

Reacciones Nucleares y Teoría Cuántica de la Dispersión

J Gómez-Camacho
Departamento de FAMN, Universidad de Sevilla

12 de enero de 2007

Índice

1. Teoría clásica de la dispersión	3
1.1. La función de deflexión	4
1.2. La sección eficaz diferencial	4
1.3. El arco iris nuclear	5
2. Teoría cuántica de la dispersión	7
2.1. Desarrollo en ondas parciales	7
2.2. Condiciones de contorno	7
2.3. Amplitudes de dispersión	9
3. Potenciales de transición	11
3.1. Potenciales Coulombianos	12
3.2. Potenciales en el modelo colectivo	13
4. Teoría semiclásica de la dispersión inelástica	15
4.1. Aproximaciones fundamentales para una teoría semiclásica	15
4.2. Desarrollo de la aproximación semiclásica	16
4.3. Primer orden de perturbación	17
4.4. Excitación Coulombiana	17
5. Aproximaciones de Born de onda plana (PWBA) y onda distorsionada (DWBA)	20
5.1. Expresión integral de la ecuación de Schrödinger	20
5.1.1. Aproximación PWBA	20
5.1.2. Aproximación DWBA	21
5.2. Dispersión inelástica en DWBA	22
5.3. Transferencia	23
6. Tratamiento cuántico de la dispersión con grados de libertad internos	26
6.1. Ecuaciones de canales acoplados	26
6.2. Condiciones de contorno	27
6.3. Amplitudes de dispersión	29

1. Teoría clásica de la dispersión

Consideremos dos partículas que interactúan por un potencial central $U(r)$, que depende de la separación entre ambas. m es la masa reducida. El momento angular relativo \vec{L} de ambas partículas se conserva, ya que $U(r)$ es central. La energía de las partículas en el sistema centro de masas E , también se conserva. Entonces la trayectoria $\vec{r}(t)$ que caracteriza el movimiento de las partículas está confinada a un plano, perpendicular a \vec{L} . La trayectoria puede caracterizarse, en coordenadas polares, por las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$, y viene caracterizada por las ecuaciones:

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad (1)$$

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

La energía E se conserva, y viene dado por su valor inicial $E = 1/2mv_0^2$. El momento angular también se conserva y vale $L = -mv_0b$, donde b es el parámetro de impacto de la colisión.

La resolución de las ecuaciones 1,2, con las condiciones de contorno adecuadas, nos permite obtener la trayectoria. No obstante, la magnitud que más nos interesa es el ángulo de dispersión, que será función del parámetro b . Despejando de (1), se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \pm v_0 \sqrt{1 - \frac{U(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}} \quad (3)$$

Nótese que el valor de r disminuye desde $t = -\infty$ hasta un instante T en el cual $r_T = r(T)$ cumple que $E = U(r_T) + L^2/(2mr_T^2)$. A partir de esta distancia, r vuelve a aumentar. La distancia r_T se llama punto de retorno, o "Turning Point", y corresponde a la distancia de máxima aproximación. En la expresión (3), el signo negativo corresponde a $t < T$ y el signo positivo a $t > T$.

Si despejamos ahora de la ecuación 2, se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{bv_0}{r(t)^2} \quad (4)$$

Integrando esta ecuación, se tiene

$$\theta(t = \infty) - \theta(t = -\infty) = -\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{bv_0}{r(t)^2} = -2 \int_T^{\infty} dt \frac{bv_0}{r(t)^2} \quad (5)$$

donde hemos utilizado la simetría de la trayectoria en torno a $t = T$. Si ahora realizamos un cambio de variable utilizando como variable de integración r , llamando

$\theta(b) = \theta(t = \infty)$, y tomando $\pi = \theta(t = -\infty)$, obtenemos la ecuación

$$\theta(b) = \pi - 2 \int_{r_T}^{\infty} \frac{bdr}{r^2} \left(1 - \frac{U(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (6)$$

Puede comprobarse que, en esta ecuación, cuando no hay interacción ($U(r) = 0$), entonces $r_T = b$ y la integral da $\theta(b) = 0$. Del mismo modo, cuando existe interacción, pero ésta es de corto alcance, ocurre que para valores del parámetro de impacto b tales que $U(r) = 0, r \geq b$, también se cumple que $r_T = b$ y $\theta(b) = 0$.

Vemos que, para una energía y un parámetro de impacto determinados, el ángulo de desviación de la trayectoria depende de los valores del potencial para distancias iguales o superiores a r_T .

1.1. La función de deflexión

La función de deflexión es, por definición, el ángulo de desviación de la trayectoria como función del parámetro de impacto, para una energía determinada $\theta(b)$. La función de deflexión contiene, en mecánica clásica, toda la información que puede obtenerse del proceso de dispersión, en las situaciones en las que uno solamente puede conocer el comportamiento asintótico de la trayectoria, a distancias en las que $U(r)$ se anula.

La función de deflexión tiene las propiedades siguientes:

- Cuando b es superior al alcance de la interacción, $\theta(b) \rightarrow 0$.
- Para potenciales atractivos, $\theta(b) < 0$.
- Para potenciales repulsivos, $\theta(b) > 0$.
- Conforme aumenta la energía, $\theta(b)$ se hace más pequeño.
- A cada parámetro de impacto le corresponde un ángulo de dispersión, pero no necesariamente al contrario.

1.2. La sección eficaz diferencial

Consideramos ahora la situación en la que ni siquiera podemos fijar, a priori, el parámetro de impacto de la colisión. Tenemos un haz de partículas, todas en la misma dirección, que colisionan con un blanco. Nos interesa determinar el número de partículas que saldrán desviadas con un ángulo de dispersión entre θ y $\theta + d\theta$, y con un ángulo azimutal entre ϕ y $\phi + d\phi$. Estas partículas corresponden precisamente a aquellas que, antes de la dispersión, tenían un parámetro de impacto entre b y $b + db$, donde $\theta = \theta(b)$, y $d\theta = \frac{d\theta(b)}{db} db$. Como la interacción es central, el ángulo azimutal es el mismo antes y después de la colisión.

Por definición de la sección eficaz para cualquier proceso, la sección eficaz es $\sigma = N/\Phi N_B$, donde N es el número de partículas dispersadas en las condiciones requeridas por unidad de tiempo, Φ es el flujo de partículas incidentes y N_B es el número de partículas del blanco.

En nuestro caso, consideramos las partículas emitidas entre θ y $\theta + d\theta$, y entre ϕ y $\phi + d\phi$. Este número se hace más pequeño conforme $d\theta$ y $d\phi$ se hacen más pequeños, y por tanto es un diferencial, dN . Lo mismo ocurre para la sección eficaz, que es una sección eficaz diferencial $d\sigma = dN/\Phi N_B$. El número de partículas en el blanco es $N_B = 1$. El número de partículas dN coincide con las partículas que están, antes de la dispersión, entre b y $b + db$ y entre ϕ y $\phi + d\phi$, por unidad de tiempo. Estas partículas son, simplemente, el producto del flujo Φ por el área definida por las condiciones del parámetro b .

$$dN = \Phi b db d\phi = \Phi b \frac{db}{d\theta} d\theta d\phi \quad (7)$$

Por otro lado, el ángulo sólido diferencial se define como $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. Por tanto, se obtiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega\Phi} = \frac{b(\theta) db}{\sin\theta d\theta} \quad (8)$$

Nótese que la función $b(\theta)$, que es la inversa de la función de deflexión, puede ser multivaluada. Además, los valores de θ positivos y negativos no pueden distinguirse experimentalmente. Lo mismo ocurre para los valores de θ que difieran en $n \times 2\pi$. Esto corresponde a trayectorias en las que se da un número n de vueltas antes de salir. La contribución de todas estas trayectorias, con distinto parámetro de impacto pero con el mismo ángulo de desviación, deben sumarse, con lo que se obtiene, en general,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_i \frac{b_i(\theta) db_i}{\sin\theta d\theta} \quad (9)$$

1.3. El arco iris nuclear

En las colisiones de los núcleos atómicos, la interacción es la suma de un potencial nuclear (atractivo) y un potencial coulombiano (repulsivo). En estas condiciones, la función de deflexión aumenta conforme b disminuye, tiene un máximo para un cierto parámetro de impacto, b_R , que corresponde a un ángulo θ_R , y luego disminuye para valores inferiores de b . En este caso, la sección eficaz diferencial tiene una divergencia para $\theta = \theta_R$, y se anula para $\theta > \theta_R$, a no ser que haya otra rama de valores de b correspondiente a valores de $\theta > \theta_R$.

Este fenómeno es análogo al que se produce por la refracción de la luz en gotas de lluvia.

