

## Prólogo

*Cuando llegué al CSIC, hace ya más de seis años, mis conocimientos de Física Nuclear no eran muy distintos de los que tenía al acabar EGB. Me faltaba más de un curso para completar la licenciatura en la Universidad Autónoma y ya quería decidir qué camino de la Física iba a seguir. Lo que buscaba era una oportunidad para investigar, aun no sabiendo muy bien el significado de esa palabra. Tenía mis preferencias: por un lado, una rama de la Física en la cual la comparación con datos experimentales representase el 90% de su razón de ser; por otro, que no fuera una parcela demasiado aplicada y en la que no estuviera todo hecho. Supongo que en casi todos los campos de la Física actual (así como de otras ciencias) puede encontrarse un hueco en el que acomodar estas dos exigencias, pero en aquel tiempo yo estaba convencido de que sólo en la Física de Partículas o Nuclear iba a estar a gusto.*

*Este recuerdo de cómo me decidí a intentar formar parte del grupo de Física Nuclear del Instituto de Estructura de la Materia (IEM), es ahora una anécdota. Lo importante para mí, lo que queda, es que he tenido la suerte de tropezar con personas excepcionales tanto en el grupo nuclear como en algún grupo vecino, que han hecho de estos años en el CSIC una etapa de mi vida muy agradable.*

*En la memoria que comienza después de estas líneas se resume el final de la etapa de doctorado, que en cierto modo culmina el período de formación académica tradicional, comenzado en la enseñanza básica y que ha ocupado prácticamente toda mi vida hasta ahora. Es imposible expresar en pocas líneas mi gratitud a todas las personas (profesores y compañeros o ambas cosas) que me han permitido llegar hasta aquí. Sí intentaré agradecer algunas aportaciones concretas relacionadas de modo más inmediato con este trabajo.*

*En esta memoria se resumen algunos resultados para el proceso  $(e, e'p)$  obtenidos con un formalismo totalmente relativista que hemos desarrollado durante los últimos años. La construcción a partir de cero de este formalismo*

*y los programas de ordenador necesarios habría supuesto un esfuerzo desproporcionado y en parte inútil. El espíritu de la investigación científica permite aprovechar resultados anteriores. En este sentido, este trabajo se beneficia de la amplia experiencia en el estudio teórico de la estructura nuclear mediante dispersión de electrones de todos los miembros del grupo de Física Nuclear del IEM. Por ejemplo, Juan Antonio Caballero ha estado trabajando en este tema en los últimos años, y su experiencia ha sido muy valiosa. Además, a través suyo hemos obtenido el código no relativista DWEEPY, desarrollado en Pavia y Amsterdam para el análisis del proceso  $(e, e'p)$ . Pedro Sarriguren ha proporcionado algunos resultados para el estado fundamental de núcleos mágicos obtenidos con modelos no relativistas.*

*Joe McDermott desarrolló hace dos años un código de ordenador para el proceso  $(e, e'p)$  (RDEEP) similar al nuestro, aunque con algunas aproximaciones a la hora de calcular la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón que nosotros hemos intentado eliminar en este trabajo. Joe puso a nuestra disposición una copia de su código, lo cual sin duda ha facilitado enormemente la tarea de depuración de nuestro propio código, al tener resultados similares con los cuales comparar.*

*Para el cálculo de la interacción del protón con el núcleo residual se utilizan potenciales ópticos ajustados a partir de datos de dispersión elástica de protones. La tarea de ajuste y determinación de estos potenciales representa un esfuerzo importante que, afortunadamente, no hemos tenido que realizar dado que S. Hama, de la Universidad de Ohio nos ha proporcionado amablemente las rutinas en FORTRAN con los potenciales obtenidos por su grupo en los últimos años, en el marco de un modelo relativista con potenciales escalares y vectores.*

*Otro de los ingredientes del modelo lo constituyen las funciones de onda relativistas para los nucleones en el núcleo blanco. En este trabajo hemos partido del código TIMORA, desarrollado por C. J. Horowitz y colaboradores, que puede obtenerse fácilmente a través de sus autores.*

*Partiendo de estos resultados anteriores, nuestro trabajo se ha centrado en la construcción del formalismo del proceso  $(e, e'p)$  en la aproximación de impulso relativista, con inclusión de forma exacta del efecto de la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón.*

*Poco antes de la finalización de este trabajo, se ha publicado un estudio, realizado por Y. Jin, con algunas características similares al nuestro. Los resultados que expondremos aquí están calculados con varias expresiones para*

*el operador de corriente del nucleón, incluyendo la expresión utilizada por Y. Jin, y por tanto son complementarios de los suyos.*

*Todos los datos experimentales que hemos utilizado han sido obtenidos en el laboratorio de Física Nuclear de NIKHEFK (Amsterdam). Agradecemos a Louk Lapikás y Gerard van der Steenhoven el proporcionarnos los ficheros con estos datos, y su disposición a contestarnos todas las cuestiones sobre este tema que les hemos planteado. A ellos y a Joe McDermott les agradezco la hospitalidad mostrada durante mi breve estancia en NIKHEFK.*

*Aparte de estas aportaciones concretas he de hacer una mención especial a la directora de este trabajo, Elvira Moya. Sin su ayuda nada de lo que sigue habría visto la luz. Además tengo que agradecerle la paciencia mostrada en sus intentos por enseñarme a hacer las cosas bien (que yo lo haya aprendido es otra cuestión).*

*Si hay algo bueno en este trabajo se debe sobre todo a Elvira y también a Pedro Sarriguren, Juan Antonio Caballero y Eduardo Garrido. Todos ellos se han tomado la molestia de releer y corregir las distintas versiones de esta memoria, lo cual han realizado de buen grado, con generosidad y claridad de ideas. También he de mencionar a Humberto Garcilazo por estar siempre dispuesto a resolver las innumerables dudas que le he planteado.*

*Además, existen contribuciones en un plano más personal, pero igualmente valiosas. Un recuerdo cariñoso a Ester Ruiz, por haber alegrado el despacho con su presencia durante su pasada estancia entre nosotros. Le deseo lo mejor en sus nuevos proyectos. Y qué decir de ese torbellino humano, Juan García-Bellido, el vecino de al lado. Siempre agradeceré su atención e interés en responder a mis peregrinas preguntas sobre Física Teórica y su participación respetuosa, junto con mis compañeros ya antes citados, en las discusiones sobre la vida y el mundo surgidas en la antesala del comedor. Gracias a ellos y a algunas personas más, a las cuales este pequeño espacio no me permite hacer justicia, no se ha extinguido por completo el entusiasmo juvenil con el que empecé mis andanzas en el Consejo.*

*Por último, un espacio para Ana que, además de otras cosas que poco tienen que ver con esta tesis, ha mecanografiado muchas de estas páginas. A falta de algo mejor que sin duda se merecen, quiero dedicar este trabajo a ella, a toda mi familia y a Chute.*

# Índice

<b>I Teoría</b>	<b>15</b>		
<b>1 Introducción</b>	<b>17</b>		
1.1	Dispersión de electrones por núcleos . . . . .	17	
1.2	Experimentos en coincidencia . . . . .	19	
1.3	Experimentos ( $e, e'p$ ) . . . . .	19	
1.3.1	Formalismo relativista <i>vs.</i> formalismo no relativista . . . . .	20	
1.3.2	Estudios previos . . . . .	21	
1.3.3	El problema de los números de ocupación . . . . .	21	
1.4	Objetivos de este trabajo . . . . .	22	
1.4.1	Organización de este trabajo . . . . .	23	
<b>2 El Proceso (<math>e, e'p</math>)</b>	<b>25</b>		
2.1	Cinemática . . . . .	25	
2.2	Aproximación de impulso (IA) . . . . .	26	
2.2.1	Distorsión del electrón . . . . .	29	
2.2.2	Cinemática . . . . .	29	
2.2.3	Forma de la corriente nuclear . . . . .	31	
2.2.4	Conservación de la corriente . . . . .	36	
2.3	Separación longitudinal–transversal . . . . .	37	
2.3.1	Extracción de las componentes . . . . .	39	
2.4	Sección eficaz electrón–protón libre . . . . .	41	
2.5	Aproximación de factorización . . . . .	42	
2.6	Determinación de la estructura nuclear . . . . .	43	
2.6.1	Aproximación de impulso y modelo de capas . . . . .	47	
2.7	Resumen . . . . .	48	
<b>3 Aproximación Relativista para el Núcleo Atómico</b>	<b>49</b>		
3.1	Formalismo relativista . . . . .	51	
3.1.1	Teoría de campo medio (MFT) . . . . .	53	
3.2	Descripción relativista de algunos núcleos mágicos . . . . .	57	
3.2.1	Energías de ligadura y niveles monoparticulares . . . . .	57	
3.2.2	Radios y distribuciones de carga . . . . .	61	
3.2.3	Discusión . . . . .	63	
3.3	Potenciales ópticos relativistas . . . . .	67	
3.4	Resumen . . . . .	69	
<b>4 Aproximación DWBA para el Electrón</b>	<b>71</b>		
4.1	Introducción . . . . .	71	
4.2	Efecto de la interacción de Coulomb . . . . .	71	
4.2.1	Desplazamiento del momento . . . . .	71	
4.2.2	Otros efectos de la distorsión coulombiana . . . . .	73	
4.2.3	Efectos de focalización y cálculos aproximados de DWBA . . . . .	75	
4.3	Dependencias introducidas en la sección eficaz . . . . .	78	
4.3.1	Dependencia en la distribución de carga . . . . .	78	
4.3.2	Dependencia en la cinemática . . . . .	78	
4.4	Resumen . . . . .	79	
<b>II Resultados</b>	<b>81</b>		
<b>5 Análisis de la Aproximación de Impulso: <math>^{208}Pb</math></b>	<b>83</b>		
5.1	Comparación con otros resultados con formalismo relativista . . . . .	83	
5.1.1	PWBA . . . . .	83	
5.1.2	DWBA . . . . .	84	
5.2	Comparación con cálculos no relativistas . . . . .	87	
5.2.1	Operador de corriente . . . . .	87	
5.2.2	Potenciales ópticos . . . . .	88	
5.2.3	Función de ondas ligada . . . . .	89	
5.2.4	Comparación . . . . .	90	
5.3	Dependencia en el potencial óptico . . . . .	93	
5.4	Dependencia en la función de onda ligada . . . . .	95	
5.5	Dependencia en la forma de la corriente . . . . .	97	
5.6	Distorsión coulombiana . . . . .	99	
5.7	Resumen . . . . .	100	

<b>6</b>	<b>Análisis de la Aproximación de Impulso: <math>^{40}\text{Ca}</math></b>	<b>105</b>
6.1	Distorsión Coulombiana . . . . .	105
6.2	Resultados para la capa $2s_{1/2}$ . . . . .	108
6.2.1	Cinemática paralela . . . . .	108
6.2.2	Cinemática perpendicular . . . . .	111
6.3	Resultados para la capa $1d_{3/2}$ . . . . .	113
6.4	Variación con el potencial óptico . . . . .	113
6.5	Variación con el operador de corriente . . . . .	114
6.6	Separación L-T . . . . .	115
6.6.1	Diagrama de Rosenbluth y separación L-T . . . . .	117
6.6.2	Extracción L-T en la capa $2s_{1/2}$ de $^{40}\text{Ca}$ . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Resumen y Conclusiones</b>	<b>129</b>
7.1	Análisis del proceso $(e, e'p)$ . . . . .	129
7.1.1	Operador para la corriente . . . . .	129
7.1.2	Factorización . . . . .	130
7.1.3	Distorsión coulombiana . . . . .	130
7.1.4	Potenciales ópticos . . . . .	131
7.1.5	Factores espectroscópicos . . . . .	131
7.1.6	Separación L-T . . . . .	132
7.2	Conclusión . . . . .	133

**III Apéndices** **135**

**A Resolución de la Ecuación de Dirac** **137**

A.1	Ecuación de Dirac con potencial central . . . . .	137
A.2	Obtención de estados ligados del nucleón . . . . .	138
A.3	Estados de dispersión . . . . .	138
A.3.1	Caso libre . . . . .	139
A.3.2	Potencial no nulo . . . . .	139

**B Sección Eficaz para el Proceso  $(e, e'p)$**  **143**

B.1	Sección eficaz electrón–nucleón en PWBA . . . . .	143
B.1.1	Amplitud de transición . . . . .	144

B.1.2	Nucleón libre . . . . .	145
B.1.3	Nucleón en un potencial central . . . . .	147
B.1.4	DWIA . . . . .	147
B.2	Sección eficaz electrón–protón en DWBA . . . . .	148
B.3	Extensión al proceso $(e, e'p)$ . . . . .	148
B.3.1	Comparación con los datos experimentales . . . . .	152
B.3.2	Eliminación del centro de masas . . . . .	153

**C Cálculo Numérico** **155**

C.1	Sección eficaz en DWBA . . . . .	155
C.1.1	Cálculo de las integrales radiales . . . . .	155
C.1.2	Límites al desarrollo en ondas parciales . . . . .	156
C.1.3	Comprobación del resultado numérico . . . . .	158
C.1.4	Tiempos de cálculo . . . . .	159
C.2	Cálculo Hartree relativista . . . . .	160
C.3	Extracción del factor espectroscópico . . . . .	161

## Lista de Figuras

1.1	Sección eficaz de dispersión de electrones por núcleos frente a la energía transferida. . . . .	18
2.1	Diagrama del proceso $(e, e'p)$ en la aproximación de Born de intercambio de un fotón. . . . .	25
2.2	Diagrama del proceso $(e, e'p)$ en la aproximación de impulso. . . . .	27
2.3	Elección de ejes y ángulos para $(e, e'p)$ . . . . .	30
2.4	Sección eficaz reducida para el proceso $(e, e'p)$ calculada con distintos operadores . . . . .	34
2.5	Comparación entre las secciones eficaces reducidas para el proceso $(e, e'p)$ obtenidas a partir de operadores para la corriente nuclear con diversas prescripciones para recuperar conservación de corriente. Cinemática paralela. . . . .	36
2.6	Igual que la figura 2.6 con cinemática perpendicular . . . . .	37
2.7	Contribución de las componentes longitudinales y transversales de la corriente nuclear a la sección eficaz reducida para el proceso $(e, e'p)$ . . . . .	40
2.8	Esquema de algunos estados observados en la reacción $(e, e'p)$ . . . . .	44
2.9	Sección eficaz reducida frente a la energía desaparecida (abajo) y frente al momento perdido (arriba) para la reacción ${}_{82}^{208}Pb \rightarrow {}_{81}^{207}Tl$ en $(e, e'p)$ . . . . .	45
2.10	Sección eficaz reducida para $(e, e'p)$ frente a $E_m$ y $P'$ . . . . .	46
3.1	Espectro de niveles monoparticulares del ${}^{16}O$ . . . . .	59
3.2	Espectro de niveles monoparticulares del ${}^{40}Ca$ . . . . .	60
3.3	Espectro de niveles monoparticulares del ${}^{48}Ca$ . . . . .	61
3.4	Espectro de niveles monoparticulares del ${}^{90}Zr$ . . . . .	62
3.5	Espectro de niveles monoparticulares para ${}^{208}Pb$ . . . . .	63
3.6	Densidad de carga para ${}^{16}O$ y ${}^{90}Zr$ . . . . .	64
3.7	Densidad de carga para ${}^{40}Ca$ y ${}^{48}Ca$ . . . . .	65
3.8	Densidad de carga para ${}^{208}Pb$ . . . . .	66
4.1	Desplazamiento en el momento debido a la interacción coulombiana. . . . .	72
4.2	Factor de Forma medido mediante $(e, e')$ para la transición $M1$ a estados excitados $1^+$ de ${}^{238}U$ . . . . .	73
4.3	Efectos de la distorsión coulombiana en el proceso $(e, e'p)$ . . . . .	75
5.1	Sección eficaz reducida en $GeV^{-3}$ para el proceso $(e, e'p)$ comparada con resultados de otros autores . . . . .	84
5.2	Comparación con otros cálculos en DWBA con formalismo relativista . . . . .	85
5.3	Potenciales ópticos y funciones de onda utilizados en los cálculos de la sección 5.3 . . . . .	88
5.4	Comparación entre densidades radiales y secciones eficaces reducidas obtenidas a partir de modelos relativistas y no relativistas . . . . .	89
5.5	Comparación entre las secciones eficaces reducidas obtenidas con formalismo relativista y no relativista en DWIA y PWIA . . . . .	90
5.6	Comparación entre las secciones eficaces reducidas obtenidas con formalismo relativista y no relativista utilizando la misma función de ondas para el nucleón ligado . . . . .	91
5.7	Potenciales ópticos para ${}^{208}Pb$ . . . . .	92
5.8	Secciones eficaces reducidas en DWIA con varios potenciales ópticos . . . . .	93
5.9	Comparación entre las secciones eficaces reducidas obtenidas en DWBA y PWBA para ${}^{208}Pb$ . . . . .	96
6.1	Secciones eficaces reducidas en DWIA para ${}^{40}Ca$ con cinemática paralela . . . . .	106
6.2	Secciones eficaces reducidas en DWIA para ${}^{40}Ca$ con cinemática perpendicular . . . . .	107
6.3	Comparación entre las secciones eficaces reducidas para ${}^{40}Ca$ obtenidas en cinemática paralela a partir de los modelos HS y NL1 . . . . .	109
6.4	Comparación entre las secciones eficaces reducidas para ${}^{40}Ca$ obtenidas a partir del modelo HS y NL1, en cinemática perpendicular . . . . .	111
6.5	Sección eficaz reducida obtenida con diferentes operadores para la corriente del nucleón en cinemática paralela . . . . .	114

6.6	Sección eficaz reducida en $GeV^{-3}$ para $^{40}Ca$ obtenida con diferentes operadores para la corriente del nucleón con cinemática perpendicular . . . . .	115
6.7	Diagrama de Rosenbluth para $^{40}Ca$ . . . . .	119
6.8	Diagramas de Rosenbluth para $^{208}Pb$ . . . . .	120
6.9	$R_G$ en la aproximación de momento efectivo para la capa $2s_{1/2}$ de $^{40}Ca$ . . . . .	125
6.10	$R_G$ en DWBA para la capa $2s_{1/2}$ de $^{40}Ca$ . . . . .	126
6.11	$R_G$ deducido a partir del diagrama de Rosenbluth en $^{40}Ca$ . .	127
B.1	Diagrama de Feynmann para el proceso de dispersión electrón-protón con intercambio de un fotón. . . . .	143
C.1	Comparación del cálculo de la sección eficaz reducida del proceso $(e, e'p)$ en PWBA con el resultado en DWBA con $Z \approx 0$	158

## Lista de Tablas

1.1	Porcentajes de ocupación derivados del análisis del proceso ( $e, e'p$ ) en algunos núcleos mágicos . . . . .	22
2.1	Comparación entre las elecciones experimentales de la cinemática más comunes para el proceso ( $e, e'p$ ). . . . .	31
3.1	Parámetros de los modelos relativistas (masas en $MeV$ , $b_2$ en $fm^{-1}$ ). . . . .	55
3.2	Predicciones de los modelos relativistas en materia nuclear . . . . .	56
3.3	Energías de ligadura por nucleón en $MeV$ . . . . .	57
3.4	Contribuciones a la energía de ligadura (en $MeV$ ) de los términos de $\mathcal{L}_{MFT}^I$ . . . . .	58
3.5	Separación de espín-órbita en algunos núcleos mágicos (en $MeV$ ). . . . .	58
3.6	Radios de carga y diferencia entre los radios de las distribuciones de neutrones y protones en $fm$ . . . . .	61
5.1	Efectos de focalización en DWBA . . . . .	86
5.2	Factores de escala deducidos (N) con tres parametrizaciones del potencial óptico. También se tabula la cantidad $M/g.d.l$ (ver el Apéndice C) y el error estadístico. Resultados de cálculo en PWBA con $q_{eff}$ , $J_{ncc2}$ y cinemática paralela. . . . .	94
5.3	Factores de escala deducidos (N) con funciones de onda del nucleón ligado obtenidas con los modelos HS y NL1. También se tabula el radio cuadrático medio en $fm$ . Potencial óptico fit 2, operador $J_{ncc1}$ y DWBA para el electrón. . . . .	95
5.4	Comparación entre los factores de escala (N) deducidos a partir de las secciones eficaces obtenidas con diferentes expresiones del operador de corriente nuclear. Capa $3s_{1/2}$ en $^{208}Pb$ , potencial óptico fit 2, modelo HS y PWBA con $q_{eff}$ para el electrón. . . . .	97
5.5	Efecto de la distorsión coulombiana en el factor de escala ( $N$ ) ajustado para reproducir los datos experimentales. Cálculo en DWIA para $^{208}Pb$ con el potencial óptico fit 2, modelo HS. Cinemática paralela, $T_F = 100 MeV$ , $\epsilon_i = 375 MeV$ . . . . .	100
6.1	Efecto de la distorsión coulombiana en el factor de escala ( $N$ ) ajustado para reproducir los datos experimentales. Para el mismo cálculo representado en la figura 6.1. . . . .	105
6.2	Igual que la tabla 6.1 para cinemática perpendicular. . . . .	108
6.3	Factores de escala ( $N$ ) para las secciones eficaces reducidas calculadas con funciones de onda del nucleón ligado obtenidas a partir de los modelos HS y NL1 para el caso representado en el figura 6.1. Se utiliza PWBA en la aproximación de momento efectivo y el operador $J_{ncc2}$ . . . . .	108
6.4	Factores de escala para la capa $2s_{1/2}$ con cinemática paralela . . . . .	109
6.5	Factores de escala para la capa $2s_{1/2}$ con cinemática perpendicular . . . . .	111
6.6	Factores de escala para la capa $2s_{1/2}$ con distintos potenciales ópticos . . . . .	112
6.7	Condiciones cinemáticas elegidas para construir el diagrama de Rosenbluth . . . . .	118
6.8	Comparación entre las funciones de estructura $W_L$ y $W_T$ teóricas con las obtenidas mediante el diagrama de Rosenbluth para el núcleo $^{40}Ca$ . $P' = 0 MeV$ . . . . .	121
6.9	Comparación entre las funciones de estructura $W_L$ y $W_T$ obtenidas mediante el diagrama de Rosenbluth y los valores teóricos, para el núcleo $^{40}Ca$ . $P' = 50 MeV$ . . . . .	122
6.10	Comparación entre $R_G$ y $W_T/W_L$ obtenidas mediante el diagrama de Rosenbluth y los valores teóricos, para el núcleo $^{208}Pb$ . . . . .	123
6.11	Condiciones cinemáticas correspondientes a los datos utilizados en la separación experimental de las funciones de estructura en la capa $2s_{1/2}$ de $^{40}Ca$ para construir el diagrama de Rosenbluth. . . . .	124
C.1	Potencia de cálculo requerida por los códigos desarrollados en este trabajo . . . . .	160

**Parte I**

**Teoría**



# 1 Introducción

En el estudio de la estructura nuclear se obtiene gran cantidad de información experimental bombardeando núcleos con diferentes partículas (sondas), midiendo secciones eficaces de dispersión.

