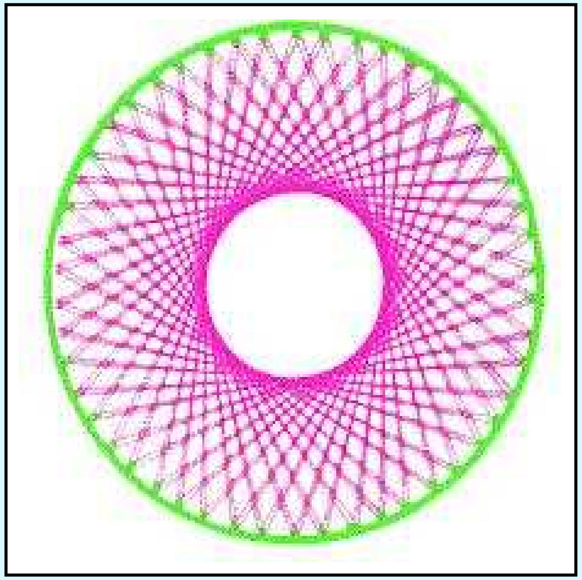
Sistema integrable:



(Billar Circular)

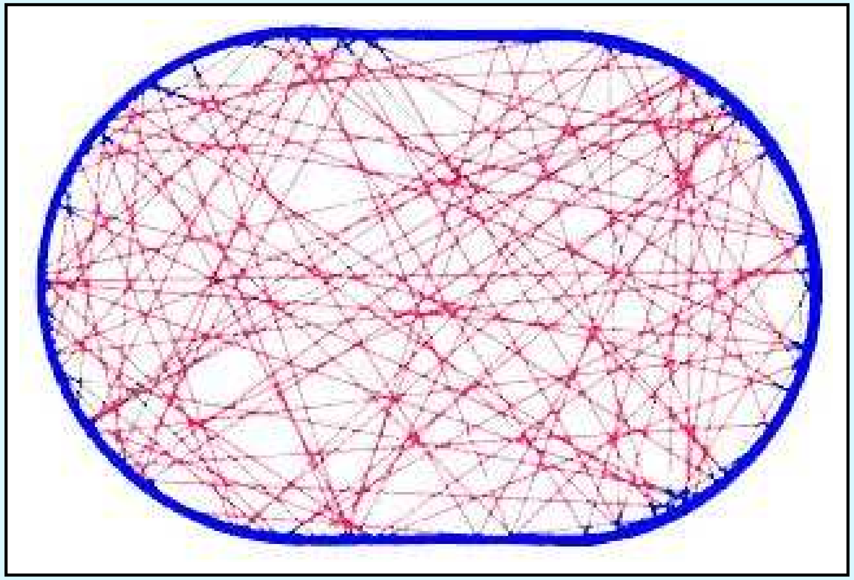
Estudio de la **mecánica cuántica** de sistemas **clásicamente caóticos**:

Sistema integrable:



(Billar Circular)

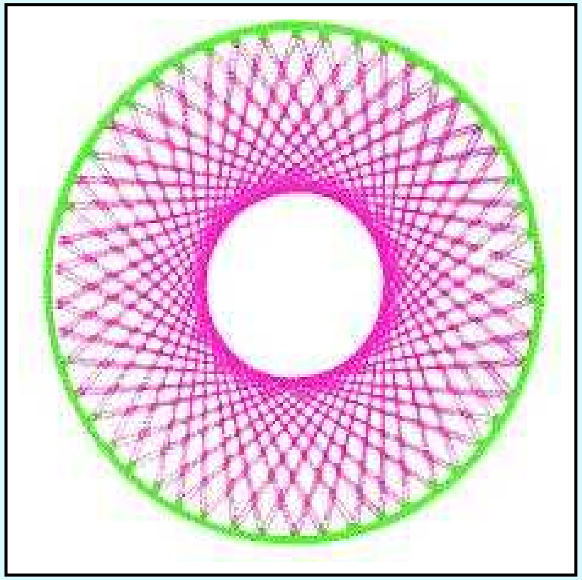
Sistema caótico:



(Billar Estadio)