Problema 1: Calcular la trayectoria, función de deflexión y sección eficaz diferencial para una partícula que interactúa con otra mediante un potencial de esfera dura:

$$V(r) = 0, r > R; \quad V(r) \rightarrow +\infty, r \leq R$$

Problema 2: Calcular la trayectoria, función de deflexión y sección eficaz diferencial para una partícula de carga z que interactúa con otra de carga Z mediante un potencial coulombiano:

$$V(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Demostrar la expresión

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a_0^2}{4 \sin^4(\theta/2)} \quad (10)$$

donde $a_0 = Zze^2/8\pi\epsilon_0 E$ es la mitad de la distancia de máxima aproximación.

2. Teoría cuántica de la dispersión

Vamos a realizar un tratamiento puramente cuántico para describir la dispersión de partículas sin estructura por un potencial $U(r)$.

2.1. Desarrollo en ondas parciales

Partimos del hamiltoniano completo del sistema

$$H = T(\vec{r}) + U(r) \quad (11)$$

Sea $\Psi(\vec{r})$ una de las posibles soluciones de la ecuación de Schrödinger $(H-E)\Psi(\vec{r}) = 0$. Esta función puede desarrollarse en un conjunto completo de funciones de la dirección \hat{r} . Estas funciones, denominadas funciones de onda son los armónicos esféricos $Y_{LN}(\hat{r})$.

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{LN} C^{LN} \frac{f^L(r)}{r} Y_{LN}(\hat{r}) \quad (12)$$

Las funciones $f^L(r)$ se denominan funciones de onda radiales. Una vez obtenidas estas funciones, el problema de la dispersión queda completamente resuelto.

Vamos a discutir la acción sobre este desarrollo de los términos del hamiltoniano. El término de energía cinética puede expresarse como

$$T(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2}{2mr^2} L^2(\hat{r}) \quad (13)$$

El primer término es la energía cinética radial. Este término no afecta a los armónicos esféricos, pero modifica las funciones radiales, sobre los que actúa haciéndoles la segunda derivada. El segundo término es el término centrífugo. Cuando actúa sobre los armónicos esféricos con momento angular orbital L bien definido, produce un factor $\hbar^2 L(L+1)/2mr^2$.

El potencial $U(r)$ simplemente multiplica a la función de onda radial, y no modifica los armónicos esféricos, ya que es central y no depende de la dirección. Uniendo estos resultados, obtenemos que la ecuación que satisfacen las funciones de onda radiales es la siguiente

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + U(r) - E \right) f^L(r) = 0 \quad (14)$$

Este es una ecuación diferencial de segundo orden.

2.2. Condiciones de contorno

No basta conocer las ecuaciones diferenciales para determinar las funciones $f^L(r)$. Es necesario considerar las condiciones de contorno.

La función de onda completa debe ser regular en el origen. Eso implica que las funciones $f^L(r)$ se anulan en el origen. Buscamos, por tanto, soluciones “regulares” en el origen. Estas soluciones pueden obtenerse, por ejemplo, partiendo de que $f^L(0) = 0$, $df^L(r)/dr|_{r=0} = c$, donde c es una constante arbitraria. Partiendo de estas condiciones iniciales, e integrando las ecuaciones, podemos tener soluciones $f_c^L(r)$, que dependerán linealmente de la constante arbitraria c .

Nos interesa el comportamiento asintótico de la función de onda. A distancias grandes comparadas con el rango de los potenciales, las ecuaciones se desacoplan y resultan:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + -E \right) f^L(r) = 0 \quad (15)$$

Una solución general de esta ecuación puede expresarse como una combinación de soluciones entrantes $I_L(r)$ y salientes $O_L(r)$,

$$I_L(r) = (kr)h_L^*(kr)/\sqrt{v} \quad (16)$$

$$O_L(r) = (kr)h_L(kr)/\sqrt{v} \quad (17)$$

donde la función $h_L(x)$ es la función de Hankel. k es el momento, dado por $\hbar^2 k^2 / 2m = E$ y v es la velocidad, dada por $v = \hbar k / m$. La función $I_L(r)$ se comporta, para r grande, como $\exp(-ikr)$, y representa una onda esférica que se mueve hacia el origen (onda entrante). La función $O_L(r)$ se comporta, para r grande, como $\exp(ikr)$, y representa una onda esférica que se mueve hacia fuera (onda saliente).

En general, la función $f^J(r)$ se expresará, para valores de r grande, como

$$f_c^L(r) = c(A^L I_L(r) - B^L O_L(r)) \quad (18)$$

Tomando el valor $c = 1/A^L$, se tiene

$$f^L(r) = I_L(r) - S^L O_L(r) \quad (19)$$

donde la matriz de dispersión o matriz S cumple $S^L = B^L/A^L$. Nótese que en este caso, la “matriz” S tiene un único elemento. Es una “matriz” 1×1 . El término matriz S se utiliza por consistencia por el caso en el que hay dispersión inelásticos, que veremos más tarde.

El significado de la matriz S es el siguiente. Supongamos que en un tiempo determinado, caracterizamos la función de onda como un paquete de ondas entrantes, localizados fuera de la zona de interacción con los números cuánticos L, N , que se mueve hacia la zona de interacción. Entonces, cuando el paquete de ondas llega a la zona de interacción, por efecto de la interacción hay cambios en la función de onda radial de manera que, tras la interacción se tendrá una onda saliente con los números cuánticos L, N , cuya amplitud viene dada por S^L .

La matriz S , si los potenciales son reales, cumple que $S^L(S^L)^* = 1$. Se puede expresar como $S^L = \exp(2i\delta_L)$ donde δ_L se denomina corrimiento de fase, y es real. Si los potenciales son complejos, entonces $S^L(S^L)^* < 1$ y δ_L tiene una parte imaginaria.

2.3. Amplitudes de dispersión

Experimentalmente, no es posible construir un estado que parezca una onda entrante en un canal determinado LN . Por tanto, no puede medirse directamente la matriz S . Los experimentos de dispersión consisten en hacer dispersar un haz de partículas, que inicialmente tienen una dirección definida \hat{k}_i , y observar las partículas que se dispersan en la dirección \hat{k} . El módulo del momento inicial y final es el mismo $k_i = k$. La función de onda que describe esta situación es

$$\Psi_{\vec{k}_i}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) + \chi_{\vec{k}_i}^{(+)}(\vec{r}) \quad (20)$$

Donde $\chi^{(+)}$ contiene ondas salientes. Debe cumplirse que la solución completa sea una combinación de funciones de onda dadas por las soluciones anteriores:

$$\Psi_{\vec{k}_i}(\vec{r}) = \sum_{LN} C^{LN}(\vec{k}_i) \frac{f^L(r)}{r} Y_{LN}(\hat{r}) \quad (21)$$

Asintóticamente, a distancias grandes, las funciones de onda radiales se aproximan por su expresión asintótica (19). Los coeficientes $C^{LN}(\vec{k}_i)$ quedan determinados para que las ondas entrantes de la función de onda sean las de la onda plana. Nótese que

$$\begin{aligned} \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) &= \sum_{LN} 4\pi Y_{LN}^*(\hat{k}_i) i^L Y_{LN}(\hat{r}) j_L(kr) \\ &\quad \sum_{LN} \frac{2\pi i \sqrt{v}}{kr} Y_{LN}^*(\hat{k}_i) i^L Y_{LN}(\hat{r}) (I_L(r) - O_L(r)) \end{aligned} \quad (22)$$

Por tanto, la onda saliente $\chi^{(+)}$ viene dada por la expresión

$$\chi_{\vec{k}_i}^{(+)}(\vec{r}) = \sum_{LN} \frac{2\pi i \sqrt{v}}{kr} Y_{LN}^*(\hat{k}_i) (1 - S^L) Y_{LN}(\hat{r}) O_L(r) \quad (23)$$

con lo cual, las amplitudes de dispersión correspondientes a una dirección \vec{k} viene dada extrayendo la componente correspondiente de la función de onda (nótese que la amplitud de dispersión es el coeficiente que multiplica a $\exp(ikr)/r$ en la onda saliente). Se obtiene:

$$A(\vec{k}_i, \vec{k}) = \frac{2\pi i}{k} \sum_{LN} Y_{LN}^*(\hat{k}_i) Y_{LN}(\hat{k}) (1 - S^L) \quad (24)$$

Esta expresión puede interpretarse como sigue: La onda plana inicial tiene una amplitud de probabilidad $Y_{LN}^*(\hat{k}_i)$ de estar en un estado con momento angular orbital LN . Este estado genera una onda dispersada con el mismo momento angular LN cuyo coeficiente es $(1 - S^L)$. Finalmente, de las ondas dispersadas se extraen los estados con dirección \hat{k} bien definida, a través de $Y_{LN}(\hat{k})$.