A la hora de seleccionar las partículas adecuadas como sonda, se ha de tener en cuenta:

1. La interacción de la sonda con el núcleo no debe ser tan intensa como para perturbar demasiado el sistema en estudio. Debe permitir estudiar el sistema nuclear sin alterarlo significativamente.
2. Por otro lado, esa interacción debe ser lo bastante intensa como para que la sonda no pase a través del núcleo sin que se vea afectada de forma medible.

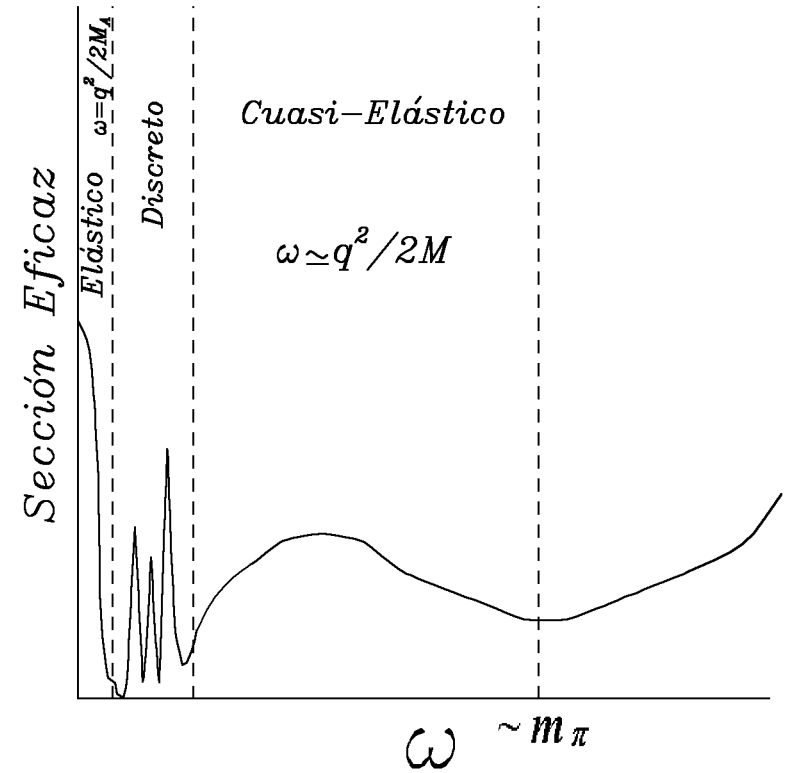
Dejando al margen la interacción débil, pueden distinguirse dos clases de sondas: las que interactúan con el núcleo sólo por vía electromagnética (electrones, positrones, fotones, muones, etc.) y las hadrónicas que además se ven afectadas por la interacción fuerte (principalmente protones, neutrones y piones).

La intensidad de la interacción electromagnética viene determinada por la constante de estructura fina ( $\alpha \approx 1/137$ ) que es lo suficientemente pequeña como para que las sondas *electromagnéticas* satisfagan el primer requisito y puedan considerarse sólo procesos de primer orden en  $\alpha$  (aproximación de Born de intercambio de un fotón). Además, la interacción está bien determinada.

Los experimentos con las sondas electromagnéticas más comunes, electrones y fotones ( $e^-$ ,  $\gamma$ ) cumplen los dos requisitos antes expuestos. Aunque muy similares, presentan algunas características diferentes. A diferencia de los fotones, los electrones poseen carga eléctrica y masa no nula por lo que es posible variar el momento cinético ( $\mathbf{q}$ ) y la energía ( $\omega$ ) transferida al núcleo de forma independiente (siempre que se verifique  $\omega^2 - \mathbf{q}^2 \leq 0$ ), lo que no sucede con fotones reales ( $\omega^2 - \mathbf{q}^2 = 0$ ).

## 1.1 Dispersión de electrones por núcleos

Como se ve esquemáticamente en la figura 1.1, para energías transferidas



**Figura 1.1:** Sección eficaz de dispersión de electrones por el núcleo frente a la energía transferida ( $\omega$ ), con el momento transferido  $q$  fijo.

bajas y medias, puede hablarse de tres regímenes experimentales diferenciados: la zona de dispersión elástica, la zona de transiciones discretas y el pico cuasielástico. Más allá en energía (y del alcance de este trabajo) se encuentra el umbral de producción de piones ( $m_\pi \approx 140 \text{ MeV}$ ) y la excitación de resonancias nucleónicas. El tipo de información que puede obtenerse en cada una de estas regiones es distinto:

1. Dispersión Elástica: Esta primera región, ( $\omega \approx \frac{q^2}{2M_A}$ , donde  $M_A$  es la masa del núcleo) corresponde a procesos elásticos en los que la energía transferida al núcleo blanco se transforma en energía cinética. En este régimen se estudian propiedades del estado fundamental, como distribuciones de carga y de corriente.

2. Excitación de Estados Discretos: Al aumentar la energía transferida, más allá de la zona elástica pueden observarse transiciones desde el estado fundamental a los estados excitados del núcleo. En esta región, por tanto, se estudian propiedades dinámicas y de transición. La sección eficaz presenta máximos bien definidos para valores de la energía desaparecida (la que no es convertida en energía cinética) correspondientes a las energías de excitación nucleares.
3. Pico Cuasielástico: Corresponde a condiciones cinemáticas para los nucleones equivalentes al caso elástico para todo el núcleo ( $\omega \approx \frac{\mathbf{q}^2}{2M}$ ,  $M$  es la masa del nucleón) en las que un nucleón ligado absorbe la energía transferida en forma de energía cinética y alcanza un estado del continuo. Por tanto puede interpretarse como dispersión elástica por nucleones dentro del núcleo. Es adecuado para determinar propiedades monoparticulares, como las predicciones del modelo de capas para las energías y funciones de onda de los nucleones. Puesto que los nucleones no están en reposo en el núcleo y están fuera de la capa de masas (*off-shell*:  $E^2 \neq \mathbf{P}^2 + M^2$ ), este pico es bastante más ancho que en la primera región.

## 1.2 Experimentos en coincidencia

Además del caso más sencillo, en el que la única partícula que se detecta en el estado final es el proyectil, también pueden realizarse experimentos para detectar *en coincidencia* la partícula sonda junto con fragmentos separados del núcleo blanco, o incluso el propio núcleo. La dificultad experimental es mayor ya que se necesitan aceleradores con un factor de trabajo alto (debe mantenerse el flujo de partículas incidentes un tiempo lo suficientemente grande como para caracterizar las coincidencias), e intensidades de flujo y sensibilidades de los detectores mayores (las secciones eficaces a medir son mucho menores, al haberse reducido el espacio de fases disponible).

Como contrapartida, puede obtenerse información muy detallada sobre el sistema en estudio, al ser este proceso sensible a la interacción entre los fragmentos arrancados y el núcleo residual.

## 1.3 Experimentos ( $e, e'p$ )

En este trabajo estudiaremos en especial el proceso ( $e, e'p$ ), en el cual se

detecta el electrón dispersado en coincidencia con un protón emitido, en la región cinemática del pico cuasielástico.

### 1.3.1 Formalismo relativista vs. formalismo no relativista

Las energías habituales en este tipo de experimentos son del orden de cientos de  $MeV$  para el electrón, mucho mayores que su masa en reposo ( $m_e \approx 0.5 MeV$ ). Por tanto, es necesario tratar a éste como una partícula relativista. De hecho, comúnmente se trabaja con la aproximación *ultra-relativista* en la que la masa del electrón se desprecia frente a su energía (de este modo, la energía del electrón y su momento cinético son iguales en magnitud:  $\epsilon = |\mathbf{k}|$ ).

En el estudio de la estructura nuclear predominan los modelos basados en aproximaciones no relativistas. Esto ha hecho que existan bastantes modelos para el proceso ( $e, e'p$ ) en los que se trata de forma relativista la parte electrónica y de forma no relativista la parte nuclear [GiuP87]. Esto obliga a una reducción no relativista del hamiltoniano de interacción, a través de expansiones en potencias de  $P/M$  tipo Foldy-Wouthuysen [FW50]. En la aproximación en que la función de ondas del electrón es descrita a través de ondas planas (PWBA), este enfoque mixto ha tenido bastante éxito.

Sin embargo, para núcleos medios y pesados ( $Z \geq 20$ ) es necesario tener en cuenta la interacción coulombiana del núcleo con los electrones. Este efecto puede incorporarse de forma exacta, en la aproximación de intercambio de un fotón, resolviendo la ecuación de Dirac para el electrón en presencia del potencial coulombiano, con un desarrollo en ondas parciales de la función de ondas del electrón, en lo que se conoce como *Aproximación de Born de Ondas Distorsionadas (DWBA)*. Este formalismo requiere gran potencia de cálculo, por lo que es difícil de incorporar a modelos no relativistas, en los que la expresión del operador de interacción electrón-núcleo es relativamente complicada.

La distorsión coulombiana representa no obstante una corrección importante al cálculo de la sección eficaz ( $e, e'p$ ) en núcleos pesados y por ello se ha tratado de incorporar en los modelos no relativistas de forma aproximada, mediante el desarrollo de la función de ondas distorsionadas del electrón en potencias de  $\frac{Z\alpha}{kR}$ . Sin embargo la situación es algo confusa ya que las predicciones a primer y segundo orden difieren bastante y al no tener como referencia resultados que incluyan la distorsión de forma exacta no es posible determinar fácilmente la validez de estas aproximaciones.

Por el contrario en la *Aproximación de Impulso Relativista*, la expresión para la corriente nuclear es sencilla, similar a la correspondiente a nucleones libres, el formalismo trata por igual a la parte nuclear y electrónica del proceso y es factible incorporar la distorsión coulombiana de forma exacta.

### 1.3.2 Estudios previos

Hacia 1970 aparecen cálculos del proceso ( $e, e'p$ ) con formalismo relativista y distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón [Kn71, ViA71]. Sin embargo, estos resultados se basaban en modelos del núcleo blanco y de la interacción de estados finales muy simples y poco realistas. Además los resultados presentados se restringían casi exclusivamente a cinemática perpendicular. Este camino se abandonó hasta nuestros días.

Recientemente se han publicado dos estudios sobre el proceso ( $e, e'p$ ) [McD90, JnO92] con características similares: formalismo totalmente relativista e inclusión de la distorsión coulombiana para el electrón mediante desarrollo en ondas parciales. Ambos trabajos predicen resultados notablemente distintos para el caso de la capa  $3s_{1/2}$  en  $^{208}Pb$ , cálculo utilizado como comparación y único común a ambos trabajos. Se hace por tanto necesario averiguar las causas de esta discrepancia.

Por otro lado, se están realizando experimentos en ( $e, e'p$ ) con el propósito de separar las componentes longitudinales y transversales de la corriente (véase el capítulo segundo) en núcleos medios ( $^{40}Ca$  [Bu92]). Hasta el momento no conocemos ningún estudio teórico de esta separación en procesos ( $e, e'p$ ) que incluya de forma exacta el efecto de la distorsión coulombiana.

### 1.3.3 El problema de los números de ocupación

Uno de los problemas en la interpretación de los experimentos de ( $e, e'p$ ) se encuentra en los valores teóricos demasiado altos predichos para las secciones eficaces. Esto puede ser debido a dos causas, básicamente:

1. El modelo de partículas independientes para el núcleo no es válido.
2. El tratamiento de los mecanismos de reacción es incompleto debido a las aproximaciones realizadas.

A partir del modelo de capas extremo, y utilizando la aproximación de impulso, la interpretación de los datos experimentales de un gran número

de núcleos conduce sistemáticamente a factores espectroscópicos para los niveles más externos que son de un 20% a un 50% demasiado bajos, sin que por el momento se conozca una causa única que lo explique satisfactoriamente. Se ha argumentado que una mejora del tratamiento de la distorsión coulombiana en los modelos no relativistas conduce a predicciones teóricas para las secciones eficaces más bajas y por tanto a factores espectroscópicos experimentales más cercanos a los valores teóricos [Qn88, Her88]; asimismo, los modelos relativistas dan lugar a factores espectroscópicos más altos que los no relativistas (ver tabla 1.1).

**Tabla 1.1:** Porcentaje de ocupación derivado del análisis del proceso ( $e, e'p$ ) en algunos núcleos mágicos, extraídos de las referencias [Qn88, McD90, JnO92] para el plomo, [Her88] para el zirconio y [KrB89, McD90, JnO92] para el calcio.

Modelo	$^{208}Pb$			$^{90}Zr$	$^{40}Ca$	
	$3s_{1/2}$	$2d_{3/2}$	$1h_{11/2}$	$2p_{1/2} - 2p_{3/2}$	$1d_{3/2}$	$2s_{1/2}$
Relativista	65(5)–71(6)	—	—	48(6)	66(6)–80(7)	75(6)
No relativista	49(5)	53(4)	42(4)	41(5)	65(5)	50(6)

Como se discute con detalle en los capítulos cinco y seis, la diferencia entre las ocupaciones deducidas a partir de análisis previos de los datos experimentales es demasiado grande como para ser explicada por las correcciones habituales al modelo de partículas independientes (correlaciones).

## 1.4 Objetivos de este trabajo

Basándonos en los trabajos previos sobre dispersión de electrones en general [Mo86], distorsiones coulombianas [Ud89, Mo84] y procesos ( $e, e'p$ ) [GaRM91, CaDP92, Ca89], se pretende elaborar un modelo del proceso ( $e, e'p$ ) que incluya los siguientes puntos:

1. Inclusión de forma exacta de los efectos de distorsión coulombiana de la onda del electrón, esto es, mediante el desarrollo en ondas parciales y resolución numérica de la ecuación de Dirac.

2. Tratamiento relativista también para la parte nuclear, necesario para hacer tratable el punto anterior. Por tanto se han usado modelos relativistas de estructura nuclear para el núcleo blanco y para la interacción de estados finales entre el núcleo residual y el nucleón emitido, para lo que se han puesto a punto las herramientas de cálculo precisas.

El desarrollo del formalismo antes descrito constituye el primer objetivo planteado al iniciar este trabajo de tesis doctoral. Una vez superado este punto los objetivos inmediatos son:

1. Comparar con los cálculos relativistas similares [JnO92, McD90], explicando, si fuera posible, las razones de las discrepancias observadas.
2. Comprobar de forma cuantitativa la validez de las aproximaciones utilizadas para incluir la distorsión coulombiana en los cálculos no relativistas.

Por último, hay un tercer grupo de objetivos, con los que se pretende establecer la validez del formalismo y programas de ordenador desarrollados, contrastando las predicciones teóricas con datos experimentales de núcleos mágicos (en los que la información disponible es más abundante). En este grupo de objetivos pueden citarse:

1. Estudio de las diversas prescripciones para extender la expresión de la corriente nuclear libre fuera de la capa de masas.
2. Comparación con resultados no relativistas.

#### 1.4.1 Organización de este trabajo

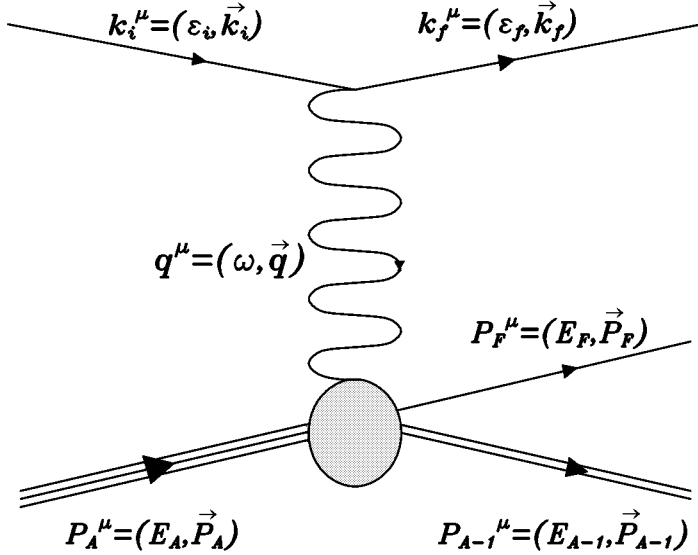
En este trabajo hemos diferenciado tres partes en el siguiente orden:

1. Teoría: Incluye este primer capítulo con la introducción y los objetivos; en el capítulo dos se resume la teoría general de los experimentos de dispersión de electrones, las expresiones de la separación L-T, y los elementos fundamentales de la aproximación de impulso. En el capítulo tercero se revisa el formalismo relativista para la parte nuclear y se comparan los resultados con los de modelos no relativistas. Por fin el capítulo cuarto está dedicado a la aproximación de ondas distorsionadas para el electrón.

2. Resultados: El capítulo cinco incluye resultados en el núcleo  $^{208}\text{Pb}$ , comparando con cálculos anteriores, tanto relativistas como no relativistas. Se calculan los factores espectroscópicos y se examinan los postulados de la aproximación de impulso. En el capítulo seis se resumen los resultados para  $^{40}\text{Ca}$ . El capítulo siete se dedica a las conclusiones y resumen.
3. Apéndices: varios capítulos con el detalle de algunas fórmulas y algunas cuestiones más técnicas. El apéndice A se dedica a los detalles de la resolución de la ecuación de Dirac. El apéndice B contiene el detalle de algunas expresiones para la sección eficaz del proceso  $(e, e'p)$ . El apéndice C contiene información sobre los programas de ordenador desarrollados.

## 2 El Proceso $(e, e'p)$

### 2.1 Cinemática



**Figura 2.1:** Diagrama del proceso  $(e, e'p)$  en la aproximación de Born de intercambio de un fotón.

En la figura 2.1 hemos representado el proceso  $(e, e'p)$  en la aproximación de Born de intercambio de un fotón.  $k_i^\mu = (\epsilon_i, \vec{k}_i)$ ,  $k_f^\mu = (\epsilon_f, \vec{k}_f)$  son los cuadrivectores del electrón incidente y dispersado respectivamente,  $q^\mu = (\omega, \vec{q})$  el del fotón intercambiado. En el vértice nuclear,  $P_A^\mu = (E_A, \vec{P}_A)$ ,  $P_{A-1}^\mu = (E_{A-1}, \vec{P}_{A-1})$  son los cuadrivectores del núcleo blanco y residual.  $P_F^\mu = (E_F, \vec{P}_F)$  es el del protón emitido. La conservación del cuadrivector para el fotón se expresa como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f = \mathbf{P}_F + \mathbf{P}_{A-1} - \mathbf{P}_A \quad (2.1)$$

$$\omega = \epsilon_i - \epsilon_f = E_F + E_{A-1} - E_A \quad (2.2)$$

Introduciendo las energías cinéticas:

$$T_{A-1} = E_{A-1} - M_{A-1} = (\mathbf{P}_{A-1}^2 + M_{A-1}^2)^{\frac{1}{2}} - M_{A-1} \quad (2.3)$$

$$T_F = E_F - M = (\mathbf{P}_F^2 + M^2)^{\frac{1}{2}} - M \quad (2.4)$$

$$T_A = E_A - M_A = (\mathbf{P}_A^2 + M_A^2)^{\frac{1}{2}} - M_A \quad (2.5)$$

obtenemos para la energía transferida:

$$\omega = T_{A-1} + T_F - T_A + M_{A-1} - M_A + M \quad (2.6)$$

Se define la *energía desaparecida* (o energía perdida  $E_m$ ) como la energía convertida en *energía interna* durante el proceso, esto es, no presente como energía cinética añadida al estado final:

$$E_m = \omega - T_{A-1} - T_F + T_A = M_{A-1} - M_A + M \quad (2.7)$$

$M_{A-1} - M_A + M$  representa la diferencia en energía de ligadura entre el estado nuclear final y el inicial. Si el núcleo residual se encuentra en su estado fundamental,  $E_m$  representa la *energía de separación* ( $E_s$ ) del protón arrancado. En general, el núcleo residual puede estar en un estado excitado de forma que  $M_{A-1} = M_{A-1}^0$  (estado fundamental) +  $E_x$  (energía de excitación) y

$$E_m = E_s + E_x \quad (2.8)$$

También se define el *momento perdido* como  $\mathbf{P}_m = \mathbf{P}' = \mathbf{P}_A - \mathbf{P}_{A-1}$ .