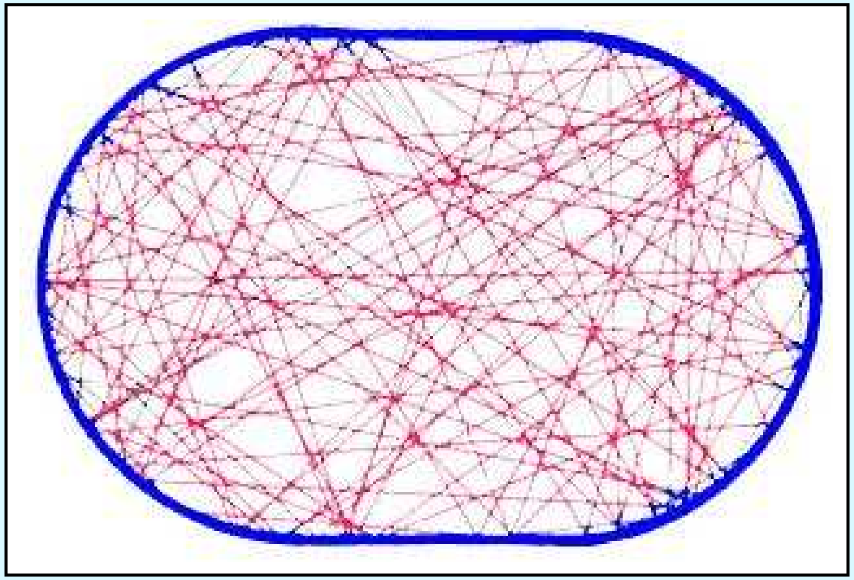
Estudio de la **mecánica cuántica** de sistemas **clásicamente caóticos**:

Sistema integrable:



(Billar Circular)

Sistema caótico:



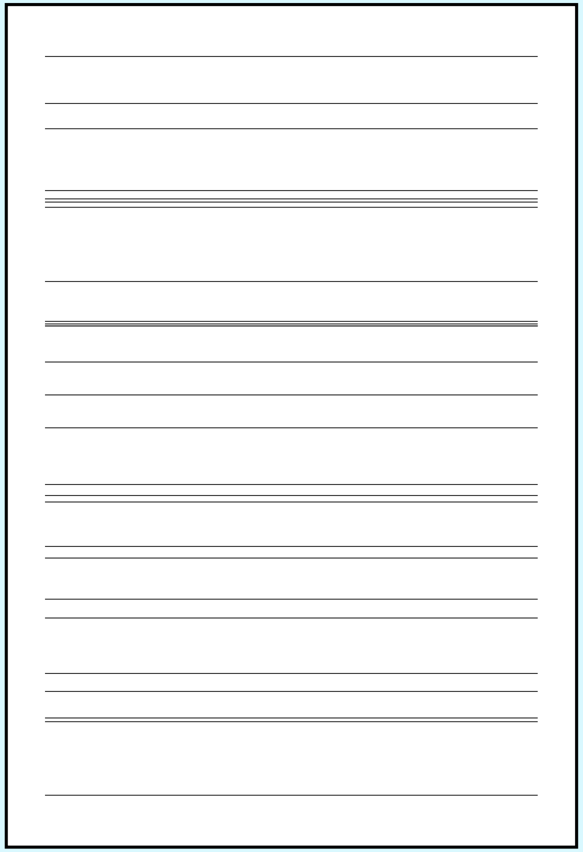
(Billar Estadio)

$$\Psi(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)\Psi(0)$$

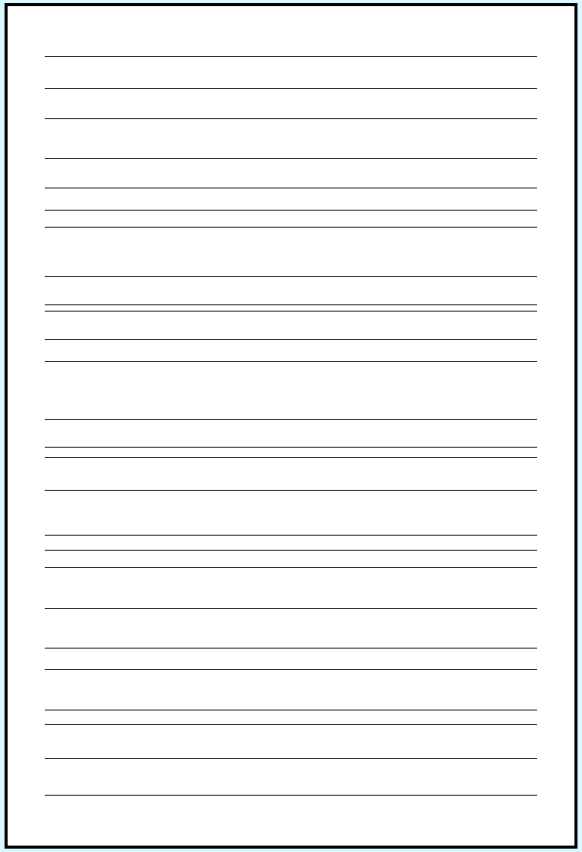
$$\Psi(0) = \sum_n C_n \Phi_n; \; H\Phi_n = E_n \Phi_n \longrightarrow \Psi(t) = \sum_n C_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)\Phi_n.$$