Si tomamos la dirección \hat{k}_i a lo largo del eje z, entonces $\theta_i = 0, \phi_i = 0$. Se cumple que $Y_{LN}^*(\hat{k}_i) = \sqrt{2L+1}/\sqrt{4\pi}\delta(N, 0)$. Por otro lado, si se toma la dirección de \hat{k} en el plano z-x, entonces $\phi = 0$ y \hat{k} queda totalmente determinado por el ángulo de dispersión θ . Entonces, resulta

$$A(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_L (2L+1) P_L(\cos\theta) (1 - S^L) \quad (25)$$

Las sección eficaz diferencial está relacionada con la probabilidad de detectar la partícula en una dirección determinada, por unidad de ángulo sólido. La amplitud de dispersión $A(\theta)$ es, por definición, el coeficiente que multiplica al factor $\exp(ikr)/r$ en la expresión de la función de onda dispersada. Por tanto, $|A(\theta)|^2/r^2 dV$ es la probabilidad de encontrar una partícula dispersada, en la dirección θ , dentro de un volumen determinado dV . Este elemento de volumen puede escribirse como $dV = r^2 d\Omega$, en términos del diferencial de ángulo sólido. Por tanto, la sección eficaz diferencial es simplemente el cuadrado de la amplitud de dispersión.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A(\theta)|^2 \quad (26)$$

3. Potenciales de transición

Supongamos que tenemos un núcleo atómico. Si este núcleo está aislado, su evolución viene gobernada por su hamiltoniano interno, $h(\xi)$. ξ representa los grados de libertad internos del núcleo (coordenadas o espines de nucleones, parámetros de deformación de la superficie nuclear, ángulos de orientación de núcleos deformados, etc).

La evolución temporal de la función de onda del núcleo viene dada por

$$i\hbar \frac{d\phi(\xi, t)}{dt} = h(\xi)\phi(\xi, t) \quad (27)$$

Si se desarrolla la función de onda interna en una base de autoestados de $h(\xi)$, que llamamos $\phi_n(\xi)$, obtenemos la expresión siguiente.

$$\phi(\xi, t) = \sum_n c_n \phi_n(\xi) \exp(-ie_n t/\hbar) \quad (28)$$

Supongamos que situamos una partícula (por ejemplo, otro núcleo atómico) a una distancia \vec{r} de la primera, y que mantenemos esta distancia fija. Esta partícula interactuará con el núcleo atómico, y esta interacción viene descrita por un potencial $V(\vec{r}, \xi)$ que depende, en general, de la distancia y de los grados de libertad internos. Por conveniencia, podemos extraer una función $V_0(r)$ de la interacción, independiente de los grados de libertad internos. Entonces, tenemos $V(\vec{r}, \xi) = V_0(r) + \Delta(\vec{r}, \xi)$. En este caso, la evolución del sistema viene dada por la ecuación:

$$i\hbar \frac{d\phi(\xi, t)}{dt} = (V_0(r) + \Delta(\vec{r}, \xi) + h(\xi))\phi(\xi, t) \quad (29)$$

La función de onda interna puede desarrollarse en términos de los autoestados de $h(\xi)$ según la expresión

$$\phi(\xi, \vec{r}, t) = \exp(-iV_0(r)t/\hbar) \sum_n c_n(\vec{r}, t) \phi_n(\xi) \exp(-ie_n t/\hbar) \quad (30)$$

Ahora, los coeficientes c_n que dan la evolución del estado interno no son constantes, sino que varían con el tiempo según la expresión

$$i\hbar \frac{dc_n(\vec{r}, t)}{dt} = \sum_m e^{-i(e_m - e_n)t/\hbar} \Delta_{nm}(\vec{r}) c_m(\vec{r}, t) \quad (31)$$

donde los potenciales de transición están definidos por

$$\Delta_{nm}(\vec{r}) = \int d\xi \phi_n^*(\xi) \Delta(\vec{r}, \xi) \phi_m(\xi) \quad (32)$$

3.1. Potenciales Coulombianos

Consideremos un sistema cuántico (por ejemplo, un núcleo) formado por partículas cargadas (protones). Entonces, $\xi = (\vec{r}_1 \dots \vec{r}_z)$ corresponde a las posiciones de cada partícula cargada con respecto a su centro de masas. Consideremos que la partícula con la que interacciona el sistema es un núcleo con carga Ze . Entonces la interacción es

$$V(\vec{r}, \xi) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (33)$$

donde $e^2/4\pi\epsilon_0 = 1,44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$. Esta expresión puede desarrollarse usando la expresión

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \sum_{\lambda\mu} \frac{r_{<}^\lambda}{r_{>}^{\lambda+1}} \frac{4\pi}{2\lambda+1} Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}) \quad (34)$$

donde $r_{<}$ es el menor de r y r_i , y $r_{>}$ es el mayor. Si la partícula está fuera de la distribución de cargas, entonces $r_i = r_{<}$ y $r = r_{>}$. Consideramos que este es el caso. Entonces, la interacción coulombiana puede expresarse en función del operador multipolar eléctrico, definido según

$$M(E\lambda, \mu) = e \sum_i r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) \quad (35)$$

con lo que tenemos

$$V(\vec{r}, \xi) = \frac{Ze}{\epsilon_0} \sum_{\lambda\mu} \frac{M(E\lambda, \mu)}{2\lambda+1} \frac{Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r})}{r^{\lambda+1}} \quad (36)$$

En este caso, la selección natural del potencial $V_0(r)$ es el término monopolar $\lambda = 0$

$$V_0(r) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (37)$$

con lo que tenemos que

$$\Delta(\vec{r}, \xi) = \frac{Ze}{\epsilon_0} \sum_{\lambda \neq 0, \mu} \frac{M(E\lambda, \mu)}{2\lambda+1} \frac{Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r})}{r^{\lambda+1}} \quad (38)$$

Los potenciales de transición vienen dados por los elementos de matriz de $\Delta(\vec{r}, \xi)$. Resulta conveniente expresar los autoestados del hamiltoniano interno en función de su momento angular y proyección, $\phi_n(x) \equiv |nI_n M_n\rangle$, con lo que la eq. (32) da

$$\Delta_{nm}(\vec{r}) = \frac{Ze}{\epsilon_0} \sum_{\lambda \neq 0, \mu} \frac{\langle nI_n M_n | M(E\lambda, \mu) | mI_m M_m \rangle}{2\lambda+1} \frac{Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r})}{r^{\lambda+1}} \quad (39)$$

El elemento de matriz puede expresarse en términos de un coeficiente de Clebsch-Gordan y de la probabilidad de transición reducida para pasar del estado m al estado n emitiendo un fotón de multipolaridad λ .

$$\langle nI_nM_n|M(E\lambda, \mu)|mI_mM_m \rangle = \langle I_nM_n|\lambda\mu, I_mM_m \rangle \frac{\sqrt{2I_m+1}}{\sqrt{2I_n+1}} \sqrt{B(E\lambda, m \rightarrow n)} \quad (40)$$

Por tanto, vemos que los potenciales de transición coulombianos están totalmente determinados por las probabilidades de transición entre los estados. Nótese que son de aplicación las reglas de selección $|I_n - I_m| \leq \lambda \leq I_n + I_m$, y para la paridad $\pi_n\pi_m = (-1)^\lambda$.

3.2. Potenciales en el modelo colectivo

Con frecuencia, las excitaciones de baja energía de los núcleos se describen como desviaciones de la superficie del núcleo con respecto a la forma esférica. Así, la superficie del núcleo viene dada por

$$R(\theta, \phi) = R_0 + \sum_{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \quad (41)$$

En esta expresión, $\delta_{\lambda\mu}$ son las variables colectivas ξ que describen el núcleo. Habitualmente, las deformaciones cuadrupolares $\lambda = 2$ y octupolares $\lambda = 3$ son las más relevantes.

La interacción de este núcleo con la partícula de referencia viene dada por una función de la distancia de la partícula a la superficie del núcleo (habitualmente, esa función se parametriza como un Woods-Saxon). Así, tenemos

$$V(\vec{r}, \xi) = V_0(r - (R_0 + \sum_{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi))) \quad (42)$$

Suponiendo que la deformación del núcleo es pequeña frente al parámetro característico de variación del potencial (difusividad), puede hacerse un desarrollo de Taylor en $\delta_{\lambda\mu}$ hasta primer orden, obteniéndose

$$V(\vec{r}, \xi) = V_0(r - R_0) - \frac{dV_0(r - R_0)}{dr} \sum_{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \quad (43)$$

Los potenciales de transición vienen dados por

$$\Delta_{nm}(\vec{r}) = -\frac{dV_0(r - R_0)}{dr} \sum_{\lambda} \langle nI_nM_n|\delta_{\lambda\mu}|mI_mM_m \rangle Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}) \quad (44)$$

El elemento de matriz de los parámetros de deformación puede ponerse en términos de un coeficiente de Clebsch-Gordan y del elemento de matriz reducido

$$\langle nI_nM_n|\delta_{\lambda,\mu}|mI_mM_m \rangle = \frac{\langle I_nM_n|\lambda, \mu; I_mM_m \rangle}{\sqrt{2I_n+1}} \langle nI_n||\delta_\lambda||mI_m \rangle \quad (45)$$

que, a su vez, está relacionado con las propiedades de estructura del núcleo, como las probabilidades de transición reducidas.