Como vemos, en el proceso  $(e, e'p)$  variando  $\omega$  y  $\mathbf{q}$  es posible elegir independientemente  $E_m$  y  $\mathbf{P}'$ .

### 2.2 Aproximación de impulso (IA)

En el cálculo de la sección eficaz del proceso  $(e, e'p)$  suelen aceptarse un conjunto de hipótesis que conforman la denominada *Aproximación de Impulso*. Se parte de la idea de que para los valores de energía y momento transferidos habituales en estos experimentos (longitud de onda asociada al fotón intercambiado  $\approx 0.8$  fm) es una buena aproximación considerar que dicho fotón virtual interactúa con un único nucleón como se esquematiza en la figura 2.2. Las hipótesis usuales son [FrM85]:

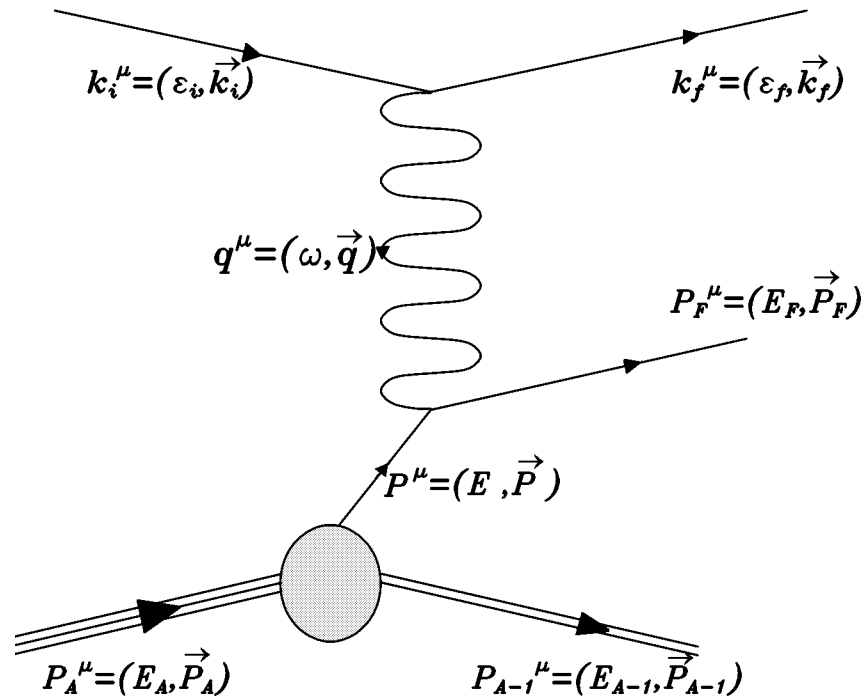


Figura 2.2: Diagrama del proceso  $(e, e'p)$  en la aproximación de impulso.

1. El fotón virtual emitido por el electrón es absorbido por un único nucleón, que es el que se detecta. Los demás nucleones son meros “espectadores”.
2. La expresión de la corriente nuclear puede calcularse a partir del operador de corriente para nucleones libres (por ejemplo con los mismos factores de forma) y sólo incluye, de acuerdo con el punto anterior, los efectos de interacción del fotón con el nucleón considerado (no se incluyen corrientes de intercambio de mesones).

En este proceso, con estas aproximaciones, la sección eficaz diferencial es sensible a:

1. Propiedades de estructura nuclear. Básicamente aspectos monoparticulares (propiedades de los nucleones ligados en el núcleo blanco) y presencia de correlaciones.

2. Propiedades de la interacción nucleón–núcleo entre el nucleón emitido y el núcleo residual.

Si no se tiene en cuenta este último punto, el nucleón emitido se considera como libre y su función de ondas se representa por una onda plana; estas aproximaciones definen la sección eficaz en *PWIA* o *Aproximación de Impulso de Ondas Planas*.

Si se incluye la interacción de estados finales (FSI) (normalmente por medio de un potencial óptico) hablamos de la *Aproximación de Ondas Distorsionadas* (DWIA en este trabajo) que a veces se cita como GDWIA o como CDWIA para distinguirla de la aproximación de ondas distorsionadas *con factorización* de la que luego hablaremos. Aquí usaremos la abreviación FDWIA para el caso en que se suponga válida la aproximación de factorización.

Entre los efectos que *no* se tienen en cuenta explícitamente en la aproximación de impulso pueden citarse:

1. Contribución de los términos de intercambio entre los que se incluyen: Procesos en los que es el nucleón detectado el que actúa como espectador o procesos en los que se accede al estado final a través de estados intermedios o en los que se produce intercambio de carga.
2. Normalmente el estado final se describe como el producto de las funciones de onda del nucleón emitido y el núcleo residual, esto es, no hay una antisimetrización completa de la función de onda del estado final.
3. Como los potenciales centrales con que se calculan las funciones de onda del núcleo residual y del nucleón emitido son generalmente diferentes, tampoco habrá ortogonalización correcta en el estado final.

Estos efectos han sido estudiados con detalle [FrM85, Her88] y se sabe que su contribución no es importante en los procesos cuasielásticos a las energías y para los núcleos de los que hablaremos en este trabajo.

Otros problemas que se encuentran en la aproximación de impulso son:

1. El nucleón ligado no está “en la capa de masas” (*on-shell*) o sea  $\mathbf{P}^2 + M^2 \neq E^2$ : su energía y momento cinético no están correlacionados. La descomposición de Gordon [Gr28] de la corriente del nucleón

libre no será válida. Como consecuencia, no existe una expresión bien definida para el operador de corriente del nucleón sino más bien distintas prescripciones para extender *fuera de la capa de masas* la expresión de la corriente libre.<sup>1</sup>

2. La corriente en el vértice nuclear se conserva ( $q^\mu J_\mu^N = 0$ ) pero en la aproximación de impulso esto no se verifica en general.

Estudiaremos en los siguientes apartados cómo afectan a la sección eficaz estos problemas.

### 2.2.1 Distorsión del electrón

Hasta aquí hemos descrito la aproximación de impulso en lo que respecta al vértice nuclear; para la parte electrónica lo más sencillo es describir a los electrones a través de ondas planas (*Aproximación de Born de Ondas Planas, o PWBA* para el electrón).

Sin embargo, para núcleos medios o pesados es necesario tener en cuenta la distorsión coulombiana de las funciones de onda de los electrones (*DWBA, Aproximación de Born de Ondas Distorsionadas*). Este efecto se estudia en el siguiente capítulo.

### 2.2.2 Cinemática

Además de las relaciones generales (2.1)–(2.7) en el caso de la aproximación de impulso de ondas planas tenemos (ver figura 2.2)

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}_F - \mathbf{P} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_A - \mathbf{P}_{A-1} \quad (2.10)$$

$$\omega = E_F - E \quad (2.11)$$

$$E = E_A - E_{A-1} \quad (2.12)$$

es decir, el momento del nucleón en el núcleo blanco  $\mathbf{P}$  coincide con el momento perdido  $\mathbf{P}'$  en PWIA.

<sup>1</sup>En el caso de incluir la interacción de estados finales, tampoco el nucleón emitido, aunque en un estado no ligado, se puede tratar como libre (esto es, a través de ondas planas), lo que introduce ambigüedades adicionales.

Por tanto el momento cinético del nucleón en el núcleo blanco puede fijarse por la cinemática del experimento de forma que es posible obtener información experimental sobre la distribución de momentos para una energía desaparecida dada y en el sentido del modelo de capas, para una energía de ligadura dada.

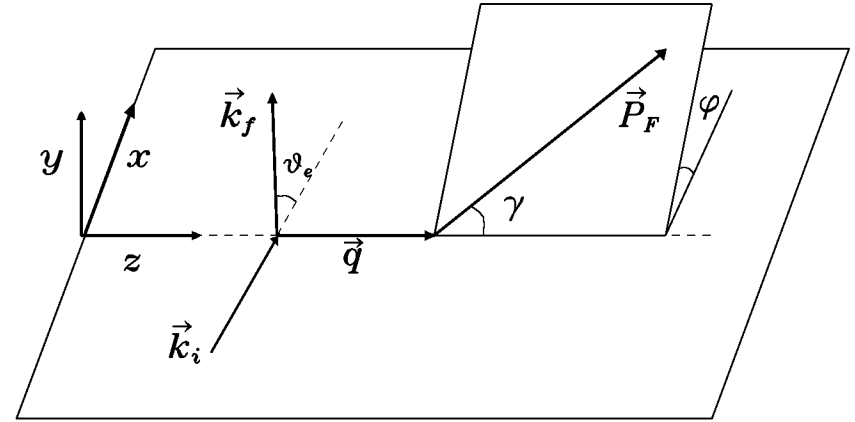


Figura 2.3: Elección de ejes y ángulos para ( $e, e'p$ ).

A la hora de reconstruir la cinemática completa del proceso tenemos libertad en la elección de los momentos cinéticos que intervienen. Vamos a ver a continuación dos opciones frecuentemente utilizadas.

#### CINEMÁTICA PARALELA

Se toman  $\mathbf{q}, \mathbf{P}', \mathbf{P}_F$  sobre la misma dirección ( $\gamma = 0$  en la figura 2.3). De esta forma  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{P}_F| - |\mathbf{P}'|$  (caso paralelo) o  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{P}_F| + |\mathbf{P}'|$  (caso antiparalelo).

#### CINEMÁTICA PERPENDICULAR

En este trabajo denominamos así al caso en que se mantiene constante  $|\mathbf{q}|$  y se varía  $\gamma$ . Observemos que como se cumple  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_F - \mathbf{q}$ , el valor  $\mathbf{P}' = 0$  sólo es accesible si  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{P}_F|$ , que es una elección habitual.

En la tabla 2.1 se resumen las relaciones entre las distintas variables cinemáticas en ambos casos.

**Tabla 2.1:** Comparación entre las elecciones experimentales de la cinemática más comunes para el proceso  $(e, e'p)$ .

	Cinemática Paralela	Cinemática Perpendicular
	$\mathbf{q} \parallel \mathbf{P}' \parallel \mathbf{P}_F$	$ \mathbf{q}  = cte.$
$\gamma$	0	$\arccos\left(\frac{\mathbf{P}'^2 - \mathbf{P}_F^2 - \mathbf{q}^2}{-2 \mathbf{P}_F  \mathbf{q} }\right)$
$\varphi$	—	Normalmente 0
$\mathbf{P}'$	$\pm( \mathbf{q}  -  \mathbf{P}_F )$	$\pm(\mathbf{P}_F^2 + \mathbf{q}^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}_F)^{\frac{1}{2}}$

### 2.2.3 Forma de la corriente nuclear

Como hemos dicho, en la aproximación de impulso para el proceso  $(e, e'p)$  se supone que en la interacción fotón–núcleo (el vértice nuclear) toma parte un único nucleón que es detectado en coincidencia con el electrón. La estructura nuclear interviene sólo a través de la interacción de este nucleón con el núcleo. Esta aproximación supone en particular que no se consideran efectos en la corriente debidos a intercambio de mesones ni efectos de interacción del fotón virtual con otras partículas distintas al nucleón considerado.

En resumen: la interacción del fotón virtual con nucleones en el núcleo no se diferencia de la interacción con nucleones libres salvo por las diferentes funciones de onda del nucleón en cada caso (IA). Esto se traduce en la utilización de la expresión del operador corriente para nucleones libres, con los mismos factores de forma y la misma estructura. Sin embargo, algunas diferencias con el caso libre aún persisten:

— El nucleón ligado no está en su *capa de masas* y habrá que extender las expresiones de la corriente al caso en que el nucleón final está en su capa de masas y el nucleón ligado no (“a medias fuera de la capa de masas” o *half off-shell*).

— La *descomposición de Gordon* no será válida, al menos con la misma forma que en el caso libre.

— El operador del caso libre no garantiza la conservación de la corriente para nucleones ligados.

Las condiciones de invariancia bajo transformaciones de Lorentz y pari-

dad imponen para  $\hat{J}_N^\mu$  la forma [BD64, CheO79]:

$$\gamma^\mu K_1 + i\sigma^{\mu\nu}(P_I + P_F)_\nu K_2 + i\sigma^{\mu\nu}(P_F - P_I)_\nu K_3 + (P_I + P_F)^\mu K_4 + (P_F - P_I)^\mu K_5 \quad (2.13)$$

con  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ ,  $\gamma^\mu$  son las matrices gamma de Dirac y  $P_I^\mu$ ,  $P_F^\mu$  son los cuadrimentos inicial y final del nucleón;  $K_1, \dots, K_5$  son funciones sólo de  $q^\mu q_\mu = (P_F - P_I)^\mu (P_F - P_I)_\mu$  ya que suponemos interacción elástica con los nucleones. En el caso libre, como los estados iniciales y finales del nucleón verifican la ecuación de Dirac libre, se puede utilizar la descomposición de Gordon:

$$\bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \gamma^\mu u(\mathbf{P}_I, \sigma_I) = \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \left[ \frac{(P_F + P_I)^\mu}{2M} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} \right] u(\mathbf{P}_I, \sigma_I) \quad (2.14)$$

Usando (2.14) los términos con  $(P_F + P_I)^\mu$  en (2.13) pueden ponerse en función de  $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$  o viceversa. Además, en el caso de dispersión elástica de nucleones libres, la condición de conservación de corriente permite eliminar los términos con  $q^\mu$ .

Incluyendo las funciones  $K$  en los factores de forma  $F_1(q_\mu^2)$ ,  $F_2(q_\mu^2)$  con la notación habitual resultan dos expresiones equivalentes de la corriente para nucleones libres:

$$\hat{J}_N^\mu = (F_1 + \bar{\kappa}F_2)\gamma^\mu - \frac{\bar{\kappa}F_2}{2M}(P_F + P_I)^\mu \quad (2.15)$$

$$\hat{J}_N^\mu = F_1\gamma^\mu + i\frac{\bar{\kappa}F_2}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (2.16)$$

Para nucleones fuera de la capa de masas (2.15) y (2.16) no son equivalentes y si se pretende restaurar la conservación de la corriente habrá que incluir términos adicionales. Vamos a enumerar ahora varias de las expresiones del operador de corriente utilizadas en la aproximación de impulso:

#### 1. Definición de $J_{cc1}$ y $J_{ncc1}$

La expresión (2.15) puede extenderse al caso de nucleones fuera de la capa de masas como en la referencia [dFor83], sustituyendo  $P_I^\mu \equiv P_I^\mu = (E_I, \mathbf{P}_I)$  para el nucleón ligado por  $\bar{P}_I^\mu \equiv (\bar{E}_I, \mathbf{P}_I)$ , con el valor de  $\bar{E}_I$  no el determinado por conservación de la energía en el vértice nuclear sino el correspondiente al nucleón si estuviera libre,  $\bar{E}_I^2 = (\mathbf{P}_I^2 + M^2)$ . El operador así definido no conserva (como sucede en general con esta



clase de operadores) la corriente esto es,  $q_\mu \langle \hat{J}^\mu \rangle \neq 0$  ó  $\omega \langle \hat{J}^0 \rangle \neq q \langle \hat{J} \rangle$ . En [dFor83] se impone conservación de la corriente eliminando la componente longitudinal  $\langle \hat{J}_L \rangle = \frac{q}{q} \langle \hat{J} \rangle$  en favor de la temporal, para lo que se utiliza la relación que se obtendría si hubiese conservación de corriente:  $\langle \tilde{J}_L \rangle = \frac{\omega}{q} \langle \hat{J}^0 \rangle$ . Llamaremos a la corriente así construida

$J_{cc1}^{(0)}$ . Si no se impone conservación de corriente en la forma descrita tendremos  $J_{ncc1}$ . Si se impone conservación eliminando la componente temporal en lugar de la longitudinal, esto es, tomando  $\langle \tilde{J}^0 \rangle = \frac{q}{\omega} \langle \hat{J}_L \rangle$  hablaremos de  $J_{cc1}^{(3)}$ .

## 2. Definición de $J_{cc2}$ y $J_{ncc2}$

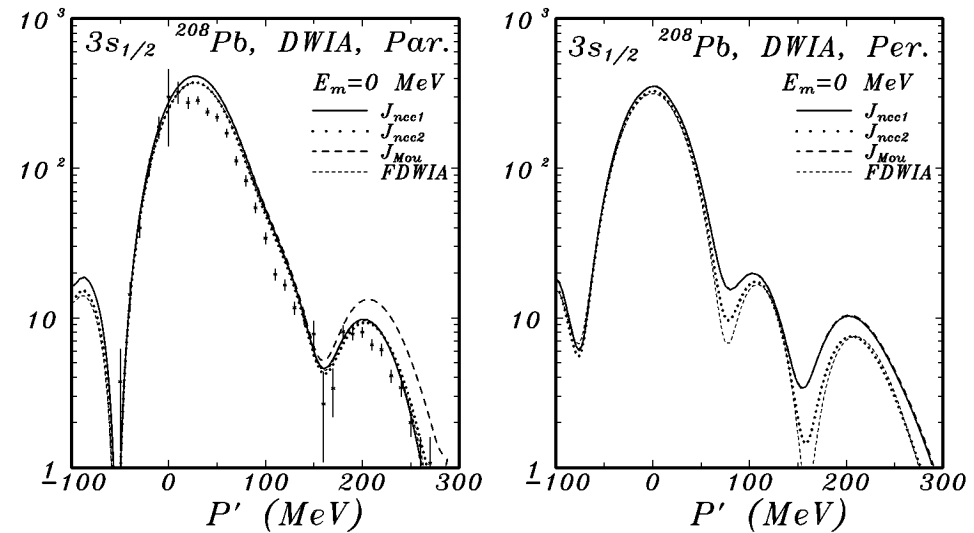
Partiendo ahora de la ecuación (2.16) se construyen de forma equivalente al caso anterior los operadores  $J_{cc2}^{(0)}$ ,  $J_{ncc2}$ ,  $J_{cc2}^{(3)}$ , aunque en este caso se utilizan los valores de energía y momento cinético derivados de la conservación de la energía en el vértice nuclear.

## 3. Definición de $J_{Mou}$

Partiendo de la ecuación (2.15) se extiende fuera de la capa de masas utilizando una masa efectiva  $M^* = \sqrt{E_1^2 - P_1^2}$  para el nucleón inicial como en [Mou76] y se añade un término en  $q_\mu$  que restauraría conservación de corriente en el caso de espinores “libres” de masas  $M$  y  $M^*$  para los nucleones inicial y final respectivamente:

$$\hat{J}_{Mou}^{N\mu} = (F_1 + \bar{\kappa}F_2)\gamma^\mu - \frac{\bar{\kappa}F_2}{M^* + M}(P_F + P_I)^\mu - \frac{M - M^*}{q_\nu^2}q^\mu F_1 \quad (2.17)$$

Una comparación entre estas expresiones para el caso de dispersión con electrones y/o núcleos blanco polarizados puede encontrarse en la referencia [CaDP92] en la que se utilizan espinores *libres* (aunque fuera de la capa de masas). Complementamos aquí este estudio con un resumen de la situación cuando se utilizan funciones de onda más generales. Para ello hemos calculado la sección eficaz diferencial para el proceso  $(e, e'p)$  correspondiente a un nucleón ligado en la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$ . Para dicho nucleón ligado hemos utilizado las funciones de onda relativistas obtenidas con el modelo HS descrito en el capítulo tercero. Las expresiones para la sección eficaz se detallan en el apéndice B. Sin entrar en más detalles que son discutidos



**Figura 2.4:** Sección eficaz reducida en  $(\text{GeV})^{-3}$  para el proceso  $(e, e'p)$  en la capa  $3s_{1/2}$  del plomo. Se comparan los resultados de distintos operadores, en cinemática paralela (izquierda) y perpendicular (derecha) en PWBA para el electrón, y DWIA para el protón.  $E_m = 0$ , y la energía cinética del protón detectado es  $T_F = 100$  MeV.

en otros capítulos, aquí comparamos los resultados obtenidos con distintas expresiones para el operador de corriente.

En la figura 2.4 se muestra la sección eficaz reducida obtenida en cinemática paralela (gráfico de la izquierda) y perpendicular (gráfico de la derecha) usando las aproximaciones de PWBA para el electrón y DWIA para el protón detectado.

Se representa frente a  $P'$  (el momento perdido definido anteriormente) la sección eficaz reducida (en  $\text{GeV}^{-3}$ ) dada por la ecuación (2.36) y obtenida con los operadores  $J_{ncc1}$ ,  $J_{ncc2}$  y  $J_{Mou}$ , utilizando en todos los casos los mismos potenciales ópticos y la misma función de ondas para el protón ligado. También se han representado algunos datos experimentales en cinemática paralela [Qn88] y los resultados de la aproximación de factorización (FDWIA) que comentamos en otra sección.