El espectro de energías

Sistema integrable: Sistema caótico:



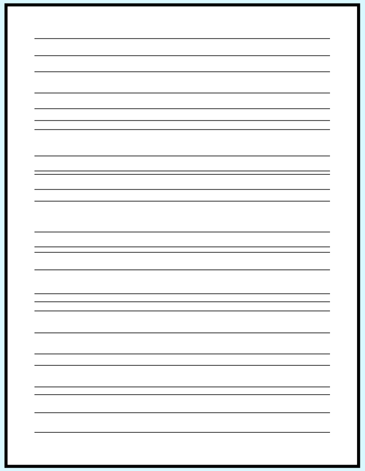
(Billar Rectangular)



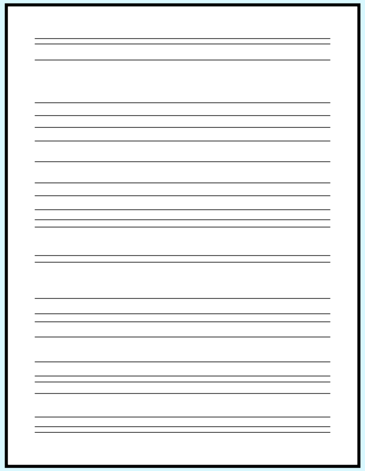
(Billar Estadio)

Comparación de los espectros anteriores con espectros modelo:

Caótico

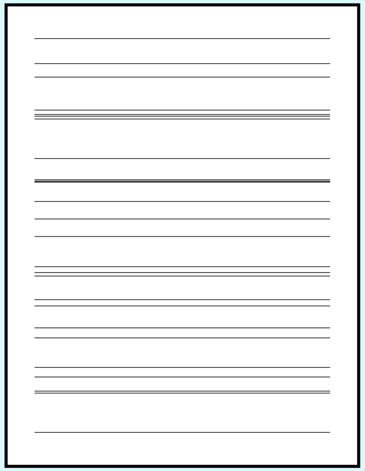


(Billar Estadio)

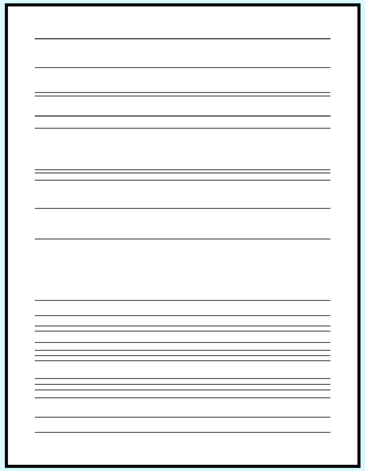


(G.O.E.)

Integrable



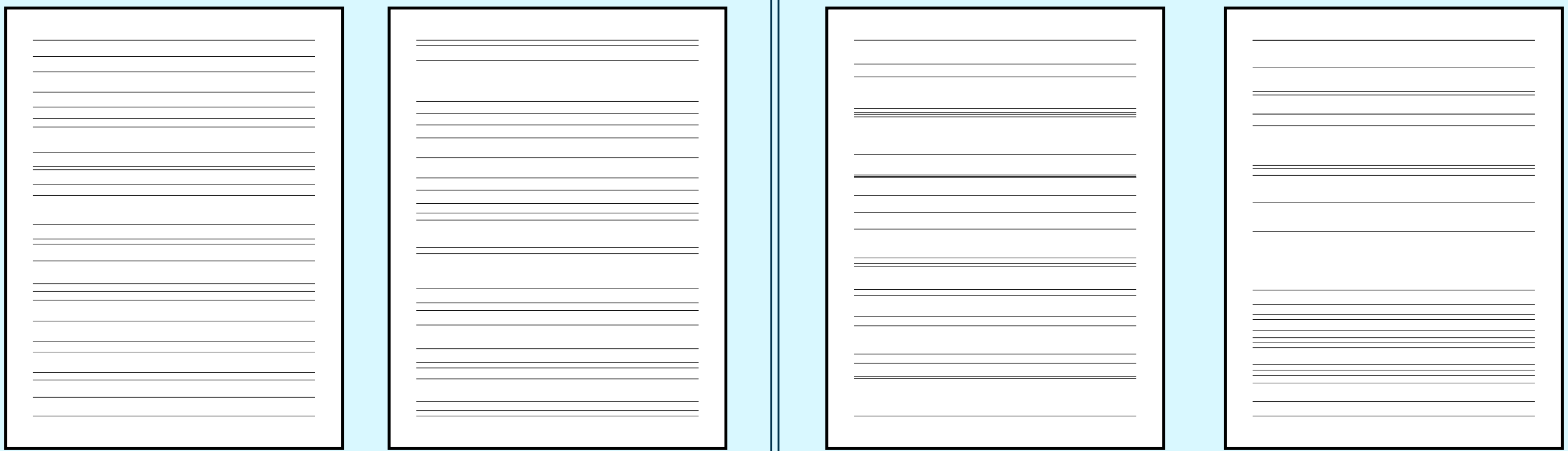
(Billar Rectangular)