4. Teoría semiclásica de la dispersión inelástica

4.1. Aproximaciones fundamentales para una teoría semiclásica

Los núcleos atómicos son sistemas con grados de libertad internos. Cuando dos núcleos colisionan, es probable que alguno de los dos, o ambos, se exciten como resultado de la colisión. Esto nos permite estudiar sus propiedades, observando cómo se excitan según las condiciones (energía, ángulo) de la colisión.

En general, si se dan las condiciones adecuadas, las trayectorias clásicas pueden ser aproximación razonable para describir el movimiento relativo de los núcleos colisionantes. No obstante, no es razonable describir en términos clásicos la excitación de los grados de libertad internos. Esto lleva a la conveniencia de introducir teorías semiclásicas, en las que el movimiento relativo de los núcleos colisionantes se describe en términos clásicos, mientras que la excitación de los grados de libertad interno se realiza cuánticamente.

El punto de partida para formular la aproximación semiclásica es el Hamiltoniano del problema cuántico:

$$H(\vec{r}, \xi) = T(\vec{r}) + V(\vec{r}, \xi) + h(\xi) \quad (46)$$

Aquí \vec{r} representa la coordenada relativa de los núcleos colisionantes, ξ representa otros grados de libertad relevantes que puedan excitarse en la colisión (coordenadas o espines de nucleones, parámetros de deformación de la superficie nuclear, ángulos de orientación de núcleos deformados, etc). $T(\vec{r})$ es la energía cinética asociada a la coordenada relativa. $h(\xi)$ es el hamiltoniano que depende de los grados de libertad internos. Este hamiltoniano es la suma de los hamiltonianos internos de los dos núcleos colisionantes. $V(\vec{r}, \xi)$ es la interacción entre los dos núcleos, que puede depender tanto de la distancia como de los grados de libertad internos.

Supongamos que podemos extraer de $V(\vec{r}, \xi)$ una función $V_0(r)$, independiente de las variables internas y de la dirección de \vec{r} , que contenga la parte más importante de la interacción. Entonces, podemos suponer que el término $V_0(r)$ determinará las trayectorias que sigue la coordenada relativa de los núcleos, mientras que el término residual $\Delta(\vec{r}, \xi) = V(\vec{r}, \xi) - V_0(r)$ produce las excitaciones internas, sin modificar la trayectoria.

Es obvio que la validez de la aproximación semiclásica depende de que se elija adecuadamente el potencial $V_0(r)$. La forma habitual de obtenerlo es partir del estado fundamental de los grados de libertad internos $\phi_g(\xi) \equiv |gI_gM_g\rangle$, y evaluar

$$V_0(r) = \int d\xi |\phi_g(\xi)|^2 V(\vec{r}, \xi) = \frac{1}{2I_g + 1} \sum_{M_g} \langle gI_gM_g | V(\vec{r}, \xi) | gI_gM_g \rangle \quad (47)$$

4.2. Desarrollo de la aproximación semiclásica

Una vez obtenido el potencial central, se resuelven las ecuaciones del movimiento y se obtiene la expresión de la trayectoria $\vec{r}(b, t)$. Nótese que en una aproximación semiclásica no basta con conocer la función de deflexión. Hay que conocer la dependencia temporal de la trayectoria.

Se determina el ángulo de dispersión $\theta(b)$ en función del parámetro de impacto b . A partir de esta función se obtiene la sección eficaz diferencial clásica, dada por la ecuación 8. La trayectoria $\vec{r}(b, t)$ también puede caracterizarse en función del ángulo de dispersión, $\vec{r}(\theta, t)$.

Para cada ángulo de dispersión, se evalúa el potencial residual $\Delta(\vec{r}, \xi)$ como una función del tiempo y de las coordenadas internas ξ , $\Delta(\vec{r}(\theta, t), \xi)$. En la aproximación semiclásica, el estado interno de los núcleos colisionantes $\phi(\xi, \theta, t)$ correspondiente a una trayectoria θ evoluciona con el tiempo satisfaciendo una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, dada por la expresión:

$$i\hbar \frac{d\phi(\xi, \theta, t)}{dt} = (\Delta(\vec{r}(\theta, t), \xi) + h(\xi))\phi(\xi, \theta, t) \quad (48)$$

Nótese que esta expresión es similar a (29). La diferencia radica en que no aparece el término $V_0(r)$, ya que éste afecta al movimiento de la coordenada \vec{r} , y no a los grados de libertad internos. Por otro lado, los potenciales de acoplamiento $\Delta(\vec{r}(\theta, t), \xi)$ aparece como una función del tiempo, ya que la coordenada \vec{r} varía con el tiempo. Si se desarrolla la función de onda interna en una base de autoestados de $h(\xi)$, que llamamos $\phi_n(\xi)$, obtenemos la expresión siguiente.

$$\phi(\xi, \theta, t) = \sum_n c_n(\theta, t) e^{-ie_n t/\hbar} \phi_n(\xi) \quad (49)$$

donde los coeficientes $c_n(\theta, t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$i\hbar \frac{dc_n(\theta, t)}{dt} = \sum_m e^{-i(e_m - e_n)t/\hbar} \Delta_{nm}(\theta, t) c_m(\theta, t) \quad (50)$$

Nótese que esta ecuación es parecida a (31), salvo por el hecho de que los potenciales de transición varían con el tiempo. Estos potenciales de transición vienen dados por la expresión

$$\Delta_{nm}(\theta, t) = \int d\xi \phi_n^*(\xi) \Delta(\vec{r}(\theta, t), \xi) \phi_m(\xi) \quad (51)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se resuelve de forma sencilla para cada ángulo θ de dispersión. Las condiciones de contorno para esta ecuación diferencial corresponden a que, en el instante inicial $t \rightarrow -\infty$, el sistema está en su estado fundamental. Por tanto, $c_g(\theta, -\infty) = 1$, y todos los otros coeficientes se anulan.

Una vez integradas las ecuaciones, la probabilidad de excitación a un estado determinado n viene dada por $P_n(\theta) = |c_n(\theta, \infty)|^2$. Por tanto, la sección eficaz de excitación inelástica a un estado determinado n viene dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{g \rightarrow n} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Clas}} P_n(\theta) \quad (52)$$

4.3. Primer orden de perturbación

Cuando se cumple que $\Delta_{nm}(\theta, t) \cdot t_c \ll \hbar$, donde t_c es el tiempo característico de la colisión, entonces la probabilidad de excitación es pequeña, y puede tomarse $c_m(\theta, t) = \delta(m, g)$ en el lado izquierdo de la ecuación 50. Entonces, se obtiene que, para los estados excitados $n \neq g$, el coeficiente $c_n(\theta)$ para $t \rightarrow \infty$ viene dado por

$$c_n(\theta) \equiv c_n(\theta, \infty) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(e_n - e_g)t/\hbar) \Delta_{ng}(\theta, t) dt \quad (53)$$

Esta expresión muestra la relevancia de la energía de excitación de los estados elásticos en la probabilidad de colisión. El potencial de acoplamiento $\Delta_{ng}(\theta, t)$ tiene un rango temporal característico que corresponde al tiempo de la colisión t_c . Cuando $(e_n - e_g)t_c/\hbar \ll 1$, entonces la exponencial en la expresión 53 es prácticamente 1 en el intervalo en el que $\Delta_{ng}(\theta, t)$ toma valores importantes. Esta aproximación se denomina “repentina” (sudden), y corresponde a ignorar el hamiltoniano interno $h(\xi)$ en la ecuación 48 que da la evolución del sistema interno. Esta ecuación es equivalente a suponer que los grados de libertad internos, dados por la coordenada ξ , están “congelados” durante el proceso de colisión.

Cuando tenemos la situación contraria $(e_n - e_g)t_c/\hbar \gg 1$, entonces la exponencial oscilante en la expresión 53 tiende a cancelar el integrando, y la probabilidad de excitación se hace muy pequeña. Esta es la aproximación “adiabática” (adiabatic), en la cual los núcleos colisionantes acaban en su estado fundamental para $t \rightarrow \infty$, aunque durante la colisión $t \simeq t_c$ puedan producirse excitaciones.

4.4. Excitación Coulombiana

La resolución de las ecuaciones semiclásicas debe hacerse, en general, de forma numérica. No obstante, existe un caso muy importante en el que esa solución puede hacerse analíticamente. Corresponde a la excitación coulombiana.