La diferencia en los resultados obtenidos con cada operador se debe a:

1. Las prescripciones para extender el operador de corriente libre fuera de la capa de masas son distintas. En la figura el nucleón ligado sólo

está en su capa de masas si  $P' = 0$  (si  $E_m \neq 0$ , entonces no lo está para ningún valor de  $P'$ ).

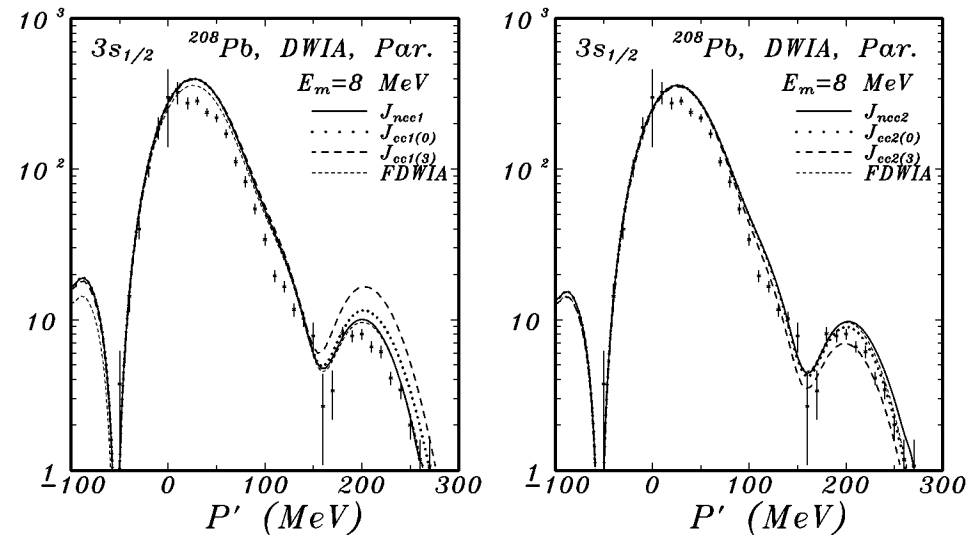
2. La transformación de Gordon no es válida para el nucleón ligado por lo que el resultado de aplicar (2.15) y (2.16) es diferente.
3. En DWIA el punto anterior también se aplica al nucleón detectado en el estado final.

Se ha estudiado [dFor83, Na90] la diferencia entre los operadores de corriente cuando se utilizan funciones de onda soluciones de la ecuación de Dirac libre, con lo que no hay efecto debido a los puntos segundo y tercero anteriormente citados; así, por tanto, si  $E_m = 0$  y  $P' = 0$  el nucleón ligado está en su capa de masas y todos los operadores dan lugar al mismo resultado. Fuera de la capa de masas las diferencias son pequeñas para las condiciones cinemáticas en que se suele trabajar (del orden de un 2% o 3% como mucho entre  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ ). En la figura 2.4 vemos que para nucleones ligados esto no es así: ni siquiera para  $P' = 0$  se obtiene el mismo valor con distintos operadores. La diferencia, de alrededor del 10% entre  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ , se debe a los efectos comentados en los puntos dos y tres. Si se utiliza la aproximación de ondas planas para el protón las diferencias se deben sólo al punto dos. En este caso, con las funciones de onda relativistas utilizadas aquí, la desviación entre los resultados de los diversos operadores no es muy significativa, del orden del 2%. Por tanto, la principal causa de las desviaciones es debida al punto tercero.

La diferencia entre  $J_{ncc1}$  y  $J_{Mou}$ , ambos procedentes de la ecuación (2.15), se debe a la diferente extensión fuera de la capa de masas. Para  $J_{ncc1}$  se toma una energía efectiva para el nucleón inicial mientras que en  $J_{Mou}$  se utiliza una masa efectiva. Como se ve en la figura 2.4, en cinemática paralela esa diferencia crece con  $P'$ . En cinemática perpendicular es pequeña en el rango de  $P'$  mostrado.

Para valores de  $E_m$  del orden de la energía de separación (algunos  $MeV$ ) los resultados son prácticamente idénticos a los mostrados en la figura 2.4. Esto es así porque la diferencia que se observa entre los resultados obtenidos con los distintos operadores es debida esencialmente al punto tercero, al no ser exacta la descomposición de Gordon para el protón final.

En cinemática paralela esta diferencia es máxima para  $P' = 0$  o  $q = P_F$  (del orden del 10%). En cinemática perpendicular es mayor, llegando ser del 30%.



**Figura 2.5:** Sección eficaz reducida en  $(GeV)^{-3}$  para el proceso  $(e, e'p)$  en la capa  $3s$  del plomo. Se comparan los resultados de distintas prescripciones para la conservación de la corriente, en cinemática paralela, para los operadores del tipo  $J_{cc1}$  (izquierda) y  $J_{cc2}$  (derecha), en las mismas condiciones que la figura 2.4 excepto  $E_m = 8$  MeV.

### 2.2.4 Conservación de la corriente

Debido a las aproximaciones realizadas la corriente nuclear no se conserva, esto es, no se verifica  $q^\mu J_\mu^N = 0$  para ninguno de los anteriores operadores. Pueden construirse operadores similares a  $J_{cc1}$  y  $J_{cc2}$  añadiéndoles términos proporcionales a  $q^\mu$  calculados de forma que  $q^\mu \tilde{J}_\mu^N = 0$ . Ahora bien, dado que la corriente sí se conserva para la parte electrónica ( $q^\mu j_\mu^e = 0$ ) cualquier término proporcional a  $q^\mu$  en la corriente nuclear no contribuirá a la sección eficaz total, debido a que las modificaciones en la componente temporal se cancelan con las modificaciones en la componente longitudinal  $J^N \hat{q}$ .

En la figura 2.5 mostramos los resultados para el mismo caso que en la figura 2.4, pero con el valor de  $E_m = 8$  MeV. A la izquierda se comparan  $J_{ncc1}$ ,  $J_{cc1}^{(0)}$  y  $J_{cc1}^{(3)}$ . A la derecha los resultados para la familia de operadores  $J_{cc2}$ . En ambos casos en cinemática paralela. En la figura siguiente 2.6 se presentan los resultados obtenidos en cinemática perpendicular.

Como con estos operadores no se obtiene conservación de la corriente, los resultados son distintos y la desviación da una idea de la indeterminación en

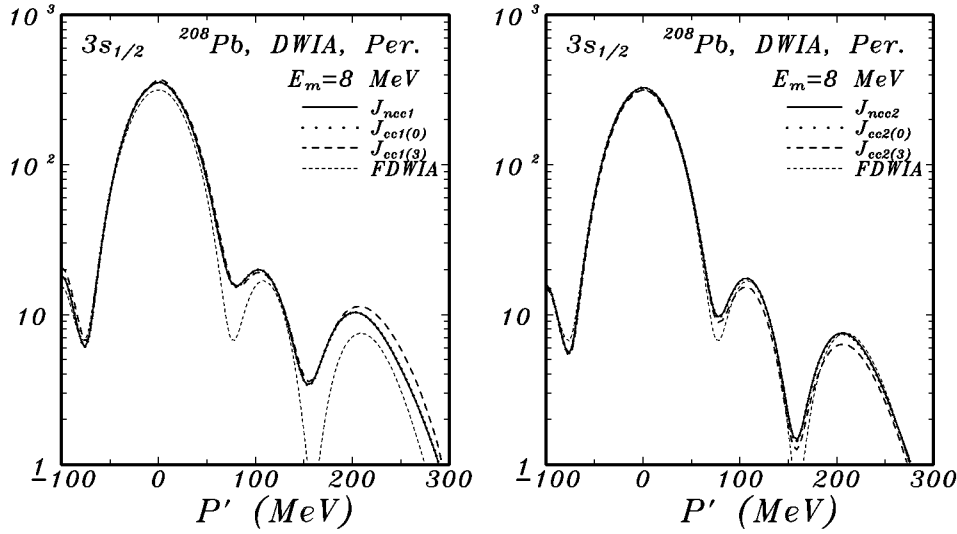


Figura 2.6: Igual que la figura 2.5 en cinemática perpendicular.

la sección eficaz debida a la forma de imponer (o no) conservación. Podemos observar:

1. Los resultados con  $J_{cc1}^{(3)}$  y  $J_{cc2}^{(3)}$  son bastante diferentes del resto. Esto se debe a que la componente  $\hat{\mathbf{q}}\mathbf{J}$  es relativamente pequeña en estas condiciones cinemáticas ( $\omega/q \approx 0.2$ ) y cambiar  $J_z$  por  $\omega/qJ_0$  no afecta en exceso a la sección total mientras que el cambio en la componente temporal (sustituir  $J_0$  por  $q/\omega J_z$ ) sí es significativo por tener ésta mayor peso en la sección eficaz.
2. Los demás operadores dan resultados muy parecidos en cinemática perpendicular. En cinemática paralela hay desviaciones apreciables para valores altos de  $P'$ . En este último caso, la diferencia entre  $J_{ncc1}$  y  $J_{cc1}^{(0)}$  llega a ser del orden del 15%. Para  $J_{ncc2}$  y  $J_{cc2}^{(0)}$  se mantiene menor del 5%.

### 2.3 Separación longitudinal–transversal

En la expresión de la sección eficaz es interesante estudiar por separado las contribuciones longitudinales (en la dirección del momento del fotón

transferido) y las transversales, cuya dependencia con las variables cinemáticas es diferente.

Partamos por ejemplo de las expresiones para la sección eficaz del proceso ( $e, e'p$ ) en la aproximación de PWBA (ver Apéndice B), en las que es posible realizar explícitamente las sumas sobre la tercera componente del espín para el electrón. En esta aproximación las componentes longitudinales y transversales de la corriente nuclear pueden separarse analíticamente:

$$\begin{aligned} |\eta|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_i \sigma_f} |\bar{u} \gamma^\mu u|^2 |J_\mu|^2 = \frac{1}{2m^2} [k_i^\mu k_f^\nu + k_f^\nu k_i^\mu - (k_i k_f - m^2)] J_\mu J_\nu^\dagger \\ &= \frac{1}{4m^2} \left[ |(k_i^\mu + k_f^\mu) J_\mu|^2 + q_\mu q^\mu |J|^2 \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Con  $q^\mu = k_i^\mu - k_f^\mu$ ,  $|J|^2 = J_\mu J^{\mu*} = |J_0|^2 - \mathbf{J}\mathbf{J}^*$ .

Si hay conservación de la corriente podemos eliminar la componente en la dirección de  $\hat{\mathbf{q}}$  en función de la componente temporal (o a la inversa):

$$q_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow J^0 q_0 = \mathbf{q}\mathbf{J} \quad (2.19)$$

Si  $\mathbf{q}$  define el eje Z y el plano de dispersión para el electrón define el plano XZ (ver figura 2.3) tenemos:

$$4m_e^2 |\eta|^2 = |\rho|^2 \omega_L + |J_T|^2 \omega_T + \text{Re}(\rho^*(J_+ - J_-)) \omega_{LT} + \text{Re}(J_- J_+^*) \omega_{TT} \quad (2.20)$$

con:

$$k^\mu = k_i^\mu + k_f^\mu = (\epsilon, \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J}) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J} - (\mathbf{q}\mathbf{J}) \frac{\mathbf{q}}{q^2} \quad (2.23)$$

$$J_\pm = \frac{\mp(J_x \pm iJ_y)}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_L = q_\mu^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) + \left(\epsilon - (\mathbf{k}\hat{\mathbf{q}}) \frac{\omega}{q}\right)^2 \quad (2.24)$$

$$\omega_T = \frac{k_x^2}{2} - q_\mu^2 \quad (2.25)$$

$$\omega_{LT} = \sqrt{2} \left(\epsilon - (\mathbf{k}\hat{\mathbf{q}}) \frac{\omega}{q}\right) k_x \quad (2.26)$$

$$\omega_{TT} = -k_x^2 \quad (2.27)$$

Utilizando la convención para los ángulos de la figura 2.3 se tiene (en el límite  $m_e \rightarrow 0$ ):

$$q_\mu^2 = -4\epsilon_i\epsilon_f \sin^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \quad (2.28)$$

$$\mathbf{q}^2 = \epsilon_i^2 + \epsilon_f^2 - 2\epsilon_i\epsilon_f \cos(\theta_e) \quad (2.29)$$

Introduciendo  $\xi = 4\epsilon_i\epsilon_f \cos^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right)$  llegamos a las expresiones:

$$\omega_L = \xi \frac{q_\mu^A}{\mathbf{q}^A} \quad (2.30)$$

$$\omega_T = \xi \left[ \frac{-q_\mu^2}{2\mathbf{q}^2} + \tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \right] \quad (2.31)$$

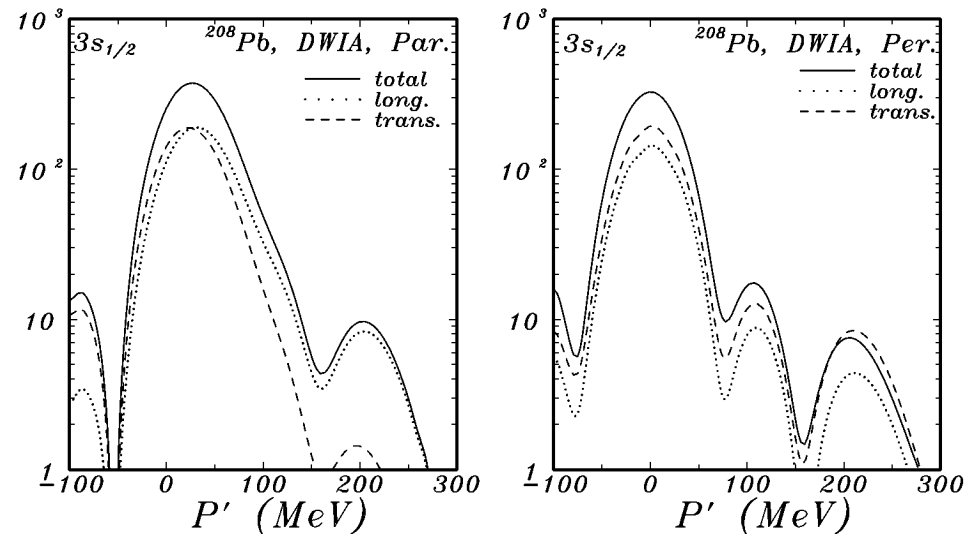
$$\omega_{LT} = \xi \sqrt{2} \frac{-q_\mu^2}{\mathbf{q}^2} \left[ \tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) + \frac{-q_\mu^2}{\mathbf{q}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

$$\omega_{TT} = \xi \frac{q_\mu^2}{\mathbf{q}^2} \quad (2.33)$$

que son similares a las obtenidas en las referencias [dFor83, Mo86].

### 2.3.1 Extracción de las componentes

Como acabamos de comprobar, en PWBA es posible expresar la dependencia cinemática de forma sencilla y extraer por separado las diversas contribuciones longitudinales y transversales (proporcionales a  $\omega_L$ ,  $\omega_T$ ,  $\omega_{LT}$  y  $\omega_{TT}$ ) de la corriente nuclear, las cuales se podrán determinar a partir de experimentos con diferentes valores de los ángulos y energías del electrón. En la figura 2.7 se representa la sección eficaz reducida (definida por la ecuación (2.36) en unidades de  $(GeV)^{-3}$ ) calculada para la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}Pb$ . Se muestran los resultados para las contribuciones longitudinal, transversal y total en cinemática paralela y perpendicular. Se utiliza el operador  $J_{ncc2}$ . En cinemática paralela, para  $P' > 0$  la contribución principal a la sección eficaz está dada por la componente longitudinal y para  $P' < 0$  por la componente transversal. En torno a  $P' = 0$  ambas componentes contribuyen aproximadamente igual. Si observamos las ecuaciones anteriores vemos que la cantidad  $\mathcal{E} = \left[ \frac{-q_\mu^2}{2\mathbf{q}^2} + \tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \right]$  determina la dominancia de una u otra



**Figura 2.7:** Sección eficaz reducida en  $(GeV)^{-3}$  para el proceso  $(e, e'p)$  en la capa  $3s$  del plomo. Se comparan las contribuciones de las componentes longitudinales y transversales de la corriente nuclear a la sección eficaz en cinemática paralela (izquierda) y perpendicular (derecha). Modelo HS (ver el Capítulo tercero) y operador  $J_{ncc2}$ , en PWBA para el electrón y DWIA para el protón.

componente; para ángulos de dispersión del electrón pequeños  $\mathcal{E}$  disminuye y la componente transversal contribuye en menor medida, lo cual se da en cinemática paralela para valores del momento  $P'$  positivos y grandes. Por el contrario, para ángulos de dispersión del electrón mayores  $\tan\left(\frac{\theta_e}{2}\right)$  aumenta y para  $\theta_e = 180^\circ$   $\mathcal{E}$  es tal que la contribución longitudinal es nula (en la aproximación de PWBA).

En cinemática perpendicular ambas componentes contribuyen aproximadamente por igual en todo el rango de  $P'$  y además la contribución del término de interferencia  $L-T$  es importante (en cinemática paralela es nula, al menos en PWBA). En esta cinemática el valor del ángulo de dispersión del electrón se mantiene aproximadamente constante e igual al valor que toma en cinemática paralela para  $P' = 0$ .

## 2.4 Sección eficaz electrón–protón libre

En el apéndice B se deducen las expresiones para las secciones eficaces reducidas cuyos resultados hemos adelantado en los apartados anteriores, a falta de hacer explícita la forma de la corriente. Acabamos de introducir diversas formas de los operadores de corriente que pueden ser utilizados. Por ejemplo en la ecuación (B.15) se calcula la sección eficaz electrón–protón para nucleones libres. La expresión de la corriente del nucleón puede obtenerse a partir de (2.15), entre espinores libres, con la extensión fuera de la capa de masas que define el operador  $\hat{J}_{ncc1}$ . Aplicando las fórmulas de trazas resulta:

$$\begin{aligned} \langle J^\mu J^{\nu*} \rangle &= \frac{1}{2E_F \bar{E}_I} (F_1 + \bar{\kappa} F_2)^2 \left[ P_F^\mu \bar{P}_I^\nu + P_F^\nu \bar{P}_I^\mu - (P_F \bar{P}_I - M^2) g^{\mu\nu} \right] \\ &+ \frac{Q^\mu Q^\nu}{4E_F \bar{E}_I} \left[ \frac{F_2^2 \bar{\kappa}^2}{2M^2} \bar{P}_I P_F + \frac{F_2^2 \bar{\kappa}}{2} - 2\bar{\kappa} F_2 (F_1 + \bar{\kappa} F_2) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $\bar{Q}^\mu = P_F^\mu + \bar{P}_I^\mu$ . Esta expresión proporciona por ejemplo para  $\langle J^0 J^{0*} \rangle = |\rho|^2$ :

$$|\rho|^2 = \frac{1}{4E_F \bar{E}_I} \left\{ (E_F + \bar{E}_I)^2 (F_1^2 - \frac{\bar{q}_\mu^2}{4M^2} \bar{\kappa} F_2^2) - \mathbf{q}^2 (F_1 + \bar{\kappa} F_2)^2 \right\} \quad (2.35)$$

Sustituyendo la ecuación (2.34) en (2.20) y ésta en la ecuación (B.15) obtenemos la sección eficaz electrón–protón libre,  $\sigma_{cc1} = \frac{d\sigma_{ep}}{d\Omega}$ , introducida en la referencia [dFor83] y que se utiliza comúnmente en el análisis del proceso  $(e, e'p)$ .

En la aproximación de factorización de la que hablaremos inmediatamente, se supone que puede escribirse:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\epsilon_f d\Omega_f dE_F d\Omega_F} \right]_{fact} = |\mathbf{P}_F| E_F \sigma_{ep} S(E_m, \mathbf{P}') \quad (2.36)$$

donde  $S(E_m, \mathbf{P}')$  es la *función espectral*, definida como la probabilidad de encontrar un nucleón ligado en el núcleo blanco con momento  $\mathbf{P}'$  y energía perdida  $E_m$ . Como  $\sigma_{ep}$  se suele tomar la cantidad  $\sigma_{cc1}$  antes calculada y los resultados experimentales se expresan como valores de la *función espectral experimental*:

$$S(E_m, \mathbf{P}')_{(exp)} = \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon_f d\Omega_f dE_F d\Omega_F} \right]_{exp} [|\mathbf{P}_F| E_F \sigma_{cc1}]^{-1} \quad (2.37)$$

Esta es la cantidad que una vez integrada en  $E_m$  (ver apéndice B) se representa en las figuras para el proceso  $(e, e'p)$  y a la que denominamos *sección eficaz reducida* [Bu92].