(Secuencia aleatoria)

Comparación de los espectros anteriores con espectros modelo:

Caótico | Integrable

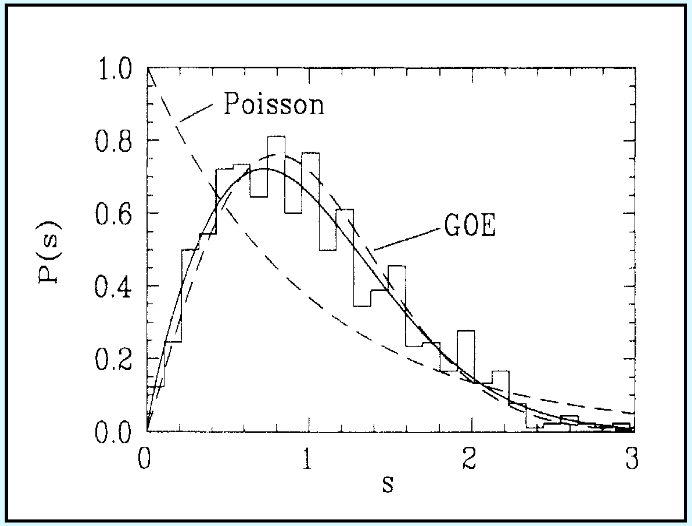


(Billar Estadio) (G.O.E.) (Billar Rectangular) (Secuencia aleatoria)

Las **propiedades estadísticas** de los espectros distinguen entre integrabilidad y caos.

Estadística espectral

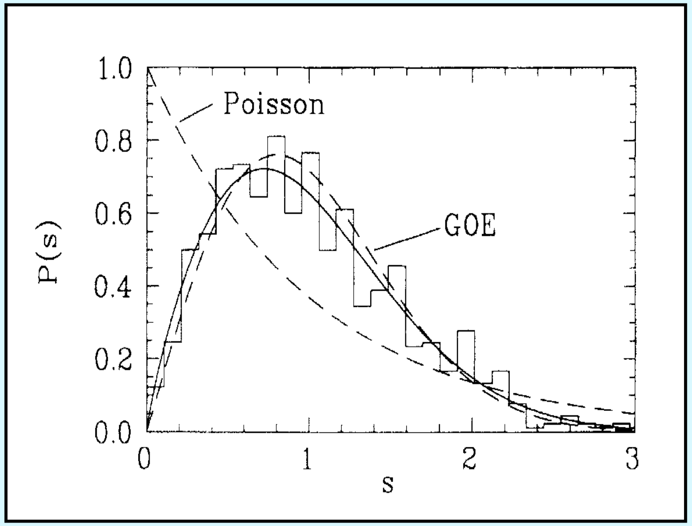
Billar Estadio:



$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$$

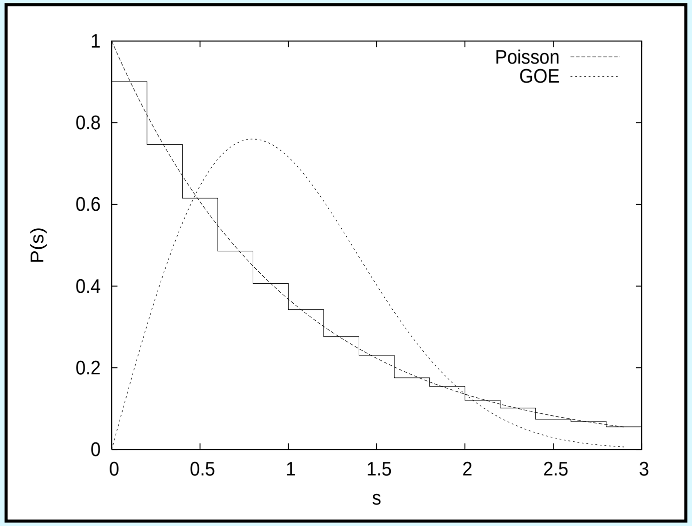
Estadística espectral

Billar Estadio:



$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$$

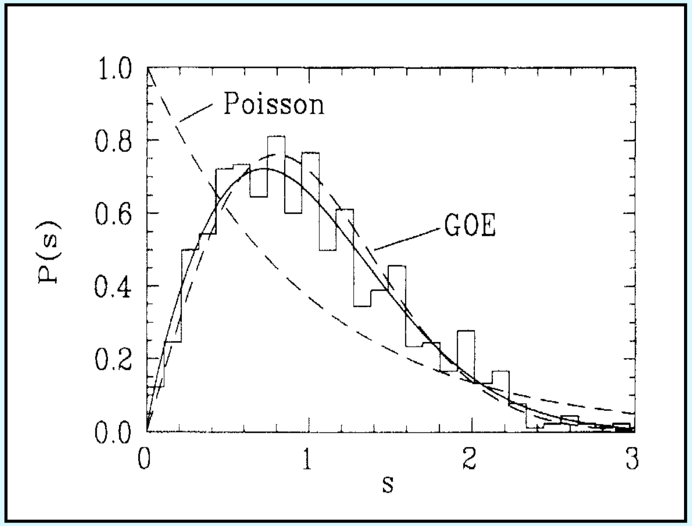
Billar Rectangular:



$$P(s) = \exp\left(-s\right)$$

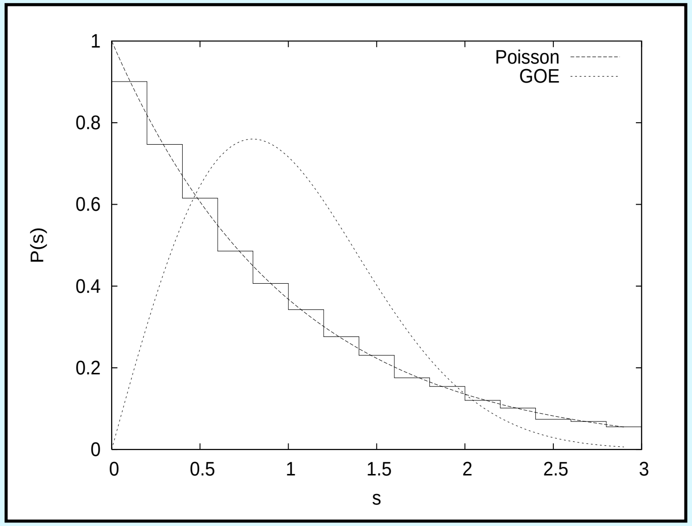
Estadística espectral

Billar Estadio:



$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$$

Billar Rectangular:



$$P(s) = \exp(-s)$$

- Matrices aleatorias $\longrightarrow$ Análogo clásico caótico.
- Secuencia aleatoria $\longrightarrow$ Análogo clásico integrable.

Caos en Física Nuclear

- Un núcleo es un sistema *complejo*, en el que intervienen muchas partículas.
- A alta energía, la estadística espectral de los núcleos se describe mediante matrices aleatorias.
- No existe un análogo clásico evidente.

Caos en Física Nuclear

- Un núcleo es un sistema *complejo*, en el que intervienen muchas partículas.
- A alta energía, la estadística espectral de los núcleos se describe mediante matrices aleatorias.
- No existe un análogo clásico evidente.

$$\Downarrow$$

¿Cómo se produce el **caos** en **física nuclear**?

Descripción genérica de un núcleo:

$$\boldsymbol{H = \sum_i \frac{\vec{p_i}^{\,2}}{2m} + \sum_{i,j} V(\vec{q_i}, \vec{q_j})}$$

Descripción genérica de un núcleo:

$$\boldsymbol{H = \sum_i \frac{\vec{p_i}^2}{2m} + \sum_{i,j} V(\vec{q_i}, \vec{q_j})}$$

Distinguimos dos términos: el **campo medio** y la **interacción residual**:

$$\boldsymbol{H} = \underbrace{\sum_i \left(\frac{\vec{p_i}^2}{2m} + U(\vec{q_i}) \right)}_{\substack{\text{Campo medio} \\ \boldsymbol{H_{MF}}}} + \underbrace{\sum_{i,j} \widetilde{V}(\vec{q_i}, \vec{q_j})}_{\substack{\text{Interacción residual} \\ \boldsymbol{H_{res}}}}$$