Consideramos dos núcleos atómicos que se mueven en un potencial $V_0(r)$ monopolar coulombiano. Definimos

$$a_0 = \frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 E} \quad ; \quad \epsilon = \frac{1}{\sin\theta/2} \quad (54)$$

Puede demostrarse que la trayectoria puede parametrizarse en función de un parámetro ω , de la forma siguiente:

$$\rho(\omega) = r(\omega)/a_0 = \epsilon \cosh \omega + 1 \quad (55)$$

$$\phi(\omega) = \arctan(\sqrt{\epsilon^2 - 1} \sinh \omega / (\epsilon + \cosh \omega)) \quad (56)$$

$$\theta(\omega) = \pi/2 \quad (57)$$

$$\tau(\omega) = t(\omega)v/a_0 = \epsilon \sinh \omega + \omega \quad (58)$$

La amplitud de transición del estado fundamental $|gI_gM_g\rangle$ al estado excitado $|nI_nM_n\rangle$ es

$$c_n(\theta) = \frac{Ze}{i\hbar\epsilon_0} \sum_{\lambda\mu} \frac{\sqrt{B(E\lambda, g \rightarrow n)}\sqrt{2I_g+1}}{(2\lambda+1)} \frac{\langle I_nM_n|\lambda\mu I_gM_g\rangle}{\sqrt{2I_n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(e_n-e_g)t/\hbar} \frac{Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi)}{r^{\lambda+1}} \quad (59)$$

Realizamos la integral haciendo el cambio de variable a ω , y definiendo el parámetro de adiabaticidad $\xi = (e_n - e_g)a_0/\hbar v$, se tiene

$$c_n(\theta) = \frac{Ze^2}{i\epsilon_0\hbar v} \sum_{\lambda} \frac{\sqrt{B(E\lambda, g \rightarrow n)}\sqrt{2I_g+1}}{(2\lambda+1)ea_0^\lambda} \sum_{\mu} \frac{\langle I_nM_n|\lambda\mu I_gM_g\rangle}{\sqrt{2I_n+1}} I_{\lambda\mu}(\epsilon, \xi) Y_{\lambda\mu}(\pi/2) \quad (60)$$

Donde la integral coulombiana $I_{\lambda,\mu}(\epsilon, \xi)$ viene dada por

$$I_{\lambda\mu}(\epsilon, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\omega)^{-\lambda} \exp(i\xi\tau(\omega)) \exp(i\mu\phi(\omega)) \quad (61)$$

La probabilidad de excitación al estado n se obtiene sumando para todos los subestados magnéticos finales M_n y promediando para los subestados magnéticos iniciales M_g . Considerando que sólo una multipolaridad λ contribuye a la transición, y utilizando las propiedades de los coeficientes de Clebsh-Gordan, se tiene finalmente:

$$P_n = \left(\frac{Ze^2}{\epsilon_0\hbar v} \right)^2 \frac{B(E\lambda, g \rightarrow n)}{(2\lambda+1)^3 e^2 a_0^{2\lambda}} \sum_{\mu} (Y_{\lambda\mu}(\pi/2) I_{\lambda,\mu}(\epsilon, \xi))^2 \quad (62)$$

Si esta probabilidad se multiplica por la sección eficaz elástica (problema 2), se tiene la expresión para la sección eficaz inelástica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v} \right)^2 \frac{B(E\lambda, g \rightarrow n)}{e^2 a_0^{2\lambda-2}} f_{\lambda}(\theta, \xi) \quad (63)$$

Donde la función

$$f_{\lambda}(\theta, \xi) = \frac{4\pi^2}{(2\lambda+1)^3 \sin^4(\theta/2)} \sum_{\mu} (Y_{\lambda\mu}(\pi/2) I_{\lambda,\mu}(\epsilon, \xi))^2 \quad (64)$$

está tabulada.

Problema 3: Obtener la sección eficaz de excitación coulombiana desde el estado $3/2^-$ al estado $1/2^-$ de ${}^7\text{Li}$ para la colisión ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ a 27 MeV (en el laboratorio), para los ángulos $\theta = 120, 150$ y 180 . Comparar con las medidas publicadas en Nucl. Phys. A582 (1995) 357-368.

Datos: $e(1/2^-) = 0,478\text{MeV}$. $B(E2, 3/2^- \rightarrow 1/2^-) = 7,27 e^2 \text{ fm}^4$.

5. Aproximaciones de Born de onda plana (PWBA) y onda distorsionada (DWBA)

5.1. Expresión integral de la ecuación de Schrödinger

La solución de la ecuación de Schrödinger para un hamiltoniano libre $H_0 = T = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m$ es una onda plana

$$\chi_0(\vec{k}, \vec{r}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (65)$$

Donde $\hbar^2 k^2 / 2m = E$. A partir de esta solución, podemos ver que las soluciones del hamiltoniano con un potencial $H = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m + V(\vec{r})$ para la misma energía E pueden escribirse como

$$\chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}') = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}') - \frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \frac{\exp(ik|\vec{r}' - \vec{r}|)}{|\vec{r}' - \vec{r}|} V(\vec{r}) \chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (66)$$

es decir, como una combinación de onda plana y ondas salientes, o bien como

$$\chi^{(-)}(\vec{k}, \vec{r}') = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}') - \frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \frac{\exp(-ik|\vec{r}' - \vec{r}|)}{|\vec{r}' - \vec{r}|} V(\vec{r}) \chi^{(-)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (67)$$

es decir, como una combinación de onda plana y ondas entrantes.

En el límite cuando $r' \rightarrow \infty$, podemos tomar un vector \vec{k}' cuyo módulo es k y su dirección \hat{k}' coincide con \hat{r}' . Entonces, se tiene

$$\chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}') = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}') - \frac{\exp(ikr')}{r'} \frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}) V(\vec{r}) \chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (68)$$

El coeficiente de la onda esférica saliente $\exp(ikr)/r$ es precisamente la amplitud de dispersión, por lo que se tiene

$$A(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}) V(\vec{r}) \chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (69)$$

El cuadrado de esta amplitud sería precisamente la sección eficaz diferencial correspondiente a la dirección determinada por \vec{k}' .

5.1.1. Aproximación PWBA

La aproximación de Born de onda plana consiste en sustituir $\chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r})$ por la onda plana correspondiente $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$. Por tanto, se tiene

$$A_{PW}(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{r}) V(\vec{r}) \quad (70)$$

donde $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ es el momento transferido. Vemos, por tanto, que en la aproximación PWBA las amplitudes de dispersión dependen solamente del momento transferido. Además, si el potencial es central $V(r)$, entonces solamente depende q , que es el módulo del momento transferido.

$$A_{PW}(q) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int r^2 dr \frac{\sin(qr)}{qr} V(r) \quad (71)$$

Nótese que q depende de la energía y del ángulo de dispersión, a través de $q = 2k \sin \theta/2$.

La aproximación de PWBA requiere que la energía E sea mucho mayor que el potencial $V(r)$. Es una aproximación válida cuando la energía de la colisión es muy alta (unos 100 MeV por nucleón), y aún así su validez es limitada, ya que la interacción nuclear es muy fuerte.

Por contra, la aproximación PWBA da una interpretación muy sencilla de la dispersión. Básicamente, la amplitud de dispersión es la transformada de Fourier de la interacción. Interacciones de corto alcance r pueden generar cambios grandes del momento q , y interacciones de largo alcance provocan cambios pequeños del momento.

Problema 4: Obtener la amplitud de dispersión $A(q)$ en la aproximación PWBA para:

- Un potencial gaussiano $V(r) = V_0 \exp(-r^2/a^2)$.
- Un potencial yukawiano $V(r) = V_0 \exp(-r/a)/(r/a)$.
- Un potencial de pozo cuadrado $V(r) = V_0 \quad r < a \quad ; \quad V(r) = 0 \quad r \geq a$.

Representar los valores obtenidos para $A(q)$ en los tres casos. Discutir los resultados.

5.1.2. Aproximación DWBA

Vamos a considerar que la interacción $V(\vec{r})$ puede separarse en una parte $V_0(r)$, que puede resolverse exactamente, y una parte $\Delta(\vec{r})$ que queremos tratar perturbativamente. Obtenemos las soluciones $\chi_{DW}^{(\pm)}$ con ondas entrante y saliente,

$$\chi_{DW}^{(\pm)}(\vec{k}, \vec{r}') = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}') - \frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \frac{\exp(\pm ik|\vec{r}' - \vec{r}|)}{|\vec{r}' - \vec{r}|} V_0(r) \chi_{DW}^{(\pm)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (72)$$

que son soluciones del hamiltoniano con el potencial $V_0(r)$.

Puede demostrarse que la amplitud de dispersión debido a la interacción $V(\vec{r})$ viene dada por

$$A(\vec{k}, \vec{k}') = A_0(\vec{k}, \vec{k}') - \frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \chi_{DW}^{(-)}(\vec{k}, \vec{r})^* \Delta(\vec{r}) \chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (73)$$

donde $A_0(\vec{k}, \vec{k}')$ es la amplitud de dispersión debida al potencial $V_0(r)$. Esta expresión es exacta, pero presupone el conocimiento de la función de onda exacta $\chi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r})$.