## 2.5 Aproximación de factorización

Comparando las ecuaciones (B.11) y (B.17) del Apéndice B que se refieren a la dispersión de nucleones libres y ligados en las aproximaciones de PWBA y PWIA observamos que, aparte de factores cinemáticos y de normalización, la diferencia entre una y otra expresión estriba en la sustitución de  $|\bar{u}\hat{J}u|^2$  por

$$\left| \int e^{-i\mathbf{P}'\mathbf{r}} \bar{u}\hat{J}\psi_B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \quad (2.38)$$

es decir, en la inclusión en el caso del nucleón ligado de una función radial  $\psi_B$  distinta de la onda plana. La aproximación de factorización para la sección eficaz es equivalente a sustituir la ecuación (2.38) por

$$|\bar{u}\hat{J}u|^2 \left| \int e^{-i\mathbf{P}'\mathbf{r}} \psi_B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \quad (2.39)$$

y la sección eficaz para  $(e, e'p)$  factoriza en la sección eficaz  $\sigma_{ep}$  para nucleones libres y en el módulo de la función espectral al cuadrado que en el modelo de partículas independientes es proporcional a  $|\psi_B(\mathbf{P}')|^2 = \psi_B^\dagger(\mathbf{P}')\psi_B(\mathbf{P}')$  con

$$\psi_B(\mathbf{P}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{P}'\mathbf{r}} \psi_B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.40)$$

Esta factorización es exacta en la aproximación de ondas planas en el límite no relativista [Ca89, FrM85].

En el caso relativista la interacción de espín–órbita está siempre presente en la estructura bi-espinorial de la teoría. Para espinores libres:

$$\psi(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \psi^\uparrow \\ \psi^\downarrow \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

se cumple:

$$\frac{\sigma\mathbf{P}}{E+M} \psi^\uparrow = \psi^\downarrow \quad (2.42)$$

En el caso no relativista se utiliza una reducción del operador de corriente en la que la ecuación (2.42) está contenida de forma implícita y donde el bi-espinor no relativista para el nucleón ligado hace las veces de  $\psi^\dagger$ . Por ello en este caso, en la aproximación de ondas planas para el protón detectado, la sustitución de (2.38) por (2.39) es exacta y la sección eficaz factoriza como en (2.36).

Sin embargo, la ecuación (2.42) no se verifica en general para nucleones ligados descritos por soluciones de la ecuación de Dirac, ni tampoco para el nucleón detectado en el caso de la aproximación DWIA, lo cual causa diferencias en el comportamiento de la sección eficaz respecto de la aproximación factorizada. En particular, la separación L-T será diferente del caso libre.

En el caso de la aproximación de DWIA para el protón se puede hablar de una *función espectral distorsionada* en la aproximación de factorización de la forma:

$$S(E_m, \mathbf{P}_F, \mathbf{q}) \sim \sum_{\sigma, M} \frac{1}{(2\pi)^3} \left| \int d\mathbf{r} \psi_F^\dagger(\mathbf{P}_F, \sigma) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \psi_B^{JM}(E_m, \mathbf{r}) \right|^2 \quad (2.43)$$

En las figuras 2.4, 2.5 y 2.6 también se representa la función espectral en la aproximación de factorización (curva FDWIA). En pocas palabras, esta aproximación es exacta si la acción del operador de corriente sobre las funciones de onda a utilizar es la misma que sobre las funciones correspondientes a nucleones libres, lo que no se verifica en general. Puede comprobarse que en cinemática paralela el resultado FDWIA es bastante parecido al obtenido con  $J_{ncc2}$ . De hecho, en estas figuras es difícil distinguir ambos resultados ya que las diferencias son menores del 2% salvo para  $P'$  mayor que 220 MeV. En cinemática perpendicular pueden apreciarse algunas diferencias que son importantes alrededor de los mínimos.

## 2.6 Determinación de la estructura nuclear

En el Apéndice B se deducen las expresiones para la sección eficaz en  $(e, e'p)$  con varias aproximaciones. La estructura nuclear aparece en expresiones del tipo:

$$\left| \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{y}} \bar{\psi}(\mathbf{P}_F, \sigma_F, \mathbf{y}) \hat{J}_\mu \psi^{J_B, M_B}(\mathbf{y}) \right|^2 \quad (2.44)$$

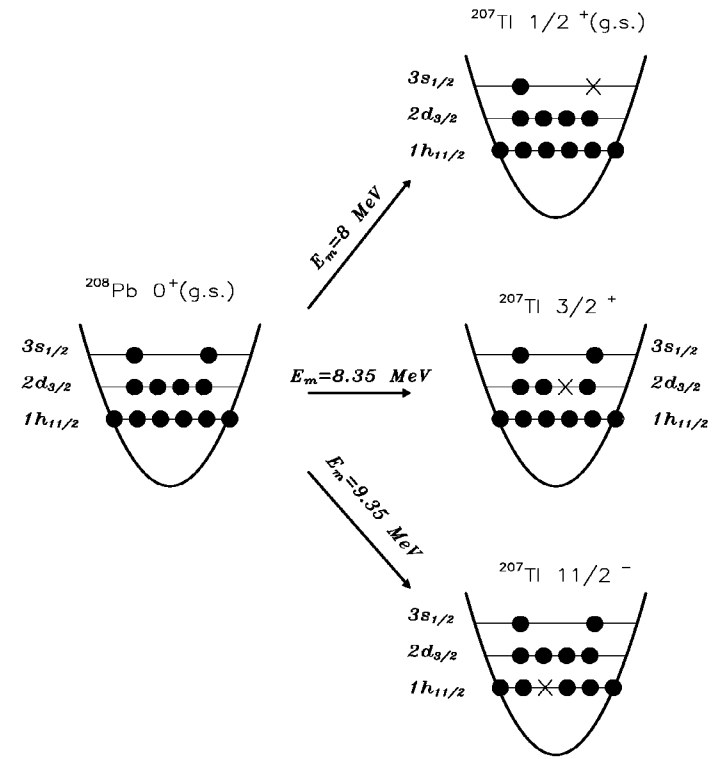


Figura 2.8: Esquema de algunos estados observados en la reacción  $^{208}_{82}\text{Pb} \xrightarrow{(e, e'p)} ^{207}_{81}\text{Tl}$ .

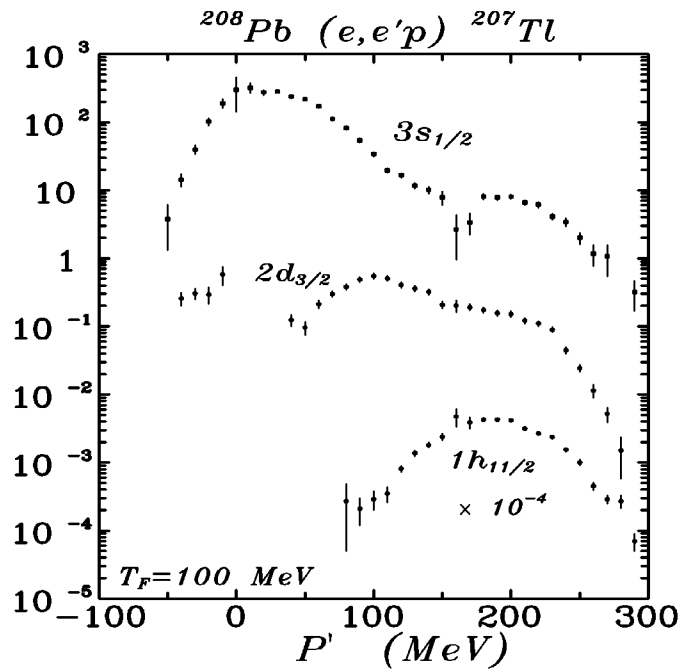
En dicho apéndice B se comprueba como el tener en cuenta el núcleo residual introduce algunas diferencias con respecto al caso de dispersión de electrones por nucleones en un potencial.

Siguiendo con la aproximación de impulso consideramos el operador de corriente nuclear  $\hat{J}_\mu$  como un operador a un cuerpo que en el formalismo de segunda cuantización se escribe en función del operador monoparticular  $\hat{J}^N$  como [BrG77]:

$$\hat{J} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{a}_\alpha^\dagger a_\beta \langle \alpha | \hat{J}^N | \beta \rangle \quad (2.45)$$

donde se entiende que la suma en  $\alpha, \beta$  recorre un conjunto completo de estados monoparticulares del sistema en estudio. El elemento de matriz que hemos de calcular es del tipo:

$$\langle \psi_F | \hat{J} | \psi_I \rangle = \langle \psi_{A-1}, \psi(\mathbf{P}_F, \sigma_F) | \hat{J} | \psi_A \rangle \quad (2.46)$$



**Figura 2.9:** Sección eficaz reducida frente a la energía desaparecida (abajo) y frente al momento perdido (arriba) para la reacción  ${}^{208}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{207}_{81}\text{Tl}$  en  $(e, e'p)$ .

En el marco del modelo de capas, el estado inicial está formado por

**Figura 2.10:** Igual que la figura 2.9, pero representando la sección eficaz experimental simultáneamente frente a  $E_m$  y  $P'$  (tomada de [Qn88]).

un número finito de nucleones caracterizados por valores discretos de los números cuánticos y el índice  $\beta$  recorre sólo un cierto número de valores discretos correspondientes a los niveles *ligados* ocupados. El estado final, en cambio, tiene también componentes en el continuo, o sea, incluye estados monoparticulares de dispersión. Si utilizamos la aproximación PWIA para el nucleón final y tomamos para  $\alpha$  un índice continuo, (esto es, en el estado final utilizamos una base continua) utilizando la ecuación (2.45) resulta (hecha la salvedad de que una de las sumas es ahora sobre un índice continuo):

$$\langle \psi_F | \hat{J} | \psi_I \rangle = \sum_{\sigma, \beta} \int d\mathbf{P} \langle \mathbf{P} \sigma | \hat{J}^N | \beta \rangle \langle \psi_{A-1}, \psi(\mathbf{P}_F, \sigma_F) | \tilde{a}_\sigma^\dagger(\mathbf{P}) a_\beta | \psi_A \rangle \quad (2.47)$$

Con las aproximaciones utilizadas podemos escribir:

$$\langle \psi_{A-1}, \psi(\mathbf{P}_F, \sigma_F) | \tilde{a}_\sigma^\dagger(\mathbf{P}) a_\beta | \psi_A \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_F - \mathbf{P}) \delta_{\sigma, \sigma_F} \langle \psi_{A-1} | a_\beta | \psi_A \rangle \quad (2.48)$$

con lo cual:

$$\langle \psi_F | \hat{J} | \psi_I \rangle = \sum_{\alpha} \langle \mathbf{P}_F \sigma_F | \hat{J}^N | \alpha \rangle \langle \psi_{A-1} | a_{\alpha} | \psi_A \rangle \quad (2.49)$$

Vemos que en la expresión (2.49) la corriente tiene la forma utilizada en (B.20) salvo por la suma adicional sobre  $\alpha$ , que en principio recorre todos los niveles ocupados del núcleo blanco. El factor  $\langle \psi_{A-1} | a_{\alpha} | \psi_A \rangle$  es la *amplitud espectroscópica*.

En el modelo extremo de partículas independientes tenemos:  $|\psi_{A-1}\rangle = a_{\bar{\alpha}} |\psi_A\rangle$  y  $\langle \psi_{A-1} | a_{\alpha} | \psi_A \rangle = \langle \psi_A | \tilde{a}_{\bar{\alpha}}^{\dagger} a_{\alpha} | \psi_A \rangle$ . En la sección eficaz aparece:

$$\left| \sum_{\alpha} \langle \psi_A | \tilde{a}_{\bar{\alpha}}^{\dagger} a_{\alpha} | \psi_A \rangle \delta(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\bar{\alpha}}) \langle \mathbf{P}_F \sigma_F | \hat{J} | \alpha \rangle \right|^2 \sim N_{\bar{\alpha}} |\langle \mathbf{P}_F \sigma_F | \hat{J} | \bar{\alpha} \rangle|^2 \quad (2.50)$$

Se podrá fijar  $E_m$  para que la suma en  $\alpha$  incluya sólo un estado permitido por conservación de la energía y así la sección eficaz en este modelo resulta ser proporcional al caso de dispersión de un nucleón en un potencial central, con un factor  $N_{\bar{\alpha}}$ , el *número de ocupación* de la capa  $\bar{\alpha}$ . En el límite no relativista factorizado este término definido por (2.50) contiene a la función espectral  $S(E_m, \mathbf{P}')$  que en el modelo de partículas independientes se puede escribir como  $S(E_m, \mathbf{P}') = \sum_{\alpha} \delta(E_m - \epsilon_{\alpha}) N_{\alpha} |\psi_B(\mathbf{P}')|^2$ , o sea, es proporcional a la amplitud espectroscópica al cuadrado y a la distribución de momentos del orbital  $\alpha$ .

### 2.6.1 Aproximación de impulso y modelo de capas

El protón detectado en coincidencia habrá sido extraído de una de las capas cercanas al nivel de Fermi que marca el límite de capas llenas para protones.

Como se esquematiza en la figura 2.8, variando el valor de la energía desaparecida en la reacción  $(e, e'p)$  es posible obtener el espectro de excitaciones monoparticulares (de protones) para el núcleo residual con  $A - 1$  nucleones que se corresponden con los picos de la sección eficaz en la figura 2.9 (para el caso de la reacción  $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{207}\text{Tl}$ ).

Además, fijando el valor de la energía desaparecida al valor adecuado para la capa de interés es posible obtener la distribución de momentos para nucleones en cada capa como se puede ver en la figura 2.9 (arriba).

En la figura 2.10 se representa la sección eficaz reducida frente a la energía desaparecida y el momento perdido, mostrando cómo en el proceso  $(e, e'p)$  se puede obtener gran cantidad de información experimental sobre la estructura nuclear, que en este caso no sólo confirma la existencia de capas sino que revela además la distribución de momentos de cada capa.

## 2.7 Resumen

En este capítulo se han revisado los aspectos básicos del proceso  $(e, e'p)$  y se ha comprobado de qué forma puede obtenerse información detallada sobre la estructura nuclear.

Se ha encontrado que las expresiones habituales para el operador de corriente nuclear fuera de la capa de masas pueden dar resultados que difieren entre sí más de lo que se puede concluir a partir de estudios basados exclusivamente en funciones de onda libres para el nucleón.

En los capítulos siguientes se aplicará el formalismo aquí presentado a casos concretos de núcleos mágicos.



### 3 Aproximación Relativista para el Núcleo Atómico

Los modelos no relativistas del núcleo han cosechado éxitos considerables desde hace muchos años, tanto en la descripción de las propiedades monoparticulares y de capas (con la introducción de términos espín-órbita), como de fenómenos colectivos. Por ello los modelos relativistas han ocupado un segundo plano en los estudios del núcleo atómico. Una descripción relativista debe incorporar todos los resultados no relativistas y en principio es más adecuada al problema nuclear. Sin embargo existe cierta tendencia a complementar los modelos no relativistas ya existentes antes que a dar el salto hacia formalismos distintos.

Podemos resumir la situación como sigue: En los modelos no relativistas sencillos más comunes (con interacciones a un cuerpo, potenciales locales y términos de interacción espín-órbita) los valores promedio de los potenciales no son muy altos (del orden de decenas de  $MeV$ ), inferiores al 10% de la masa en reposo del nucleón. La energía cinética media de los nucleones es todavía inferior por lo que se podrían considerar poco importantes los efectos relativistas.

Estos modelos están ampliamente extendidos, con gran aceptación. El modelo de capas no relativista con los términos de espín-órbita predice razonablemente bien el orden de llenado de los niveles monoparticulares, energías de ligadura, cierres de capa (números mágicos) y otras propiedades globales de los núcleos.

La densidad de carga del estado fundamental en los núcleos mágicos, magnitud experimental bastante bien determinada, es reproducida correctamente en líneas generales por cálculos Hartree-Fock dependientes de la densidad, aunque los modelos de capas predicen oscilaciones de la densidad en el interior del núcleo de mayor amplitud que la observada.

Sin embargo, cuando se avanza algo más en este tipo de modelos con el fin de obtener mejores predicciones, aparecen problemas debidos a la falta de flexibilidad de la ecuación de Schrödinger. Son comunes los intentos de generalizar esta ecuación con potenciales no locales. Sin embargo estos términos, así como los de espín-órbita, aparecen de forma más natural en las teorías relativistas.

Recordemos que uno de los paradigmas de la teoría no relativista del

núcleo atómico, el modelo de capas, requirió para su éxito la inclusión de términos de interacción de espín-órbita en la ecuación de Schrödinger, que aparecían como algo *externo* a la teoría. En cambio, la ecuación de Dirac incorpora directamente los grados de libertad de espín.

Si comparamos la ecuación de Schrödinger para partículas libres:

$$\left[\frac{-\nabla^2}{2M} - E\right]\psi_{NR} = 0 \quad (3.1)$$

con la ecuación de Dirac libre (con la notación y convenios introducidos en el apéndice B):

$$[i\boldsymbol{\alpha}\nabla + E - \beta M]\psi = 0 \quad (3.2)$$

podemos observar que mientras la ecuación (3.1) no posee estructura matricial, la ecuación de Dirac (3.2) es una ecuación más compleja debido a la presencia de las matrices  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta$ , lo cual se traduce en que las soluciones más generales se representan por espinores de cuatro componentes. Los diferentes términos de la ecuación (3.2) actúan de distinta manera sobre las dos componentes inferiores y las superiores (las que *sobreviven* en el límite no relativista de la ecuación de Dirac) de estos cuadrespinores. De esta forma, mientras que la extensión más sencilla de la ecuación (3.1) al caso no libre consiste en la inclusión de términos de potencial  $V(\mathbf{r})$  que intervengan en la misma forma que la energía, la ecuación de Dirac puede extenderse con términos que intervengan como la energía, *potenciales vectores*  $V_v(\mathbf{r})$  (en general términos de la forma  $\gamma_\mu V^\mu$ ) o términos que intervengan como la masa, *potenciales escalares*  $\beta V_s(\mathbf{r})$ . La forma de la ecuación no indica *a priori* si alguno de los dos tipos de términos resulta más importante. De hecho, ambos parecen ser relevantes cuando a través de ecuaciones como (3.2) se intenta reproducir las observaciones en procesos de dispersión nucleón-nucleón. Los valores de los potenciales que se derivan de ese tipo de experimentos son bastante altos, del orden de cientos de  $MeV$ , indicando la conveniencia del tratamiento relativista de las interacciones nucleares, en contradicción con cálculos similares utilizando la ecuación no relativista (3.1).

Para entender ambas situaciones se ha de observar el límite no relativista de la ecuación (3.2), a través por ejemplo de la transformación de Foldy-Wouthuysen, en el que se observa que los potenciales escalar y vector actúan sobre las componentes superiores con signos contrarios cancelándose parcialmente, ya que  $V_v - V_s$  es del orden de decenas de  $MeV$ . Se reproduce así en parte la situación no relativista. Pero además se observan otros

elementos no presentes en el caso extremo no relativista, como términos de espín-órbita e incluso términos no locales [HS81, SeW86]. Por otro lado, la cancelación parcial de los potenciales vector y escalar sobre las componentes superiores no se produce sobre las componentes inferiores, pudiendo producir efectos importantes sobre magnitudes observables.

Dicho todo lo anterior, lo cierto es que en este trabajo no se pretende buscar efectos no presentes en la descripción no relativista estándar; sí interesa resaltar aquí que la descripción relativista de la estructura nuclear es al menos tan válida como la no relativista.

La razón principal para usar el formalismo relativista en el análisis de procesos de dispersión de electrones por núcleos tanto en el vértice electrónico (donde es obligado por las energías habituales para el electrón del orden de cientos de  $MeV$ , mucho mayores que su masa en reposo  $\approx 0.5 MeV$ ) como en el nuclear, es que así es posible incluir los efectos de la distorsión coulombiana de la función de ondas de los electrones de forma exacta, lo cual no es factible en otro caso. En lo que sigue exponemos brevemente el formalismo relativista y los resultados de interés para este trabajo sobre:

- Energías de ligadura: tabla 3.3.
- Distribuciones de carga: figuras 3.6, 3.7, 3.8 y tablas 3.4, 3.6.
- Espectros monoparticulares: figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5.
- Separaciones de espín-órbita: tabla 3.5.

El acuerdo con las observaciones experimentales para estas propiedades es similar al de los modelos no relativistas más elaborados (Hartree-Fock dependiente de la densidad con fuerzas de rango finito).

### 3.1 Formalismo relativista

Para construir un modelo de interacción nuclear con formalismo relativista utilizamos los procedimientos básicos de la teoría cuántica de campos. Construimos una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  que a través de las ecuaciones del movimiento (ecuaciones de Euler-Lagrange):

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad (3.3)$$

conduzca a la ecuación de Dirac libre y añadimos términos de interacción.

Sea la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{free} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi \quad (3.4)$$

La solución de la *ecuación del movimiento* correspondiente es la ecuación de Dirac libre, así que tomaremos (3.4) como la densidad lagrangiana del campo bariónico  $\psi$  que representa a los nucleones.

Como primer paso consideremos un modelo que incluya campos escalares ( $\phi$ ) y vectoriales ( $V_\mu$ ) y sus acoplos mínimos con el campo bariónico:

$$\mathcal{L}_{SV} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_{int} \quad (3.5)$$

con  $\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2)$ ,  $\mathcal{L}_V = \frac{1}{2}m_v^2 V_\mu V^\mu - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ ,  $G^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu$ , siendo  $m_v$  y  $m_s$  las masas de los campos escalar y vector. El lagrangiano de interacción es  $\mathcal{L}_{int} = g_s \bar{\psi} \psi \phi - g_v \bar{\psi} \gamma_\mu \psi V^\mu$ . Al aplicar la ecuación (3.3) a  $\mathcal{L}_{SV}$  obtenemos:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2)\phi = g_s \bar{\psi} \psi \quad (3.6)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu = g_v \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \quad (3.7)$$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v V_\mu) - (M - g_s \phi)] \psi = 0 \quad (3.8)$$

Esto es: una ecuación tipo Klein-Gordon para el campo escalar; otra similar a las ecuaciones de la electrodinámica cuántica para el fotón pero con masa no nula. Finalmente, una ecuación tipo Dirac con campos vectoriales y escalares.