Descripción genérica de un núcleo:

$$\boldsymbol{H = \sum_i \frac{\vec{p_i}^{\,2}}{2m} + \sum_{i,j} V(\vec{q_i}, \vec{q_j})}$$

Distinguimos dos términos: el **campo medio** y la **interacción residual**:

$$\boldsymbol{H} = \underbrace{\sum_i \left(\frac{\vec{p_i}^{\,2}}{2m} + U(\vec{q_i}) \right)}_{\substack{\text{Campo medio} \\ \boldsymbol{H_{MF}}}} + \underbrace{\sum_{i,j} \widetilde{V}(\vec{q_i}, \vec{q_j})}_{\substack{\text{Interacción residual} \\ \boldsymbol{H_{res}}}}$$

$\boldsymbol{H_{MF}}$ constituye la descripción más sencilla y es suficiente para obtener algunos resultados, como la secuencia de números mágicos.

Formalismo de campo medio

- Resolvemos en primer lugar el Hamiltoniano de campo medio:

$$\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + U(\vec{q}) \right) |\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\alpha\rangle$$

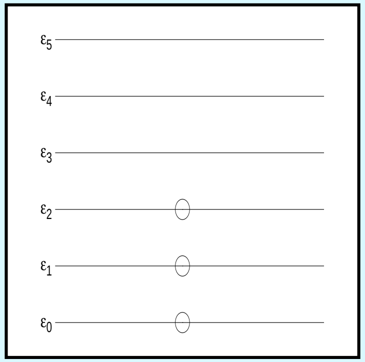
Formalismo de campo medio

- Resolvemos en primer lugar el Hamiltoniano de campo medio:

$$\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + U(\vec{q})\right)|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\alpha\rangle$$

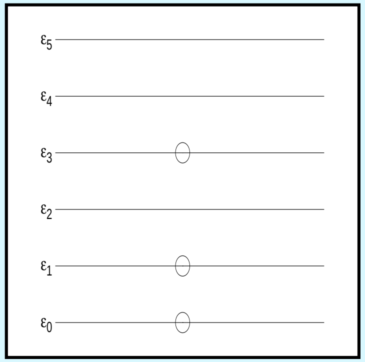
- Distribuimos los nucleones en el espectro de campo medio resultante:

$$H_{MF}|k\rangle = E_k |k\rangle$$



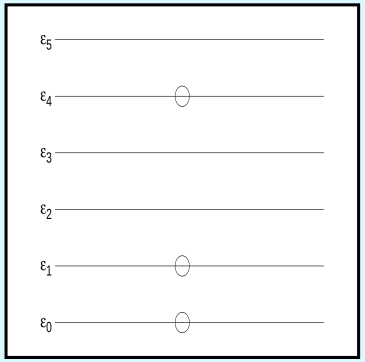
$|0\rangle$

$E_0 = \epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2$



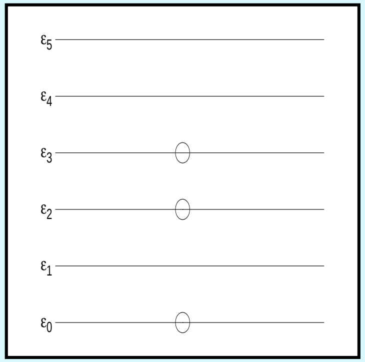
$|1\rangle$

$E_1 = \epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_3$



$|2\rangle$

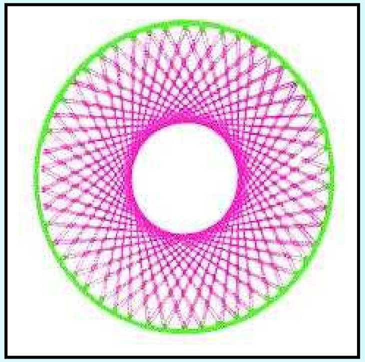
$E_2 = \epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_4$



$|3\rangle$

$E_3 = \epsilon_0 + \epsilon_2 + \epsilon_3$

El potencial $\boldsymbol{U(\vec{q})}$ puede ser **integrable** o **caótico**:

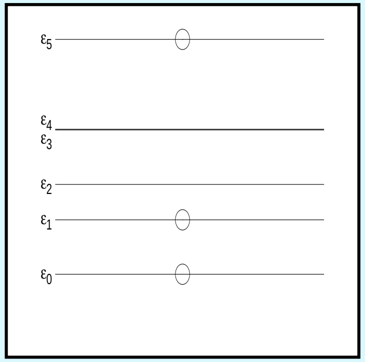


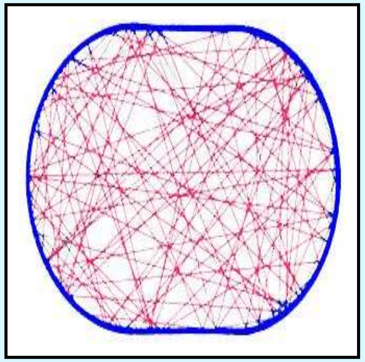
$\longrightarrow$

$\boldsymbol{U(\vec{q})}$ **integrable**

(Núcleo esférico)

$\longrightarrow$



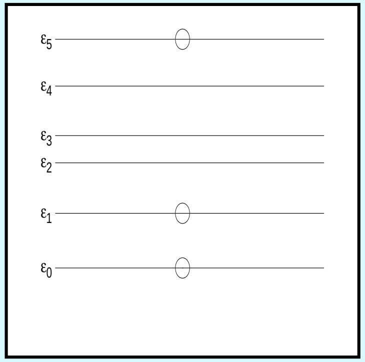


$\longrightarrow$

$\boldsymbol{U(\vec{q})}$ **caótico**

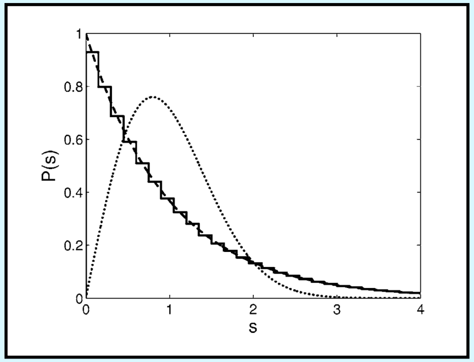
(Núcleo deformado)

$\longrightarrow$

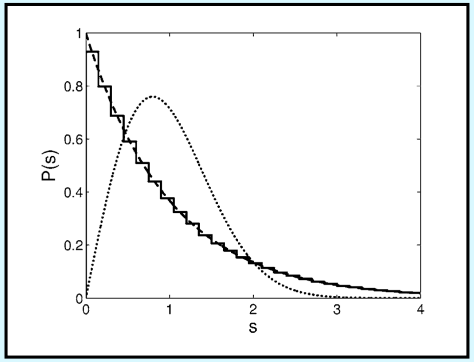


Estadística espectral en campo medio

$U(\vec{q})$ integrable $\longrightarrow$

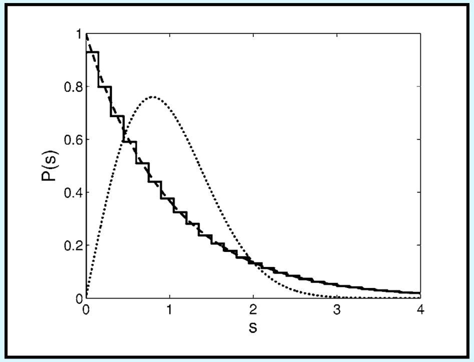


$U(\vec{q})$ caótico $\longrightarrow$

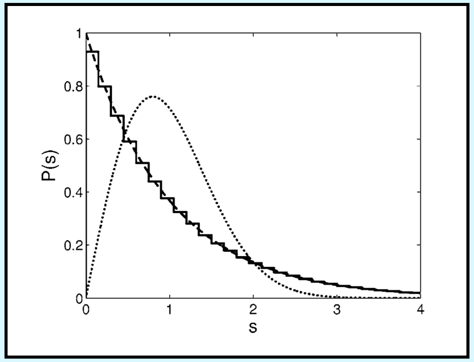


Estadística espectral en campo medio

$U(\vec{q})$ integrable $\longrightarrow$



$U(\vec{q})$ caótico $\longrightarrow$



☆ La dinámica del campo medio no explica el caos en física nuclear.

Interacción Residual frente a Campo medio

Objetivo: estudiar la complejidad y las rutas al caos en el espectro de los núcleos:

$$\boldsymbol{H} \left|\boldsymbol{\Psi_n}\right\rangle = (\boldsymbol{H_{MF}} + \boldsymbol{H_{res}}) \left|\boldsymbol{\Psi_n}\right\rangle = \boldsymbol{E_n} \left|\boldsymbol{\Psi_n}\right\rangle$$

- Tomamos el campo medio como punto de partida:

$$\boldsymbol{H_{MF}} \left|\boldsymbol{k}\right\rangle = \boldsymbol{E_k} \left|\boldsymbol{k}\right\rangle$$

- Desarrollamos cada autoestado $\left|\boldsymbol{\Psi_n}\right\rangle$ en la base del campo medio:

$$\left|\boldsymbol{\Psi_n}\right\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{C_k^{(n)}} \left|\boldsymbol{k}\right\rangle$$

- Los coeficientes $\boldsymbol{C_k^{(n)}}$ nos indican cuántas configuraciones de campo medio se mezclan en cada autoestado $\left|\boldsymbol{\Psi_n}\right\rangle$ del núcleo.