La aproximación DWBA, que es válida hasta primer orden en $\Delta(\vec{r})$, pero a todos los órdenes en $V_0(r)$, consiste en sustituir la función de onda exacta por $\chi_{DW}^{(+)}(\vec{k}, \vec{r})$. Queda, por tanto,

$$A(\vec{k}, \vec{k}') = A_0(\vec{k}, \vec{k}') - \frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \chi_{DW}^{(-)}(\vec{k}', \vec{r})^* \Delta(\vec{r}) \chi_{DW}^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) \quad (74)$$

5.2. Dispersión inelástica en DWBA

Partimos de una interacción $V(\vec{r}, \xi)$, que depende tanto de la coordenada relativa como de los grados de libertad internos. Separamos esta interacción en un potencial central $V_0(r)$ más un término $\Delta(\vec{r}, \xi)$ que contiene todo el acoplamiento entre los estados internos.

La aproximación DWBA para la dispersión inelástica consiste en tratar a todos los órdenes el potencial central $V_0(r)$, pero sólo hasta primer orden los potenciales de acoplamiento $\Delta(\vec{r}, \xi)$. En esta situación, consideramos amplitud de dispersión que lleva desde el estado inicial $\phi_g(\xi)$, de energía e_g , a un estado final $\phi_n(\xi)$, de energía e_n . El potencial central $V_0(r)$ es el mismo para todos los estados excitados, y no modifica el estado interno, por tanto las funciones de onda del movimiento relativo para los estados $\psi_n(\xi)$, son simplemente $\chi_{DW}^{(\pm)}(\vec{k}_n, \vec{r})$, donde $E = \hbar^2 k_n^2 / 2m + e_n$.

Por tanto, la función de onda inicial, que contiene la distorsión debida al potencial $V_0(r)$, viene dada por

$$\psi_i(\vec{r}, \xi) = \chi^{(+)}(\vec{k}_g, \vec{r}) \phi_g(\xi) \quad (75)$$

La función de onda final viene dada por

$$\psi_f(\vec{r}, \xi) = \chi^{(-)}(\vec{k}_n, \vec{r}) \phi_n(\xi) \quad (76)$$

Generalizando la expresión (74), se obtiene que la amplitud de dispersión inelástica para pasar del estado inicial ϕ_g , con momento \vec{k}_g al estado final ϕ_n , con momento \vec{k}_n , en la aproximación DWBA, viene dada por

$$A(\vec{k}_g, \vec{k}_n)_{gn} = -\frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} d\xi \psi_f(\vec{r}, \xi)^* \Delta(\vec{r}, \xi) \psi_i(\vec{r}, \xi) \quad (77)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r} \chi_{DW}^{(-)}(\vec{k}_n, \vec{r})^* \Delta_{ng}(\vec{r}) \chi_{DW}^{(+)}(\vec{k}_g, \vec{r}) \quad (78)$$

donde $\Delta_{ng}(\vec{r})$ es el potencial de transición definido previamente. Nótese que el potencial central $V_0(r)$ no genera transiciones, y se trata a todos los órdenes en la aproximación DWBA.

La sección eficaz inelástica es el cuadrado de la amplitud correspondiente. La amplitud inelástica, en la aproximación DWBA, es proporcional al potencial de transición. El potencial de transición es proporcional, en el modelo colectivo, al elemento de matriz de la longitud de deformación. Por tanto, la sección eficaz inelástica es proporcional al cuadrado de la longitud de deformación. Esto mismo ocurre en la aproximación semiclásica, en primer orden. En el caso de la excitación coulombiana, el

potencial de transición es proporcional a $\sqrt{B(E\lambda, g \rightarrow n)}$. Por tanto, la sección eficaz inelástica es proporcional a la probabilidad de transición reducida, $\sqrt{B(E\lambda, g \rightarrow n)}$.

La aproximación repentina (“sudden”) correspondía, en la aproximación semiclásica, a que el producto de el tiempo de la colisión R/v por la energía de excitación $e_n - e_g$ fuera pequeño frente a \hbar . En la aproximación *DWBA*, la aproximación equivalente implicaría que no haya una diferencia sustancial en las ondas distorsionadas de los canales iniciales y finales dentro del radio de interacción. Éste es el caso siempre que $(k_n - k_g)R \ll 1$. No obstante, puede verse que $k_n - k_g \simeq v(e_n - e_g)/\hbar$, donde v es la velocidad media del estado inicial y el final, con lo que se obtiene la misma expresión que en la aproximación semiclásica.

La aproximación adiabática corresponde al caso en el que las ondas distorsionadas inicial y final tienen valores de k muy diferentes. En ese caso, la integral radial tiende a cancelarse, ya que las ondas distorsionadas son funciones muy oscilantes.

5.3. Transferencia

Consideremos la colisión de un sistema compuesto ($A + C$) con un blanco B . Tras la colisión, observamos que sale el fragmento A y la partícula C queda unida al blanco B , formando un estado ligado ($B + C$). En un caso realista, la partícula C puede ser un neutrón o un protón que pasa de estar ligado al núcleo A , a estar ligado a B . Un ejemplo de este proceso es ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb} \rightarrow {}^6\text{Li} + {}^{209}\text{Pb}$.

Vamos a denominar \vec{r} a la coordenada que une la partícula B (blanco) al centro de masas de ($A + C$) (proyectil). Igualmente, llamaremos \vec{r}' a la coordenada que une la partícula ($B + C$) (núcleo residual) a la partícula A (eyectil).

En este caso, tenemos un problema de tres cuerpos que resolver. El hamiltoniano puede escribirse de dos formas totalmente equivalentes. En la forma “PRIOR” tenemos

$$H = T(AC, B) + T(A, C) + V(A, C) + V(B, C) + V(A, B) \quad (79)$$

donde $T(AC, B)$ es la energía cinética asociada al movimiento de B con respecto al centro de ($A + C$), $T(A, C)$ es la energía cinética asociada al movimiento de A con respecto al centro de C , y $V(A, C)$, $V(B, C)$ y $V(A, B)$ son las interacciones entre las diferentes parejas de partículas. En el estado inicial, el sistema ($A + C$) está en un estado ligado, que puede expresarse como una función de onda $\phi_i(\vec{r}_{AC})$. Este estado es autoestado de $T(A, C) + V(A, C)$ correspondiente a una energía e_i . Por tanto, el estado inicial corresponde a el producto de $\phi_i(\vec{r}_{AC})$ por una onda plana $\exp(i\vec{k}_i\vec{r})$ que describe el movimiento de ($A + C$) con respecto a B . No obstante, las interacciones $V(B, C)$ y $V(A, B)$ distorsionan este estado inicial, y pueden incluso romper el estado ligado ($A + C$). Para describir este efecto, introducimos un potencial auxiliar $U(AC, B)$, que depende sólo de r , que describe aproximadamente el efecto que $V(B, C) + V(A, B)$ tienen sobre el movimiento de la coordenada \vec{r} . De esta forma, podemos evaluar la función de onda inicial en la aproximación *DWBA*, que resulta

$$\psi_i(\vec{r}, \vec{r}_{AC}) = \chi^{(+)}(\vec{k}_i, \vec{r})\phi_i(\vec{r}_{AC}) \quad (80)$$

Esta expresión es una autofunción del hamiltoniano

$$H_i = T(AC, B) + T(A, C) + V(A, C) + U(AC, B) \quad (81)$$

correspondiente a la energía E . Si comparamos esta expresión con el hamiltoniano completo, vemos que falta el término

$$\Delta(\text{PRIOR}) = H - H_i = V(B, C) + V(A, B) - U(AC, B) \quad (82)$$

Este término es el responsable de los procesos de excitación del proyectil, entre ellos la transferencia.

De forma equivalente, podemos expresar el hamiltoniano en la forma "POST"

$$H = T(A, BC) + T(B, C) + V(A, C) + V(B, C) + V(A, B) \quad (83)$$

donde $T(A, BC)$ es la energía cinética asociada al movimiento de A con respecto al centro de $(B + C)$ y $T(B, C)$ es la energía cinética asociada al movimiento de B con respecto a C . En el estado final, el sistema $(B + C)$ está en un estado ligado, que puede expresarse como una función de onda $\phi_f(\vec{r}_{BC})$. Este estado es autoestado de $T(B, C) + V(B, C)$ correspondiente a una energía e_f . Por tanto, el estado inicial corresponde a el producto de $\phi_f(\vec{r}_{BC})$ por una onda plana $\exp(i\vec{k}_f\vec{r}')$ que describe el movimiento de $(B + C)$ con respecto a A . No obstante, las interacciones $V(A, C)$ y $V(A, B)$ distorsionan este estado final, y pueden incluso romper el estado ligado $(B + C)$. Para describir este efecto, introducimos un potencial auxiliar $U(AC, B)$, que depende sólo de r' , que describe aproximadamente el efecto que $V(A, C) + V(A, B)$ tienen sobre el movimiento de la coordenada \vec{r}' . De esta forma, podemos evaluar la función de onda final en la aproximación *DWBA*, que resulta

$$\psi_f(\vec{r}', \vec{r}_{BC}) = \chi^{(-)}(\vec{k}_f, \vec{r}')\phi_f(\vec{r}_{BC}) \quad (84)$$

Esta expresión es una autofunción de

$$H_f = T(BC, A) + T(B, C) + V(B, C) + U(BC, A) \quad (85)$$

correspondiente a la energía E . Si comparamos esta expresión con el hamiltoniano completo, vemos que falta el término

$$\Delta(\text{POST}) = H - H_f = V(A, C) + V(A, B) - U(BC, A) \quad (86)$$

Este término es el responsable de los procesos de excitación del núcleo residual, entre ellos la transferencia.