El modelo representado por la densidad lagrangiana en (3.5) (denominado QHD-I, modelo  $\sigma$ - $\omega$  o modelo de Walecka [Wa84, SeW86]) viene motivado por razones de fenomenología (la observación de contribuciones importantes procedentes de términos escalares y vectoriales en el análisis de dispersión nucleón-nucleón). Aunque es renormalizable y existen partículas con características similares a los campos escalares y vectoriales introducidos (mesones  $\sigma$  y  $\omega$ ) no se suele realizar una derivación microscópica rigurosa; esto es, las masas y las constantes de acoplo no se sustituyen por las observadas experimentalmente para estos mesones sino que se consideran parámetros a ajustar para reproducir propiedades conocidas de materia nuclear y de núcleos finitos. Los parámetros que definen los modelos aquí utilizados se reproducen en la tabla 3.1 y algunas predicciones para materia nuclear en la tabla 3.2.

En este modelo sencillo no se tendrán en cuenta contribuciones de estados de energía negativa o efectos de polarización del vacío.

Con respecto a la no aparición de campos correspondientes al pión, al ser partículas representadas por campos pseudoescalares, los efectos de su inclusión en las propiedades globales de materia nuclear o de núcleos finitos con capas completas, *promedian a cero en la aproximación* que aquí usaremos (*Teoría de Campo Medio*) y no se tendrán por tanto en cuenta.

### 3.1.1 Teoría de campo medio (MFT)

#### MATERIA NUCLEAR

La solución exacta de las ecuaciones (3.6)—(3.8) es complicada en el caso general. Las constantes de acoplo  $g_s, g_v$  tienen valores bastante grandes por lo que no son posibles cálculos perturbativos. Para densidades bariónicas relativamente altas, como se espera en el interior del núcleo, los términos de la derecha en estas ecuaciones (las *fuentes*) tienen valores también altos y en estas condiciones es una buena aproximación reemplazar los campos  $\phi$  y  $V_\mu$  por sus valores esperados,  $\langle \phi \rangle, \langle V_\mu \rangle$ , que son campos clásicos. Esta aproximación es válida para densidades lo bastante grandes como para despreciar las fluctuaciones cuánticas en los campos mesónicos, pero no tan grandes como para incluir acoplos no lineales. Esta es aproximadamente la situación en materia nuclear y en la mayoría de los núcleos finitos. En un modelo isótropo tenemos que  $\langle V_\mu \rangle = \delta_{\mu 0} V_0$  y si el sistema es estático y uniforme (infinito)  $\phi_0 = \langle \phi \rangle$  y  $V_0$  son constantes independientes de  $x^\mu \equiv (t, \mathbf{x})$ . Con estas aproximaciones la solución de (3.6) y (3.7) es inmediata:

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \equiv \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s \quad (3.9)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle \equiv \frac{g_v}{m_v^2} \rho_b \quad (3.10)$$

Estas soluciones introducidas en (3.8) proporcionan:

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_0 - (M - g_s \phi_0)] \psi = 0 \quad (3.11)$$

Las soluciones de (3.11) pueden obtenerse análogamente a las soluciones de la ecuación de Dirac libre con una masa del nucleón efectiva  $M^* = M - g_s \phi_0$  y la energía dada por  $E(k) - g_v V_0$  con

$$E(k) = g_v V_0 \pm E^*(k) = g_v V_0 \pm (\mathbf{k}^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

La densidad lagrangiana (3.5) en la aproximación de campo medio (MFT) para sistemas uniformes e infinitos con  $N=Z$  y paridad bien definida (materia nuclear simétrica) se escribe:

$$\mathcal{L}_{MFT} = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_0 - (M - g_s \phi_0)] \psi - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 \quad (3.13)$$

donde el único campo cuántico es  $\psi$ .

Cuando se ajustan los parámetros de la teoría para reproducir propiedades de materia nuclear ( $\frac{E}{A} - M \simeq -15.75 \text{ MeV}$ ,  $k_F \simeq 1.42 \text{ fm}^{-1}$ ), se obtienen valores de  $M^*/M \approx 0.6 - 0.8$ ,  $g_s \phi_0 \approx 400 \text{ MeV}$  y  $g_v V_0 \approx 330 \text{ MeV}$ . Los valores de la energía de ligadura relativamente pequeños provienen de cancelaciones entre la parte escalar y vector, lo que es una característica de esta clase de modelos.

#### NÚCLEOS FINITOS

Extendemos el modelo anterior permitiendo variaciones espaciales en el valor de los campos medios, con simetría esférica,  $\phi_0 \equiv \phi_0(r)$ ,  $V_0 = V_0(r)$ . Los campos mesónicos se tratan como constantes localmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MFT}^I &= \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_0 - (M - g_s \phi_0)] \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} [(\nabla \phi_0)^2 + m_s^2 \phi_0^2] + \frac{1}{2} [(\nabla V_0)^2 + m_v^2 V_0^2] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para un análisis cuantitativo adecuado es necesario incluir la interacción coulombiana (campo  $A_\nu$ , sin masa y constante de acoplo  $e$  proporcional a la carga) y para el caso en que  $N \neq Z$ , un campo que se acople con dependencia isovectorial con el campo hadrónico (campo  $b$  correspondiente al mesón  $\rho$  neutro, con masa  $m_\rho$  y constante de acoplo  $g_\rho$ ).

Consideramos estados nucleares con paridad bien definida y momento angular total nulo (núcleos con capas completas), con lo cual los piones no contribuyen en la aproximación de campo medio. Si la carga del estado inicial y final está bien definida lo mismo pasa con los mesones  $\rho$  con carga no nula (los valores esperados de estos campos son cero y éstas son las únicas cantidades que intervienen en esta aproximación).

Con estas extensiones, en vez de (3.14) trabajamos con:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MFT}^{II} &= \bar{\psi} \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_0 - (M - g_s \phi_0) - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 - e \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 A_0 \right] \psi - \\ &\quad \frac{1}{2} [(\nabla \phi_0)^2 + m_s^2 \phi_0^2] + \frac{1}{2} [(\nabla V_0)^2 + m_v^2 V_0^2] + \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 + \frac{1}{2} [(\nabla b_0)^2 + m_\rho^2 b_0^2] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$\tau_3$  es la tercera componente del operador de isospín. Utilizando (3.3) obtenemos las ecuaciones de los campos a partir de (3.15):

$$(\nabla^2 - m_s^2)\phi_0(r) = -g_s\rho_s(r) = -g_s \langle \psi^\dagger \psi \rangle \quad (3.16)$$

$$(\nabla^2 - m_v^2)V_0(r) = -g_v\rho_b(r) = -g_v \langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle \quad (3.17)$$

$$(\nabla^2 - m_\rho^2)b_0(r) = -\frac{1}{2}g_\rho\rho_3(r) = -\frac{1}{2}g_\rho \langle \psi^\dagger\tau_3\psi \rangle \quad (3.18)$$

$$\nabla^2 A_0(r) = -\frac{1}{2}e\rho_p(r) = -\frac{1}{2}e[\rho_b + \rho_3] \quad (3.19)$$

Para el campo bariónico tenemos de nuevo una ecuación similar a la de Dirac:

$$\left[ i\gamma_\mu\partial^\mu - g_v\gamma^0V_0(r) - \frac{g_\rho}{2}\tau_3\gamma^0b_0(r) - \frac{e}{2}(1 + \tau_3)\gamma^0A_0(r) - [M - g_s\phi_0(r)] \right] \psi = 0 \quad (3.20)$$

Suponemos que el estado fundamental consiste en un cierto número de capas completas y la ecuación (3.20) puede resolverse con los métodos del apéndice A, supuestos unos valores iniciales para los campos mesónicos. Obtenido el valor del campo bariónico se introduce en los términos de la derecha de las ecuaciones (3.16)—(3.19) con lo que podemos resolverlas para obtener los campos clásicos que aparecen en (3.20). Este proceso puede repetirse de forma iterativa hasta obtener valores autoconsistentes de los campos clásicos y la densidad bariónica (solución Hartree) [HMS91].

#### MODELOS LINEALES (HS)

**Tabla 3.1:** Parámetros de los modelos relativistas (masas en  $MeV$ ,  $b_2$  en  $fm^{-1}$ ).

	$M$	$m_s$	$m_v$	$m_\rho$	$g_s$	$g_v$	$g_\rho$	$b_2$	$b_3$
HS	939	520	783	770	10.47	13.80	8.07	0.	0.
NL1	938	492	795	763	10.14	13.29	9.95	12.17	-36.27

En el lagrangiano  $\mathcal{L}_{MFT}^{II}$  de la ecuación (3.15) falta determinar los valores de las constantes de acoplo y las masas de los mesones para acabar de

**Tabla 3.2:** Predicciones para materia nuclear simétrica de los modelos relativistas para la masa efectiva del nucleón, la compresibilidad  $K$ , la energía de ligadura por nucleón, la densidad y la energía de asimetría.

	$M^*/M$	$K(MeV)$	$E/A - M (MeV)$	$\rho_0(fm^{-3})$	$a_4$
HS	0.57	545	-15.75	0.148	35.0
NL1	0.54	212	-16.43	0.154	43.6

definir el modelo. En la referencia [HS81] se ajustan los parámetros con un mínimo de fenomenología, tomando para las masas de los mesones los valores experimentales (excepto para la partícula escalar), ajustando las constantes de acoplo para reproducir los valores de energía de ligadura, energía de asimetría y densidad de materia nuclear. La masa de la partícula escalar  $m_s$  se ajusta para reproducir el radio de carga del núcleo  $^{40}Ca$ . Este modelo lo denominaremos HS. Los valores de las masas y constantes de acoplo se resumen en la tabla 3.1 y los resultados para algunas propiedades de materia nuclear aparecen en la tabla 3.2.

#### MODELOS NO LINEALES (NL1)

Los modelos lineales como el presentado en el apartado anterior tienen cierta dificultad para describir algunas características de núcleos finitos [HS81, Rn88]. Para mejorarlos puede utilizarse una extensión del lagrangiano lineal en la que el campo escalar  $\phi$  interactúa consigo mismo a través de un potencial no lineal [BB77]. Esto se ha utilizado en el modelo del que hablaremos aquí y al que nos referiremos como NL1 [Rn86], en el cual ese potencial es polinómico de la forma  $U(\phi) = b_2\frac{1}{3}\phi^3 + b_3\frac{1}{4}\phi^4$ . Los parámetros se ajustan para reproducir los radios y difusividad de la densidad de carga y la energía de ligadura de los núcleos mágicos  $^{16}O$ ,  $^{40}Ca$ ,  $^{48}Ca$ ,  $^{58}Ni$ ,  $^{90}Zr$ ,  $^{116}Sn$ ,  $^{124}Sn$  y  $^{208}Pb$ . En este modelo se ajustan 8 parámetros (ver tabla 3.1), número comparable a los ajustes no relativistas con fuerzas de tipo Skyrme. La excepción es  $m_\rho$ , que no se determina en el ajuste sino que se toma el valor que se utiliza en los modelos de intercambio de un bosón (OBE) [Rn86, Hl81]. Los valores de los parámetros que resultan y algunas predicciones aparecen en las tablas 3.1 y 3.2.

### 3.2 Descripción relativista de algunos núcleos mágicos

Resumimos los resultados obtenidos para los núcleos  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  y  $^{208}\text{Pb}$ , para densidades de carga del estado fundamental, espectro de niveles ligados, energías de ligadura por nucleón, y comparamos con los valores experimentales y con los resultados de cálculos Hartree-Fock no relativistas estándar, con interacciones de tipo Skyrme (SKIII) [VBr72] y de alcance finito (G0) [Cm72].

#### 3.2.1 Energías de ligadura y niveles monoparticulares

##### ENERGÍAS DE LIGADURA

En la tabla 3.3 se listan los resultados para la energía de ligadura por nucleón y los valores experimentales. En los resultados teóricos se ha restado la energía del centro de masas.

**Tabla 3.3:** Energías de ligadura por nucleón en  $\text{MeV}$ .

Núcleo	HS	NL1	SKIII	G0	Exp.
$^{16}\text{O}$	-5.65	-7.95	-8.02	-7.71	-7.98
$^{40}\text{Ca}$	-6.52	-8.56	-8.55	-8.26	-8.55
$^{48}\text{Ca}$	-6.90	-8.60	-8.72	-8.42	-8.67
$^{90}\text{Zr}$	-7.09	-8.72	-8.70	-8.49	-8.71
$^{208}\text{Pb}$	-6.60	-7.88	-7.87	-7.88	-7.87

El acuerdo con los resultados experimentales es bueno, excepto para el modelo HS, lo cual es de esperar ya que todos los modelos menos éste ajustan los parámetros libres para reproducir los valores experimentales de energía de ligadura para estos núcleos. En la tabla 3.4 se observa cómo las distintas contribuciones (correspondientes en este orden a los nucleones, al campo escalar, a los términos no lineales, al campo vectorial, al mesón  $\rho$ , a la interacción coulombiana y a la corrección del centro de masas) se combinan para dar lugar a energías de ligadura por partícula ( $E_B/A$ ) del orden de magnitud correcto. El modelo HS, sin embargo, predice valores demasiado bajos, lo

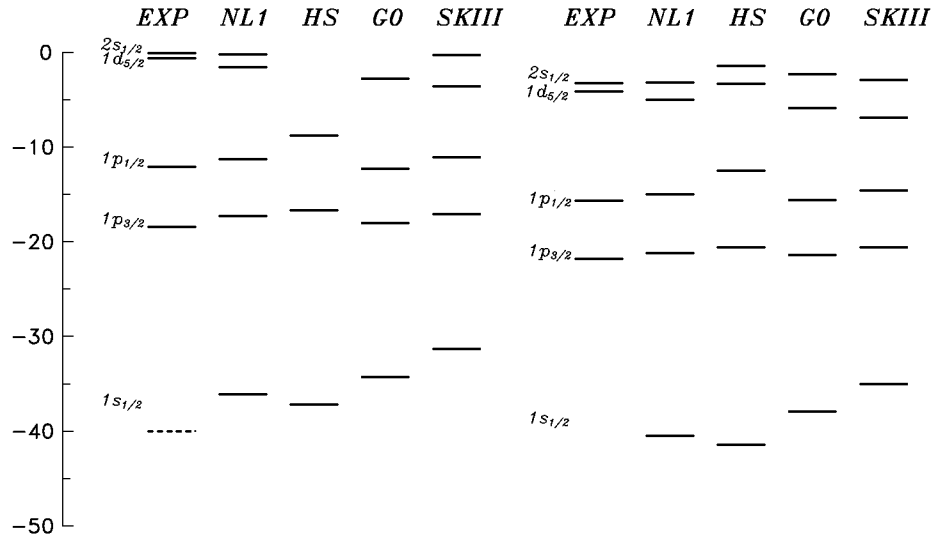
**Tabla 3.4:** Contribuciones a la energía de ligadura (en  $\text{MeV}$ ) de los términos de  $\mathcal{L}_{MFT}^I$ .

Núcleo		$\psi$	$\phi$	$\phi_{nl}$	$V$	$\rho$	Coul.	CDM	$E_B/A$
$^{16}\text{O}$	NL1	-358	1807	-38	-1510	0	-17	-12	-7.95
	HS	-349	2048	—	-1761	0	-17	-12	-5.65
$^{40}\text{Ca}$	NL1	-972	5165	-94	-4353	0	-80	-9	-8.56
	HS	-950	5751	—	-4973	0	-80	-9	-6.52
$^{208}\text{Pb}$	NL1	-4836	29610	-590	-24902	-121	-825	-5	-7.88
	HS	-5060	34108	—	-26741	-86	-837	-5	-6.60

cual se atribuye a una descripción incorrecta de la superficie [SeW86]. En general, los intentos de reproducir a la vez valores experimentales de radios de carga y energías de ligadura en núcleos mágicos ajustando parámetros de modelos lineales como HS han tenido poco éxito [Rn86].

**Tabla 3.5:** Separación de espín-órbita en algunos núcleos mágicos (en  $\text{MeV}$ ).

Núcleo	capa	HS		NL1		SKIII		G0		Exp.	
		N	P	N	P	N	P	N	P	N	P
$^{16}\text{O}$	$1p$	8.0	7.9	6.1	6.0	6.0	6.2	5.7	5.8	6.1	6.3
$^{40}\text{Ca}$	$1d$	8.5	8.4	6.8	6.7	6.4	6.3	6.4	6.3	5.1	5.1
$^{48}\text{Ca}$	$2p$	1.3	—	1.5	—	1.8	—	1.8	—	2.0	—
$^{90}\text{Zr}$	$2d$	2.1	—	2.1	—	—	—	—	—	2.3	—
$^{208}\text{Pb}$	$2d$	—	2.2	—	1.6	—	1.8	—	2.2	—	1.32
	$1g$	—	5.8	—	4.4	—	3.8	—	4.2	—	4.0
	$3p$	0.93	—	0.76	—	1.0	—	1.2	—	0.89	—
	$1i$	9.1	—	6.6	—	—	—	—	—	5.9	—



**Figura 3.1:** Espectro de niveles monoparticulares del  $^{16}\text{O}$ , en  $\text{MeV}$ , para protones (izquierda) y neutrones (derecha).

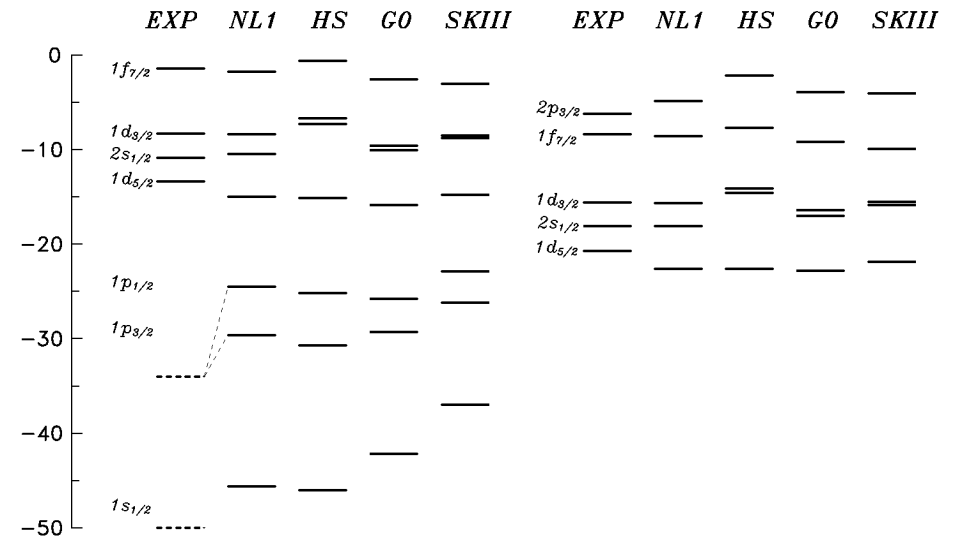
#### SEPARACIONES ESPÍN-ÓRBITA

En la tabla 3.5 se comparan los valores de la separación en energía entre algunos niveles debida a la interacción de espín-órbita. El acuerdo de las predicciones relativistas con el valor experimental es razonablemente bueno (dentro del 20% para el modelo NL1, tan bueno o mejor que las predicciones no relativistas de SKIII y G0). En estos modelos relativistas no se ajustan los parámetros a ningún observable directamente relacionado con variables de espín, mientras que en el caso no relativista la interacción espín-órbita se introduce *ad hoc* y su magnitud se ajusta a los valores de las separaciones observados experimentalmente.