Buscamos una definición de la **complejidad** inducida por la interacción residual:

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \text{Si } C_k^{(n)} \approx 1 \text{ y } C_j^{(n)} \approx 0,\ \forall j \neq k & \text{Si } C_k^{(n)} \neq 0,\ \forall k \\ \downarrow & \downarrow \\ |\Psi_n\rangle \approx |k\rangle & |\Psi_n\rangle \not\approx |k\rangle\ ,\ \forall k \\ \downarrow & \downarrow \\ \Psi_n \text{ simple} & \Psi_n \text{ complejo} \end{array}}$$

Medida de la **complejidad** en función de los coeficientes $C_k^{(n)}$

Entropía de la información

De forma análoga a en termodinámica o en teoría de la información, definimos la **entropía** de un autoestado $|\Psi_n\rangle$:

$$S^{(n)} = -\sum_k \left| C_k^{(n)} \right|^2 \log \left(\left| C_k^{(n)} \right|^2 \right)$$

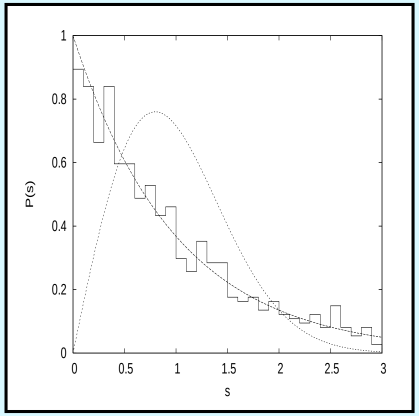
- Un espectro completo queda caracterizado por el valor medio de esta entropía:

$$S \equiv \left\langle S^{(n)} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S^{(n)}$$

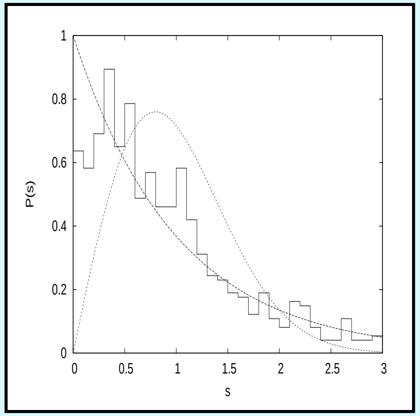
- Sus valores de referencia son:

Integrable	$\longrightarrow$	Domina el **campo medio**	$\longrightarrow$	$S = 0$
Caótico	$\longrightarrow$	Domina la **interacción residual**	$\longrightarrow$	$S = \log(0.48N)$

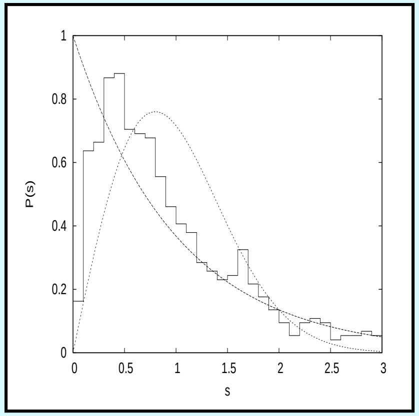
Estadística espectral y entropía de la información



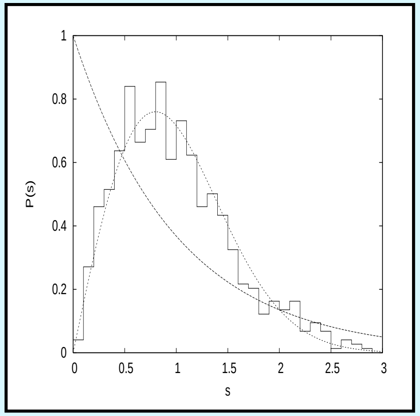
$S = 0.00$



$S = 0.34$



$S = 1.42$



$S = 3.76$

Aplicaciones

- ☞ Física **experimental**: detección de niveles perdidos y simetrías mezcladas en experimentos.
- ☞ Física **teórica**: influencia del caos en ciertas propiedades nucleares, como la masa.