La amplitud de transferencia, en la aproximación *DWBA* puede generarse como los elementos de matriz de los términos residuales $\Delta(\text{POST})$ o $\Delta(\text{PRIOR})$ entre los estados inicial y final. Así, se tienen dos expresiones equivalentes:

$$A(\vec{k}_i, \vec{k}_f)_{if} = -\frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r}' d\vec{r}_{BC} \psi_f(\vec{r}', \vec{r}_{BC})^* \Delta(\text{POST}) \psi_i(\vec{r}', \vec{r}_{AC}) \quad (87)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int d\vec{r}' d\vec{r}_{BC} \psi_f(\vec{r}', \vec{r}_{BC})^* \Delta(\text{PRIOR}) \psi_i(\vec{r}', \vec{r}_{AC}) \quad (88)$$

Puede demostrarse que estas expresiones dan exactamente el mismo resultado. El uso de una expresión u otra puede decidirse por conveniencia numérica, en función de que el rango de valores de las coordenadas con respecto a las que se integra sea más adecuado.

La validez de la aproximación DWBA aplicada a la transferencia depende crucialmente de que el término residual pueda tratarse en primer orden. Ello depende de que se realice una selección adecuada de los potenciales auxiliares.

La medida de las secciones eficaces de transferencia da información sobre la estructura de los núcleos que participan en la colisión. Si la partícula transferida es un protón o un neutrón, las secciones eficaces de transferencia son proporcionales a los factores espectroscópicos, que indican cuál es la probabilidad de que un estado determinado de un núcleo con A nucleones aparezca como un nucleón acoplado a un estado del núcleo con $A - 1$ nucleones.

6. Tratamiento cuántico de la dispersión con grados de libertad internos

Las aproximaciones DWBA y semiclásica parten de la base de que los términos de acoplamiento $\Delta(\vec{r}, \xi)$ no modifican sustancialmente el movimiento de las partículas colisionantes. Este no es el caso, en general, cuando se tiene un acoplamiento fuerte entre el movimiento relativo y los grados de libertad internos. Por ello, es preciso realizar un tratamiento puramente cuántico para describir el acoplamiento a los estados excitados que se acoplen fuertemente al estado fundamental durante la colisión.

6.1. Ecuaciones de canales acoplados

Partimos del hamiltoniano completo del sistema

$$H = T(\vec{r}) + h(\xi) + V_0(r) + \Delta(\vec{r}, \xi) \quad (89)$$

Sea $\Psi(\vec{r}, \xi)$ una de las posibles soluciones de la ecuación de Schrödinger $(H-E)\Psi(\vec{r}, \xi) = 0$. Esta función puede desarrollarse en un conjunto completo de funciones de los grados de libertad internos ξ y de la dirección \hat{r} . Estas funciones, denominadas funciones de onda de canal, o “channel wavefunctions” se definen como:

$$\Phi_{nLI}^{JM_J}(\hat{r}, \xi) = \sum_{NM} i^L Y_{LN}(\hat{r}) |nIM\rangle \langle LNIM|JM_J\rangle \quad (90)$$

Los kets $|nIM\rangle$ representan a los autoestados del hamiltoniano interno. Nótese que estas funciones son autoestados del momento angular total J , del momento angular orbital L y del momento angular interno I . Además, las funciones de onda de canal tienen paridad bien definida, determinada por la paridad intrínseca del estado interno π_n y la del movimiento relativo: $\pi = \pi_n(-1)^L$.

Si se desarrolla la solución $\Psi(\vec{r}, \xi)$ en la base de funciones de onda de canal, se tiene

$$\Psi(\vec{r}, \xi) = \sum_{nLIJM} C^{JM_J} \frac{f_{nLI}^J(r)}{r} \Phi_{nLI}^{JM}(\hat{r}, \xi) \quad (91)$$

Las funciones $f_{nLI}^J(r)$ se denominan funciones de onda radiales. Una vez obtenidas estas funciones, el problema de la dispersión queda completamente resuelto.

Vamos a discutir la acción sobre este desarrollo de los términos del hamiltoniano. El término de energía cinética puede expresarse como

$$T(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2}{2mr^2} L^2(\hat{r}) \quad (92)$$

El primer término es la energía cinética radial. Este término no afecta a las funciones de canal, pero modifica las funciones radiales, sobre los que actúa haciéndoles la segunda derivada. El segundo término es el término centrífugo. Cuando actúa sobre

funciones de canal con momento angular orbital L bien definido, produce un factor $\hbar^2 L(L+1)/2mr^2$.

El hamiltoniano interno $h(\xi)$, actuando sobre las funciones de onda de canal, produce un factor e_n correspondiente a la energía interna del estado n . El potencial $V_0(r)$ no modifica la función de onda de canal, y simplemente multiplica la función de onda radial.

El término de acoplamiento $\Delta(\vec{r}, \xi)$ es el más importante. Este término puede modificar las funciones de onda de canal. En general, puede modificar el momento angular orbital L , el momento angular interno I , y el estado n , aunque conserva el momento angular total J y su proyección M_J .

Vamos a considerar que podemos realizar un desarrollo multipolar del término de acoplamiento. Entonces, tenemos

$$\Delta(\vec{r}, \xi) = \sum_{\lambda\mu} V_\lambda(r) \delta_{\lambda\mu}(\xi) Y_{\lambda\mu}(\hat{r})^* \quad (93)$$

El operador $\delta_{\lambda\mu}(\xi)$ actúa sobre las variables internas. En el caso de interacción coulombiana este operador es el operador multipolar eléctrico, y $V_\lambda(r) \propto r^{-\lambda-1}$. En el modelo colectivo, es la longitud de deformación, y $V_\lambda(r) \propto dV_0(r)/dr$. Los elementos de matriz del término de acoplamiento en las funciones de onda de canal vienen dados por la expresión

$$V_{LI_n, L'I'n'}^J(r) = \int d\hat{r} d\xi \Phi_{nLI}^{JM_J}(\hat{r}, \xi)^* \Delta(\vec{r}, \xi) \Phi_{n'L'I'}^{JM_J}(\hat{r}, \xi) \quad (94)$$

$$= \sum_{\lambda} V_\lambda(r) \langle I || \delta_\lambda || I' \rangle \langle L || Y_\lambda || L' \rangle W(ILI'L'; J\lambda) \quad (95)$$

donde

$$\langle L || Y_\lambda || L' \rangle = \frac{\sqrt{2L+1}\sqrt{2I+1}}{\sqrt{4\pi}} \langle L0\lambda0 | L'0 \rangle \quad (96)$$

Uniando estos resultados, obtenemos que la ecuación que satisfacen las funciones de onda radiales son las siguientes

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + V_0(r) + e_n - E \right) f_{nLI}^J(r) + \sum_{n'L'I'} V_{LI_n, L'I'n'}^J(r) f_{n'L'I'}^J(r) = 0 \quad (97)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas. Para cada valor de J , hay que considerar todos los valores de n e I correspondientes a los estados incluidos en el cálculo, y los valores de L compatibles con J . Por otro lado, las funciones de canal tienen una paridad $\pi = \pi_n(-1)^L$ que se conserva, por lo que sólo se acoplan entre sí las funciones radiales en los que $\pi = \pi_n(-1)^L$.

6.2. Condiciones de contorno

No basta conocer las ecuaciones diferenciales para determinar las funciones $f_{n'L'I'}^J(r)$. Es necesario considerar las condiciones de contorno.

La función de onda completa debe ser regular en el origen. Eso implica que las funciones $f_{n'L'I'}^J(r)$ se anulan en el origen. Buscamos, por tanto, soluciones “regulares” en el origen. Vamos a llamar, en general, $\beta \equiv n, L, I$. El número de valores posibles de β para un momento angular total J y paridad π determinados es el número de canales acoplados N .

Un sistema de N ecuaciones diferenciales acopladas tiene, en general N soluciones linealmente independientes. Estas soluciones pueden obtenerse, por ejemplo, partiendo de que $f_\beta^J(0) = 0$, $df_\beta^J(0)/dr = \delta(\beta, \beta_0)$. Partiendo de estas condiciones iniciales, e integrando las ecuaciones, podemos tener soluciones f_{β, β_0}^J , donde β toma los N valores posibles.