Si examinamos el límite no relativista de la ecuación (3.20) (a través por ejemplo de un desarrollo FW en  $\mathbf{P}/M$  y  $U_{0,s}/M$ ) reconocemos la aparición de términos de interacción proporcionales al operador  $\mathbf{LS}$  en la forma:

$$\frac{1}{2M^2 r} \frac{d}{dr} (U_0 + U_s) \mathbf{SL} \quad (3.21)$$

con  $U_0 = g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 b_0 + \frac{1}{2} e(1 + \tau_3) A_0$  y  $U_s = g_s \phi_0$ . La magnitud de

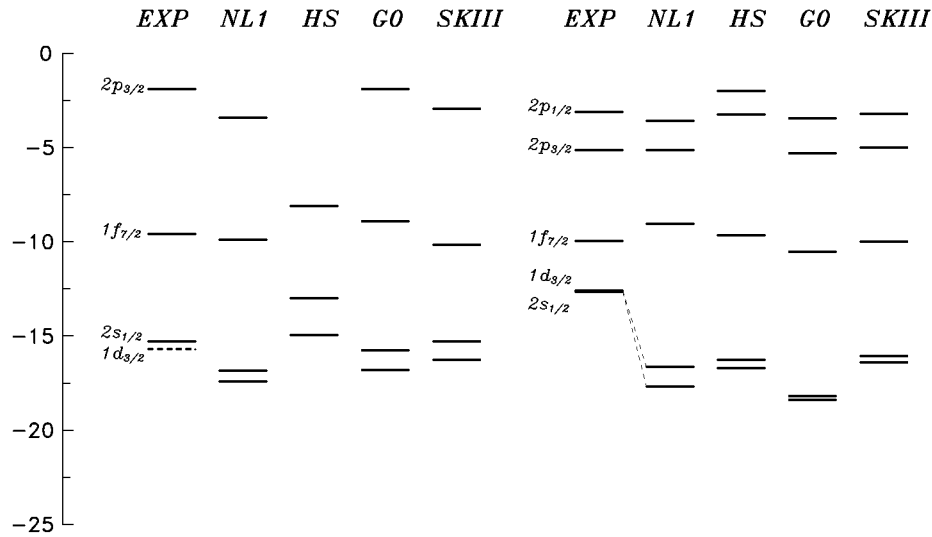


**Figura 3.2:** Igual que la figura 3.1 para  $^{40}\text{Ca}$ .

este término viene determinada principalmente por los valores del potencial escalar y vector, cuyas contribuciones se suman en (3.21) para proporcionar el valor correcto de la separación espín-órbita, al contrario que en el caso de las energías de ligadura, en el que las diferentes contribuciones se cancelan en su mayor parte (como se ve en la tabla 3.4). Vemos pues que en estos modelos relativistas la interacción de espín-órbita aparece de forma natural. El acuerdo cuantitativo con las observaciones experimentales es el principal argumento para sostener una cierta superioridad de los modelos fenomenológicos relativistas S-V (escalar-vector) frente a los cálculos no relativistas de similar complejidad.

#### NIVELES DE ENERGÍA MONOPARTICULARES

En las figuras 3.1–3.5 se comparan los resultados de los distintos modelos con el valor experimental para el espectro de niveles monoparticulares cerca del nivel de Fermi. Es común a todos los modelos una menor densidad de estados en torno al nivel de Fermi que la observada (por ejemplo ver la figura 3.5 para el  $^{208}\text{Pb}$  y 3.4 para  $^{90}\text{Zr}$ ) pero el acuerdo global (orden de llenado y separación entre niveles) es bastante bueno.

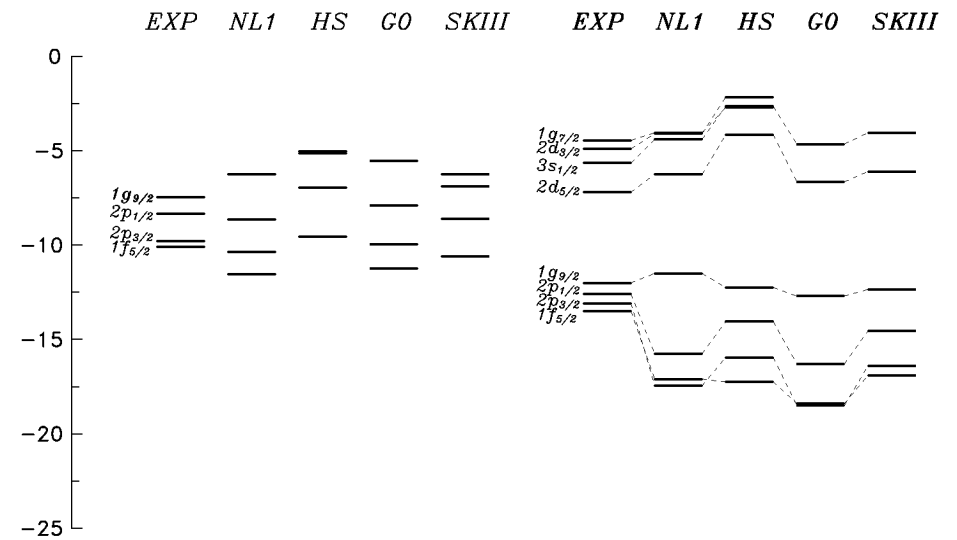

 Figura 3.3: Igual que la figura 3.1 para  $^{48}\text{Ca}$ .

**Tabla 3.6:** Radios de carga y diferencia entre los radios de las distribuciones de neutrones y protones en  $fm$ .

Núcleo	$r_c$					$r_n - r_p$				
	HS	NL1	SKIII	G0	Exp.	HS	NL1	SKIII	G0	Exp.
$^{16}\text{O}$	2.75	2.78	2.76	2.82	2.74	-0.03	-0.03	-0.02	-0.02	0.0
$^{40}\text{Ca}$	3.48	3.50	3.50	3.56	3.48	-0.06	-0.05	-0.05	-0.05	0.03
$^{48}\text{Ca}$	3.46	3.49	3.55	3.57	3.47	0.22	0.25	0.14	0.19	$0.2 \pm 0.05$
$^{90}\text{Zr}$	4.26	4.28	4.33	4.33	4.26	0.10	0.14	0.05	0.09	0.13
$^{208}\text{Pb}$	5.46	5.53	5.58	5.52	5.50	0.27	0.32	0.13	0.22	$0.16 \pm 0.05$

### 3.2.2 Radios y distribuciones de carga

Para obtener las distribuciones y radios de carga se ha partido de la densidad de protones, convolucionándola como en las referencias [VBr72,


 Figura 3.4: Igual que la figura 3.1 para  $^{90}\text{Zr}$ .

GRT90] con un factor de forma gaussiano para el protón de radio  $\approx 0.8 fm$  (con lo cual  $r_c = \sqrt{r_p^2 + 0.64}$ ) despreciando la pequeña contribución del factor de forma del neutrón. Las distribuciones de carga son prácticamente idénticas a las obtenidas con el factor de forma exponencial utilizado por ejemplo en la referencia [HS81] y que corresponde a una dependencia en  $q$  para el factor de forma del protón del tipo  $1/(1+q^2/q_0^2)^2$  con  $q_0 = 850 MeV$ .

En la tabla 3.6 se comparan los radios de carga y la diferencia entre los radios de las distribuciones de protones y neutrones. Al igual que para las energías de ligadura, el acuerdo con los valores experimentales es bueno, como es de esperar ya que se parte de estas magnitudes para ajustar parámetros de los modelos, en este caso incluso en el modelo HS (ajustado al radio de carga en  $^{40}\text{Ca}$ ).

Las figuras 3.6—3.8 muestran las distribuciones de carga. La comparación con la densidad de carga experimental revela la presencia de oscilaciones en el interior del núcleo de amplitud mayor (unas tres veces) que la observada, para los cuatro modelos y en todos los núcleos (tal vez la situación es algo mejor para el modelo HS). También es característico el valor demasiado alto en el interior de  $^{208}\text{Pb}$ .

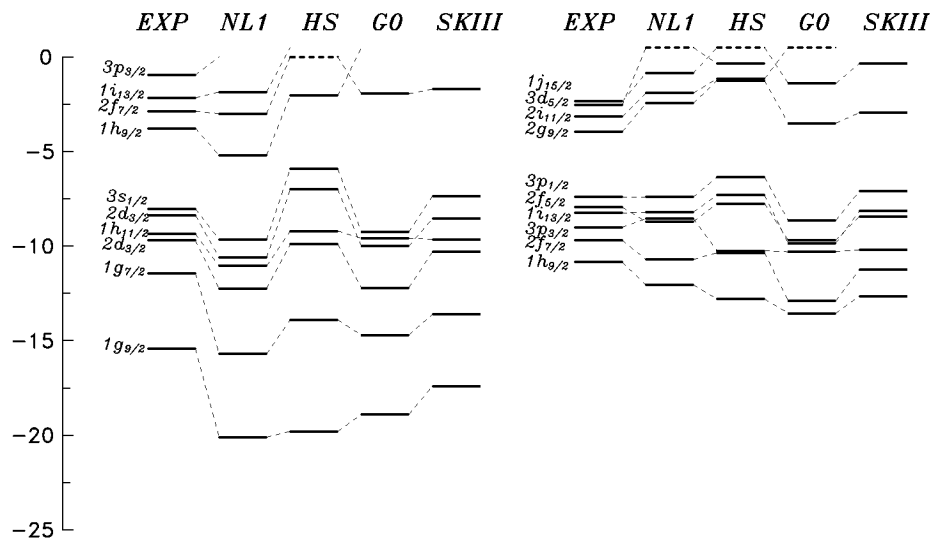


Figura 3.5: Igual que la figura 3.1 para  $^{208}\text{Pb}$ .

En la figura 3.8 se compara la diferencia entre la densidad bariónica y la densidad escalar para protones en el modelo HS. Ambas densidades se diferencian en que las componentes inferiores de la función de onda interviene con signo diferente. La contribución de las componentes inferiores tiende a disminuir la amplitud de las oscilaciones de la densidad de carga. Sin embargo, esto no sucede en el otro modelo relativista NL1, así que más que una característica general de los modelos S-V parece deberse a la forma de elegir los parámetros del modelo lineal. En general, es posible construir modelos con oscilaciones de la densidad en acuerdo con las observaciones experimentales pero a costa de empeorar el acuerdo en otros observables como la energía de ligadura [Rn86, Rn88].

### 3.2.3 Discusión

#### CARACTERÍSTICAS DE ESTOS MODELOS

1. Los valores de los potenciales escalares y vectoriales que entran en juego son grandes, del mismo orden que la masa del nucleón. El valor

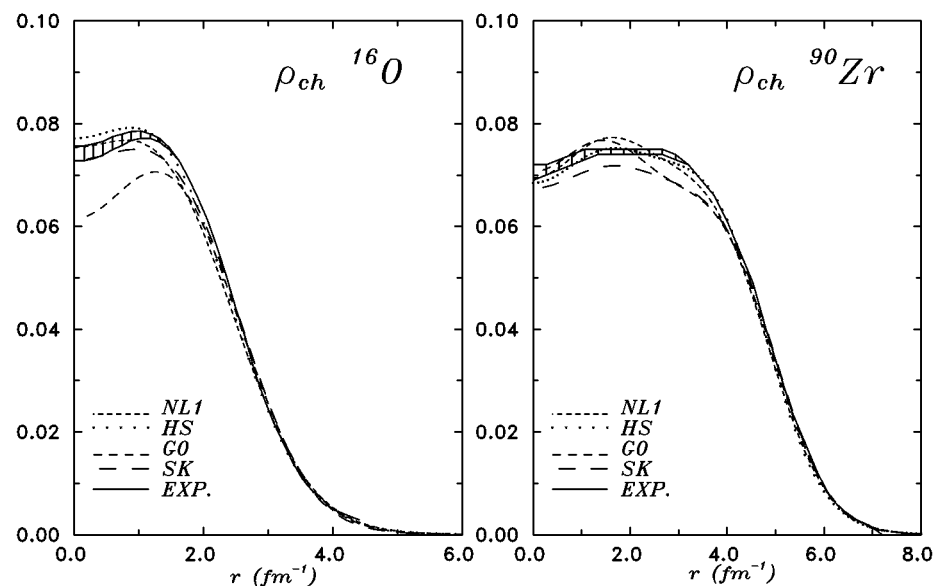


Figura 3.6: Densidad de carga para  $^{16}\text{O}$  y  $^{90}\text{Zr}$  (en  $e/\text{fm}^3$ ).

relativamente pequeño de las energías de ligadura observadas es debido a fuertes cancelaciones entre estos términos en la contribución total a la energía (ver tabla 3.4).

2. Esa misma cancelación da lugar a que los valores del potencial derivados en el límite no relativista sean sólo de unas pocas decenas de MeV. Pese a ello, al ser la magnitud absoluta de esos potenciales grande, la transformación FW no está justificada y no puede esperarse un buen acuerdo cuantitativo entre modelos relativistas y cálculos no relativistas.
3. Las partes escalar y vector del potencial relativista no se cancelan sobre las componentes inferiores. Esto da lugar a efectos no observados en el límite no relativista. La importancia de estas contribuciones puede estimarse en la figura 3.8, a la derecha, donde la diferencia entre la densidad bariónica y escalar para el núcleo  $^{208}\text{Pb}$  se debe a



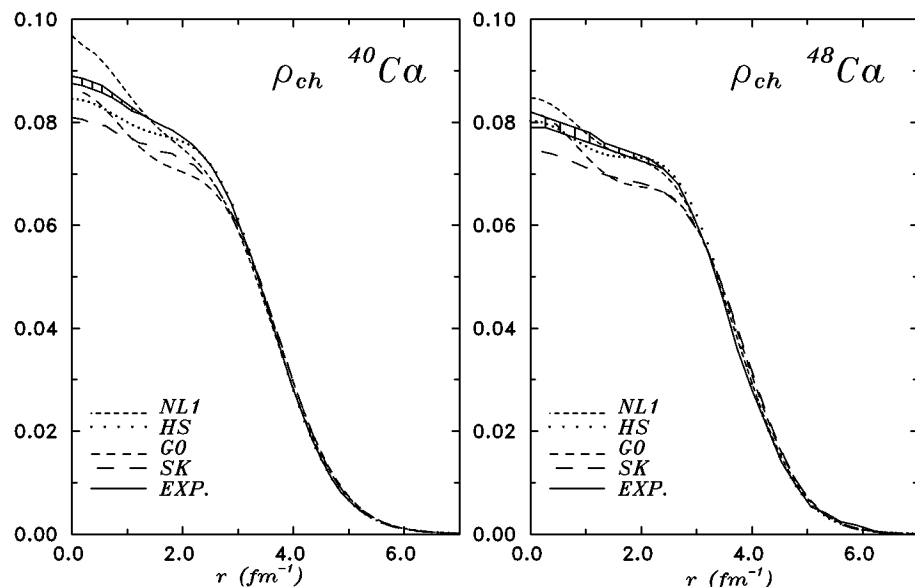


Figura 3.7: Igual que la figura 3.6 para  $^{40}\text{Ca}$  y  $^{48}\text{Ca}$ .

las componentes inferiores de la función de ondas que intervienen con signo contrario.

4. En el límite no relativista aparece un término de espín-órbita en el potencial (como se ve en la ecuación (3.21)) en el que la parte escalar y vector se combinan constructivamente dando lugar a energías de separación de espín-órbita de considerable magnitud y en acuerdo con las observadas, como se aprecia en la tabla 3.5.
5. En el hamiltoniano no relativista debido a la dependencia espacial del potencial escalar y por tanto de la masa efectiva ( $M^*(\mathbf{r}) = M - U_s(\mathbf{r})$ ), aparecen términos no locales, incluso en la aproximación de Hartree.
6. En este formalismo hay saturación de las fuerzas nucleares debido a la combinación de atracción y repulsión debidos al potencial vector y escalar, de forma que el término de fuente escalar disminuye al aumentar la densidad [Wa74]. El mecanismo es, por tanto, diferente del

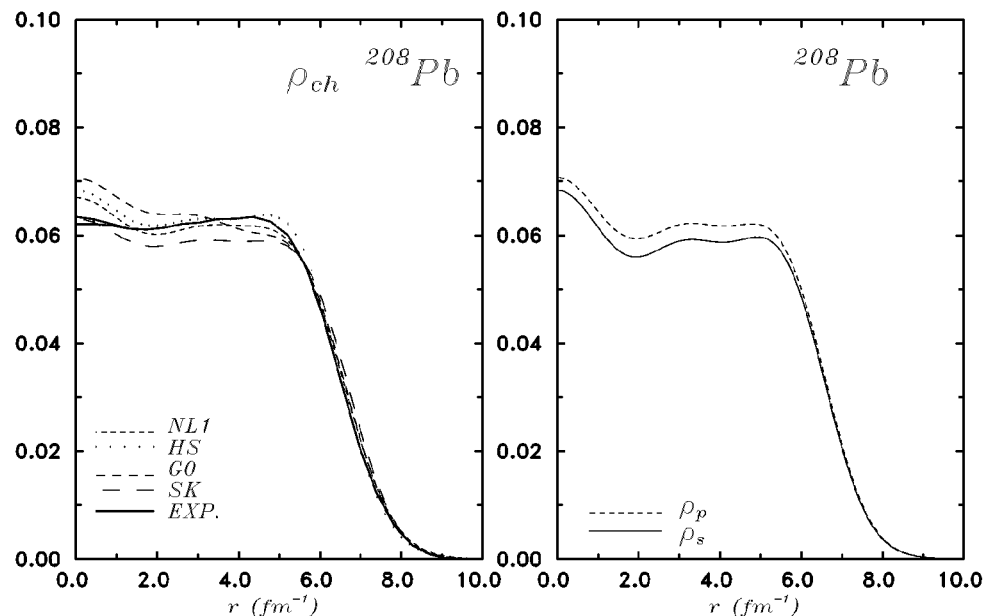


Figura 3.8: Densidad de carga (izquierda), bariónica y escalar de protones (derecha), para  $^{208}\text{Pb}$ .

caso no relativista en el que la saturación surge de las correlaciones a dos cuerpos debidas a un potencial intensamente repulsivo a cortas distancias.

#### DE HARTREE A HARTREE-FOCK

Se han publicado soluciones Hartree-Fock para modelos como los aquí expuestos casi a la vez que las soluciones Hartree que hemos visto [Brk78]. La diferencia entre ambos formalismos estriba en que a la hora de calcular la parte radial de las funciones de onda no basta con introducir los potenciales directamente calculados a partir de los campos mesónicos, sino también toda una serie de términos de intercambio que introducen en el potencial central una dependencia del estado para el que se calcule. Aunque el formalismo es más complicado, la diferencia entre los resultados Hartree y Hartree-Fock no es muy grande. Como en estos modelos se trabaja con lagrangianos

fenomenológicos con parámetros ajustados a los datos experimentales, puede suponerse que las diferencias entre ambos formalismos se traducen en la obtención de diferentes juegos de parámetros que conducen a soluciones similares.

Esto justifica que en la mayor parte de modelos de esta clase se trabaje en la aproximación más sencilla (Hartree) como hacemos en este trabajo.

#### COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

El acuerdo en los observables globales aquí comparados es razonablemente bueno para los dos modelos relativistas aunque el modelo lineal HS predice energías de ligadura menores que las observadas. En cuanto a las densidades de carga, son algo mejores las del modelo HS que las predichas por el modelo NL1 en todos los casos excepto tal vez el del plomo. Para ambos modelos se ajustan tan bien o mejor que las derivadas a partir de modelos no relativistas (salvo en el interior del  $^{40}\text{Ca}$ , en que el modelo NL1 se desvía del resto).

Como hemos visto, los modelos relativistas del núcleo basados en lagrangianos fenomenológicos junto con la aproximación de campo medio y las soluciones obtenidas por el método de Hartree, son capaces de describir bastante bien propiedades del estado fundamental de los núcleos mágicos. Hay que destacar también la sencillez del modelo: los potenciales son locales y las ecuaciones muy sencillas, de forma que es inmediato obtener las soluciones. Sin embargo, en el límite no relativista estos modelos dan lugar a términos no locales y a dependencias en la densidad también presentes en modelos no relativistas sofisticados, así como a términos de espín-órbita de la magnitud adecuada. En conjunto puede decirse que estos modelos relativistas son adecuados para describir las propiedades globales del estado fundamental de núcleos mágicos [HS81, HMS91].

### 3.3 Potenciales ópticos relativistas

En DWIA se tiene en cuenta la interacción en el estado final del protón emitido con el núcleo residual. El estado de dispersión del protón se representa por una solución de la ecuación de Dirac (o de Schrödinger en el caso no relativista) con potencial óptico. Este potencial posee una parte real relacionada con la dispersión elástica y un término imaginario que tiene en cuenta efectos de absorción del protón debidos a transiciones en canales

no observados  $((p, d), (p, n), (p, 2p), \dots)$  o a su reabsorción por el núcleo residual.

En principio, sería posible el cálculo del potencial óptico en base a modelos relativistas análogos a los introducidos anteriormente para describir el núcleo blanco, con intercambio de mesones [HMS91, Cl83]. No obstante, para las energías cinéticas relativamente bajas de los nucleones emitidos (típicamente de 100 MeV en los experimentos de  $(e, e'p)$  que tratamos aquí) las correcciones debidas al medio (bloqueo de Pauli) son importantes. Por eso es más frecuente el uso de potenciales fenomenológicos procedentes de ajustes a experimentos de dispersión elástica nucleón-núcleo.

Este es el caso de los potenciales ópticos que utilizamos, parametrizaciones globales ajustadas con datos de  $^{40,48}\text{Ca}$ ,  $^{56}\text{Fe}$ ,  $^{60}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  y  $^{208}\text{Pb}$ , para energías del nucleón entre 65 y 1040 MeV [Hm90]. La forma de estas parametrizaciones es:

$$V(r, E) = V_0(E)f_0(r, E) + i[W_0(E)g_0(r, E) + W_{0SP}(E)h_0(r, E)] \quad (3.22)$$

$$S(r, E) = V_s(E)f_s(r, E) + i[W_s(E)g_s(r, E) + W_{sSP}(E)h_s(r, E)] \quad (3.23)$$

$V, S$  son los términos vector y escalar del potencial óptico;  $f, g$  son funciones de Woods-Saxon simetrizadas y las funciones  $h$  son derivadas de funciones de Woods-Saxon simetrizadas. La forma de la parte real del potencial óptico ( $f_0$  y  $f_s$ ) se ajusta para reproducir la de los potenciales obtenidos en cálculos relativistas Hartree en cada núcleo [Co87]. Para los demás parámetros del ajuste ( $V, W$  y los radios y difusividades de las funciones de Woods-Saxon) se usan diversas dependencias en la energía y el número másico ( $A$ ) (típicamente dependencias polinómicas en  $1/A$  hasta la segunda potencia, y en  $1/E$  hasta la tercera).