Nos interesa el comportamiento asintótico de la función de onda. A distancias grandes comparadas con el rango de los potenciales, las ecuaciones se desacoplan y resultan:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + e_n - E \right) f_{nLI}^J(r) = 0 \quad (98)$$

Una solución general de esta ecuación puede expresarse como una combinación de soluciones entrantes $I_\beta(r)$ y salientes $O_\beta(r)$,

$$I_\beta(r) = (k_n r) h_L^*(k_n r) / \sqrt{v_n} \quad (99)$$

$$O_\beta(r) = (k_n r) h_L(k_n r) / \sqrt{v_n} \quad (100)$$

donde la función $h_L(x)$ es la función de Hankel.

En general, la función $f_{\beta, \beta_0}^J(r)$ se expresará, para valores de r grande, como

$$f_{\beta, \beta_0}^J(r) = A_{\beta, \beta_0}^J I_\beta(r) - B_{\beta, \beta_0}^J O_\beta(r) \quad (101)$$

No obstante, lo que nos interesa es buscar las soluciones en las que solamente exista una onda entrante en el canal β_i . Esta solución, puede obtenerse como una combinación de las soluciones determinadas por β_0 de la forma siguiente:

$$f_{\beta; \beta_i}^J(r) = \sum_{\beta_0} (A^{-1})_{\beta_0, \beta_i}^J f_{\beta, \beta_0}^J(r) \quad (102)$$

Puede demostrarse que esta solución del sistema de ecuaciones acopladas cumple

$$f_{\beta; \beta_i}^J(r) = \delta(\beta, \beta_i) I_\beta(r) - S_{\beta, \beta_i}^J O_\beta(r) \quad (103)$$

donde la matriz de dispersión o matriz S cumple

$$S_{\beta, \beta_i}^J = \sum_{\beta_0} (A^{-1})_{\beta_0, \beta_i}^J B_{\beta, \beta_0}^J \quad (104)$$

El significado de la matriz S es el siguiente. Supongamos que en un tiempo determinado, caracterizamos la función de onda como un paquete de ondas entrantes,

localizados fuera de la zona de interacción con los números cuánticos n_i, I_i, L_i, J, M , que se mueve hacia la zona de interacción. Entonces, cuando el paquete de ondas llega a la zona de interacción, por efecto de las interacciones, habrá excitaciones del sistema interno, y cambios del momento angular orbital, de manera que, tras la interacción se tendrá una serie de ondas salientes en todos los canales n, I, L, J, M , cuya amplitud viene dada por $S_{nIL, n_i I_i L_i}^J$.

La matriz S tiene las propiedades siguientes

- Unitariedad: Si los potenciales son reales, se tiene

$$\sum_{nIL} S_{nIL, n_i I_i L_i}^J S_{nIL, n_j I_j L_j}^{J*} = \delta(n_i, n_j) \delta(I_i, I_j) \delta(L_i, L_j) \quad (105)$$

- Inversión Temporal:

$$S_{nIL, n_i I_i L_i}^J = S_{n_i I_i L_i, nIL}^J \quad (106)$$

- Conservación de la paridad: Para que $S_{nIL, n_i I_i L_i}^J \neq 0$, $(-1)^L \pi(n) = (-1)^{L_i} \pi(n_i)$.

Problema 5: Considera la dispersión de ${}^7\text{Li}$ ($I = 3/2^-$) por ${}^{208}\text{Pb}$ ($I = 0^+$), considerando explícitamente la posibilidad de excitación al estado $I = 1/2^-$ de ${}^7\text{Li}$. Considera los canales en los que $J = 15/2$ y $\pi = +1$.

- Qué valores de L e I son posibles.
- Cuántas ecuaciones acopladas aparecen.
- Qué multipolos λ pueden aparecer en el desarrollo del potencial.
- Cuántos elementos tiene la matriz S .
- Qué relación existe entre los elementos de la matriz S .
- Qué elementos de la matriz S se harían pequeños al reducir el acoplamiento.

6.3. Amplitudes de dispersión

Experimentalmente, no es posible construir un estado que parezca una onda entrante en un canal determinado n_i, I_i, L_i, J, M . Por tanto, no puede medirse directamente la matriz S . Los experimentos de dispersión consisten en hacer dispersar un haz de partículas, que inicialmente tienen una dirección definida \hat{k}_i , y un estado interno $|n_i I_i M_i\rangle$, y observar las partículas que se dispersan en la dirección \hat{k} , con un estado interno dado por $|n I M\rangle$. La función de onda que describe esta situación es

$$\Psi_{\vec{k}_i, n_i I_i M_i}(\vec{r}, \xi) = \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) |n_i I_i M_i\rangle + \chi_{\vec{k}_i, n_i I_i M_i}^{(+)}(\vec{r}, \xi) \quad (107)$$

Donde $\chi^{(+)}$ contiene ondas salientes. Debe cumplirse que la solución completa sea una combinación de funciones de onda dadas por las soluciones anteriores:

$$\Psi_{\vec{k}_i, n_i I_i M_i}(\vec{r}, \xi) = \sum_{L_i J M_J} C_{L_i}^{J M_J}(\vec{k}_i, n_i I_i M_i) \sum_{n L I} \frac{f_{n L I; n_i L_i I_i}^J(r)}{r} \Phi_{n L I}^{J M_J}(\hat{r}, \xi) \quad (108)$$

Asintóticamente, a distancias grandes, las funciones de onda radiales se aproximan por su expresión asintótica (103). Los coeficientes $C_{L_i}^{J M_J}$ quedan determinados para que las ondas entrantes de la función de onda sean las de la onda plana. Nótese que

$$\exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) |n_i I_i M_i \rangle = \sum_{J M_J L_i N_i} \frac{2\pi i \sqrt{v_i}}{k_i r} \langle L_i N_i I_i M_i | J M_J \rangle Y_{L_i N_i}^*(\hat{k}_i) \quad (109)$$

$$(I_{n_i I_i L_i}(r) - O_{n_i I_i L_i}(r)) \Phi_{n_i L_i I_i}^{J M_J}(\hat{r}, \xi)$$

Por tanto, la onda saliente $\chi^{(+)}$ viene dada por la expresión

$$\chi_{\vec{k}_i, n_i I_i M_i}^{(+)}(\vec{r}, \xi) = \sum_{J M_J L_i N_i} \frac{2\pi i \sqrt{v_i}}{k_i r} \langle L_i N_i I_i M_i | J M_J \rangle Y_{L_i N_i}^*(\hat{k}_i) \quad (110)$$

$$\sum_{n I L} (\delta_{n, n_i} \delta_{I, I_i} \delta_{n, n_i} - S_{n I L, n_i I_i L_i}^J) \Phi_{n I L}^{J M_J}(\hat{r}, \xi) O_{n I L}(r)$$

con lo cual, las amplitudes de dispersión correspondientes a excitar un estado concreto $|n I M \rangle$, en una dirección \vec{k} viene dada extrayendo la componente correspondiente de la función de onda (nótese que la amplitud de dispersión es el coeficiente que multiplica a $\exp(ikr)/r$ en la onda saliente). Se obtiene:

$$A(\vec{k}_i, \vec{k})_{n_i I_i M_i, n I M} = \frac{2\pi i \sqrt{v_i}}{\sqrt{v} k_i} \sum_{J M_J L_i N_i} \langle L_i N_i I_i M_i | J M_J \rangle Y_{L_i N_i}^*(\hat{k}_i) \quad (111)$$

$$\sum_{n I L N} (\delta_{n, n_i} \delta_{I, I_i} \delta_{n, n_i} - S_{n I L, n_i I_i L_i}^J) \langle L N I M | J M_J \rangle Y_{L N}(\hat{k})$$

Esta expresión puede interpretarse como sigue: La onda plana inicial tiene una amplitud de probabilidad $Y_{L_i N_i}^*(\hat{k}_i)$ de estar en un estado con momento angular orbital $L_i N_i$. Este estado, a su vez, se acopla con el momento angular interno y tiene una amplitud de probabilidad $\langle L_i N_i I_i M_i | J M_J \rangle$ de tener un momento angular total $J M_J$. El estado con n_i, I_i, L_i, J bien definidos siente la interacción, de forma que producen ondas dispersadas en estados con n, I, L, J , cuyos coeficientes son $(\delta_{n, n_i} \delta_{I, I_i} \delta_{n, n_i} - S_{n I L, n_i I_i L_i}^J)$. Finalmente, de las ondas dispersadas se extraen los estados con dirección \hat{k} y proyección del espín M bien definidos, a través de $Y_{L N}(\hat{k}) \langle L N I M | J M_J \rangle$.

La sección eficaz diferencial inelástica está relacionada con la probabilidad de detectar la partícula en el estado final, en cualquier proyección del espín M . Por otro lado, a no ser que el estado inicial esté polarizado, todas las proyecciones M_i son igualmente probables, y tienen una probabilidad $p_i = 1/(2I_i + 1)$. Por tanto, la sección eficaz inelástica se obtiene de la expresión:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{i \rightarrow n}} = \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{MM_i} |A(\vec{k}_i, \vec{k})_{n_i I_i M_i, n I M}|^2 \quad (112)$$