Existen dos parametrizaciones globales ligeramente diferentes (con 80 y 84 parámetros) que denominaremos fit 1 y fit 2 [HCCM92]. Para los núcleos y energías de interés en este trabajo no es necesario interpolar en el número atómico  $A$  ni en la energía cinética del nucleón detectado. El acuerdo con los observables utilizados en el ajuste (secciones eficaces totales, asimetrías y función de rotación de espín [Fes92]) es bueno.

En general, la interpolación en  $A$  y en  $E$  da resultados razonables. El número de parámetros utilizado y la calidad del ajuste a los observables utilizados son similares a los modelos no relativistas equivalentes, salvo para los observables de espín en que los modelos relativistas son superiores [Hm90].

### 3.4 Resumen

El propósito de incluir de forma exacta la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón en el cálculo teórico del proceso  $(e, e'p)$  determina la necesidad de utilizar un formalismo relativista consistente tanto para el núcleo inicial como para la interacción de estados finales entre el núcleo residual y el nucleón emitido. En este capítulo se ha mostrado que las descripciones relativistas de estos procesos no son peores (más bien al contrario) que cálculos no relativistas usuales y por tanto la imposición del formalismo relativista no debe afectar a la fiabilidad de los resultados obtenidos.

## 4 Aproximación DWBA para el Electrón

### 4.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han utilizado ondas planas (soluciones de la ecuación de Dirac libre) para la función de ondas del electrón. Por tanto se tiene en cuenta la interacción coulombiana entre el núcleo y el electrón sólo a primer orden (aproximación de Born). Esta interacción es proporcional a  $Z\alpha$  y por tanto no es pequeña en núcleos con  $Z \geq 20$ . Desde hace varias décadas [Yn54] es conocido que para una correcta comparación con los datos experimentales es necesario utilizar la *Aproximación de Born de Ondas Distorsionadas para el Electrón (DWBA)* consistente en utilizar como funciones de onda del electrón las soluciones a la ecuación de Dirac en presencia del potencial coulombiano del núcleo que se incluye de forma exacta (a todos los órdenes en  $Z\alpha$ ).

Para procesos de dispersión elástica de electrones, utilizados por ejemplo en la determinación de la distribución de carga nuclear, la aproximación DWBA se usa desde los años 50 y existen varios programas de ordenador de uso generalizado [Zg67, HsB83].

Más recientemente se ha aplicado al estudio de los primeros estados excitados del núcleo mediante dispersión de electrones [NMS85, Mo84].

Sin embargo, en la región cuasielástica sólo en los últimos años se han realizado intentos de incluir la aproximación DWBA de forma completa [McD90, JnO92].

### 4.2 Efecto de la interacción de Coulomb

#### 4.2.1 Desplazamiento del momento

El efecto más importante y fácil de estudiar se ilustra en la figura 4.1: debido al potencial coulombiano (unos 30 MeV en el caso de  $^{208}\text{Pb}$ ) el momento efectivo  $|\mathbf{k}_{eff}| = |\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}|$  del electrón en la vecindad de la región de interacción se ve incrementado en la cantidad  $\Delta k \simeq V_{\text{Coul}}(r \approx 0)$  con respecto al momento medido asintóticamente (lejos del núcleo). Este efecto es más importante cuanto menor sea la energía del electrón.

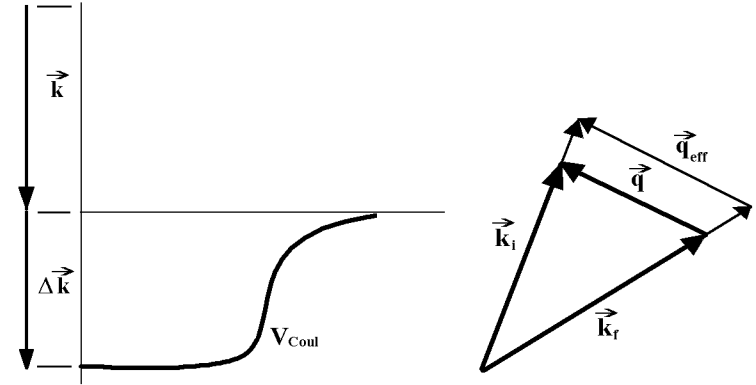


Figura 4.1: Desplazamiento en el momento debido a la interacción coulombiana.

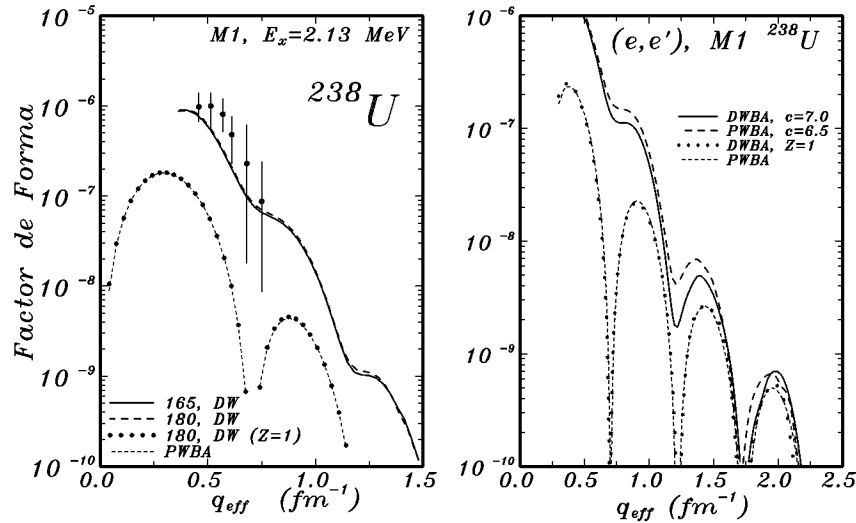
Como consecuencia, el valor del momento transferido al núcleo difiere del estimado a partir de los valores asintóticos. Naturalmente, en todo el proceso el momento cinético y la energía se conservan (o el cuadrimomento en notación relativista:  $(k_i - k_f)^\mu = (-P_A + P_{A-1} + P_F)^\mu$  en la figura 2.1). Sin embargo, además de mediante el fotón virtual que aparece en la figura 2.1 considerado en el cálculo de la transición, también hay transferencia de momento a través de múltiples fotones al tener en cuenta la interacción coulombiana a todos los órdenes. Dicho de otra forma, el valor del momento transferido  $\mathbf{q}$  no está completamente determinado por los valores asintóticos del momento cinético del electrón sino que habrá todo un rango de valores permitidos sobre los que se ha de integrar (ver fórmula B.21 en el Apéndice B).

Este efecto de desplazamiento en  $\mathbf{q}$  se ha incorporado en el cálculo PWBA de procesos en  $(e, e')$  o  $(e, e'p)$  con fórmulas como:

$$\mathbf{k}_{eff} = \mathbf{k} + V_c \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (4.1)$$

donde  $V_c$  es el potencial coulombiano en el interior del núcleo:  $V_c = f_c \frac{Z\alpha}{R}$ , correspondiente a una esfera de radio  $R$  uniformemente cargada ( $f_c = 3/2$ ) o a una distribución superficial de carga ( $f_c = 1/2$ ). La comparación con el experimento, sin embargo, muestra desplazamientos intermedios entre los valores predichos en ambos casos. En este trabajo, cuando hablemos de *Aproximación de Momento Efectivo (EMA)* utilizaremos los desplazamientos del

momento calculados a partir de la fórmula (4.1) ( $\mathbf{q}_{eff} = \mathbf{k}_{i,eff} - \mathbf{k}_{f,eff}$ ) y con los valores para la energía de Coulomb derivados de las distribuciones de carga nuclear predichas por los modelos del capítulo anterior (que están en buen acuerdo con las experimentales). De esta forma se evita el tener que ajustar el parámetro  $f_c$  como es habitual en algunos análisis de procesos ( $e, e'p$ ) [Qn88].



**Figura 4.2:** Factor de Forma medido mediante  $(e, e')$  para la transición  $M1$  a estados excitados  $1^+$  de  $^{238}\text{U}$ .

#### 4.2.2 Otros efectos de la distorsión coulombiana

En la figura 4.2 se muestra un cálculo típico en DWBA para una transición  $M1$  observada mediante el proceso  $(e, e')$ . Hemos elegido mostrar aquí resultados para el núcleo  $^{238}\text{U}$  porque al ser su carga eléctrica grande el efecto de la distorsión coulombiana es importante. Para núcleos más ligeros como  $^{44}\text{Ti}$  los efectos que aquí se discuten son mucho menores [MSU87, RUPM90]. Se representa el factor de forma transversal [Mo84] y se compara con el resultado en PWBA. A la derecha se representa el cálculo en PWBA frente a  $q_{eff}$  y también un caso de prueba en DWBA con la distorsión coulombiana puesta aproximadamente a cero ( $Z = 1$ ), con lo que se deben reproducir los

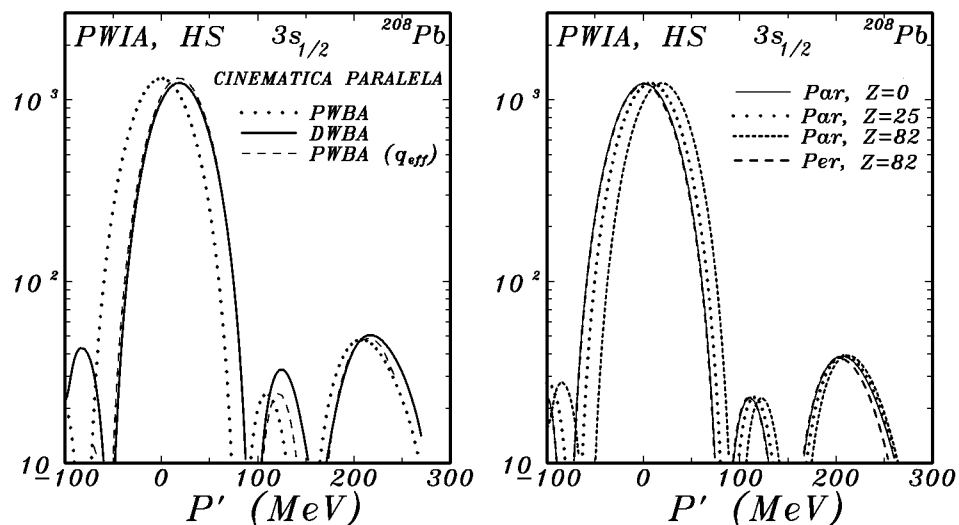
resultados de PWBA. También se representan los resultados de DWBA con dos distribuciones de carga diferentes (distribuciones de Woods–Saxon en las que el radio  $c$  es diferente: 6.5 fm en un caso y 7 fm en otro). Los resultados de DWBA se representan frente a  $q$ , lo cual hace que el efecto de corrimiento en el momento sea incorporado en la figura a los resultados de PWBA. A la izquierda se representa el resultado para un cálculo realista [NFSM92] de una transición  $M1$  para el mismo núcleo ( $^{238}\text{U}$ ) junto con algunos datos experimentales [HI88]. En el resultado de DWBA el potencial coulombiano que interviene en el cálculo de las funciones de onda distorsionadas se obtiene a partir de una parametrización tipo Woods–Saxon ajustada a la distribución de carga observada experimentalmente [dVrJ87]. Como en el caso anterior, los resultados en PWBA y en el caso de prueba de DWBA ( $Z=1$ ) se dibujan frente a  $q_{eff}$  y los de DWBA frente a  $q$ . El ángulo de dispersión permanece fijo  $\theta_c = 165^\circ$  ó  $180^\circ$  y la energía del flujo de electrones incidente varía. Como vemos, existe también una variación de escala importante debido a lo que se conoce como *efectos de focalización* o concentración del flujo electrónico en la vecindad del núcleo.

En DWBA se sustituye la onda plana por el estado de dispersión en el potencial coulombiano del electrón; asintóticamente se puede reconocer en dicho estado una parte de onda plana y otra de onda esférica [Mzb61, Üb71]. Son las interferencias entre la parte de onda esférica y de onda plana tanto para el estado inicial como el final las que dan lugar a estos fenómenos de focalización

La magnitud de este efecto es difícil de evaluar sin realizar el cálculo exacto. Como vemos en la figura 4.2, en algunas regiones el factor de forma en DWBA es mucho mayor que en PWBA. Esto es así para  $q$  bajo que en este caso corresponde a menor energía para el electrón.

En  $(e, e'p)$  se espera que el efecto sea menos importante ya que las energías de los electrones son bastante grandes ( $\epsilon_i \sim 300 - 500$  MeV). En la figura 4.3 vemos el efecto de DWBA para  $(e, e'p)$  con cinemática paralela,  $\epsilon_i = 430$  MeV,  $E_m = 8$  MeV y PWIA para la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$ . La función de ondas del protón ligado se ha calculado con el modelo HS (ver capítulo 3) y se usa el operador  $J_{ncc1}$ . A la izquierda se compara PWBA con DWBA. Puede apreciarse el desplazamiento en el momento perdido ( $P' = P$ , en PWIA) y también la influencia de los efectos de focalización: reducción del orden del 7% en el primer máximo, aumento del 40% en el segundo y también aumento (5%) en el tercero, en DWBA respecto de PWBA.

Comprobamos que es importante incluir el efecto de la distorsión coulombiana de forma exacta en  $(e, e')$  para realizar la comparación con los datos experimentales. Para el proceso  $(e, e'p)$ , la aproximación de PWBA frente a  $q_{eff}$  parece suficientemente buena, sin embargo hay alrededor de un 7% de variación en el valor del primer máximo, lo cual tendrá una repercusión del mismo orden en el factor espectroscópico deducido. Ya que el error sistemático en los datos experimentales (no incluido en las barras de error de las figuras para  $(e, e'p)$ ) está alrededor del 5% [St91], se concluye que, al menos en este caso, también es necesario incluir de forma exacta la distorsión coulombiana para el electrón en los procesos  $(e, e'p)$  con el fin de deducir los factores espectroscópicos correctos.



**Figura 4.3:** Efecto de la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón en la sección eficaz reducida para el proceso  $(e, e'p)$ . A la derecha se compara el efecto en el corrimiento del momento transferido para distintas situaciones cinemáticas y para valores diferentes de la carga del núcleo que interviene en el cálculo del desplazamiento del momento. A la izquierda puede observarse además la importancia de los efectos de focalización, al comparar dos cálculos en PWIA para el plomo: en DWBA para el electrón y en PWBA con  $q_{eff}$ .

#### 4.2.3 Efectos de focalización y cálculos aproximados de DWBA

El desarrollo completo en ondas parciales tanto para el electrón (DWBA) como para el protón (DWIA) da lugar a expresiones complicadas,

enmascarando la interpretación de los resultados así obtenidos. Por ello se ha intentado evaluar la distorsión coulombiana de forma aproximada, como ahora veremos.

#### APROXIMACIÓN DE CONSERVACIÓN DE HELICIDAD

En [McD90] se obtienen resultados en  $(e, e'p)$  admitiendo ciertas hipótesis que constituyen lo que en dicha referencia se denomina *Aproximación de Conservación de Helicidad* que describimos a continuación [McD91]:

1. En lugar del desarrollo en ondas parciales completo (ver Apéndice A, ecuación (A.15)) se parte de la expansión de Rayleigh [BrS67] para la onda plana:

$$e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sim \sum_{LM} i^L j_L(qr) Y_{LM}(\hat{q}) Y_{LM}^*(\hat{r}) \quad (4.2)$$

2. Se sustituye en la expresión anterior la función esférica de Bessel por las funciones radiales  $f, g$  calculadas con las expresiones del Apéndice B para las componentes inferiores o superiores de la función de onda.
3. No se incorporan los desfases en el desarrollo.

La aproximación se basa en que, usualmente, el ángulo de dispersión para el electrón  $\theta_e$  no es muy grande en el proceso  $(e, e'p)$  y si se toma igual a cero es posible reordenar el desarrollo (A.15) para recuperar la expresión de Rayleigh (con la sustitución de  $j_L(qr)$  por  $f, g$ ) siempre que no se consideren los desfases. Por tanto, hay dos elementos en esta aproximación: la no inclusión de desfases y la *reordenación* de la serie. Al no incluir los desfases, el término que asintóticamente se comporta como onda esférica resulta suprimido en gran medida, es decir, se reducen los términos que pueden dar lugar a interferencias (términos de focalización) y por ello los valores de los máximos de la sección eficaz en PWBA deberían coincidir con los obtenidos en esta aproximación. Sí se recuperará, en cambio, el valor correcto del corrimiento en el momento para el electrón ya que la parte radial de la función de ondas se calcula en la misma forma que en DWBA.

#### DESARROLLOS EN $(Z\alpha/kR)$

Si el momento del electrón  $k$  es bastante grande comparado con la interacción de Coulomb (de orden  $Z\alpha/R$  donde  $R$  es el radio del núcleo) lo cual

es el caso de los experimentos  $(e, e'p)$  analizados aquí ya que  $k$  es del orden de  $2-3 \text{ fm}^{-1}$  frente a energías coulombianas de alrededor de  $0.2 \text{ fm}^{-1}$  en el caso del plomo, puede pensarse que un desarrollo en potencias de  $(Z\alpha/kR)$  de la función de ondas del electrón representa una buena aproximación incluso a órdenes bajos. Este método se utiliza en algunos códigos no relativistas [GiuP87] en los que se incluyen términos hasta orden  $(Z\alpha/kR)^2$ . También se han calculado analíticamente estos desarrollos en modelos sencillos [TTZ88], estudiando la magnitud del efecto de focalización. La aplicación práctica de estas aproximaciones es limitada porque:

1. Las expresiones no son sencillas. Normalmente han de despreciarse algunos términos más pequeños para poder trabajar con expresiones manejables.
2. En el desarrollo intervienen los valores del potencial coulombiano y sus derivadas o su valor promediado de alguna forma sobre el interior nuclear. La magnitud adecuada del corrimiento en el momento depende críticamente del valor que se tome para el potencial.
3. El desarrollo converge asintóticamente y por tanto de forma lenta. Los resultados a primer y segundo orden difieren bastante en cuanto al efecto de focalización. En general, a primer orden en la expansión se obtiene demasiado efecto de focalización y a segundo orden se corrige en parte esta tendencia [TTZ88].

Lo cierto es que, si bien con esta aproximación es posible recuperar cualitativamente los efectos esperados de la distorsión coulombiana, para ser realmente útil como estimación cuantitativa se han de incluir términos cuya evaluación es complicada [TTZ88], lo que hace que las expresiones tengan poco interés práctico.

La mayor controversia se centra en el efecto de focalización. Un análisis basado en la expansión no relativista a primer orden sugiere la inclusión en la sección eficaz de un factor  $[(1+k_{i,eff}/k_i)(1+k_{f,eff}/k_f)]^2$  lo que para el plomo representa un aumento de alrededor de un 30%, en acuerdo con los cálculos de [Kn71] (en cinemática perpendicular). Los resultados de la figura 4.3 muestran que esta expresión no es adecuada en general. Como hemos visto anteriormente, en alguna región, dependiendo de la cinemática, la magnitud del efecto de focalización coincide aproximadamente con el obtenido a partir del desarrollo en  $Z\alpha/kR$  a primer orden (por ejemplo en el segundo máximo)

pero la situación es tal vez demasiado compleja para poder ser reproducida con aproximaciones tan sencillas. La inclusión de términos en segundo orden no ayuda mucho. Prueba de ello es que, como se verá en el próximo capítulo, el mismo cálculo pero en DWIA para el protón muestra también un 7% de variación en el primer máximo, pero ahora es un aumento de DWBA respecto de PWBA.

## 4.3 Dependencias introducidas en la sección eficaz

### 4.3.1 Dependencia en la distribución de carga

En DWBA hay que especificar cuál es la distribución de carga utilizada para calcular el potencial coulombiano a introducir en la ecuación de Dirac para los electrones. Como vemos en la figura 4.1, el factor de forma es sensible a variaciones en la densidad: al cambiar el radio de la función de Woods-Saxon de 6.5 a 7 fm el factor de forma varía apreciablemente.

### 4.3.2 Dependencia en la cinemática

En PWBA, el factor de forma o la sección eficaz reducida sólo dependen de las condiciones cinemáticas particulares elegidas para los electrones a través de  $\mathbf{q}$  y  $\omega$ . En DWBA, en cambio, existe dependencia también en  $\mathbf{k}_i$  y  $\mathbf{k}_f$ . Por ejemplo, en la figura 4.2 podemos apreciar que los resultados en DWBA son diferentes (aunque no mucho) para  $\theta_e = 165^\circ$  y  $\theta_e = 180^\circ$ . También, para un mismo valor de  $\mathbf{q}, \omega$ , hay dependencia en la energía del electrón al ser los efectos de DWBA menores cuanto mayor sea dicha energía.

Para el proceso  $(e, e'p)$  el desplazamiento en el momento transferido no se refleja de la misma forma en el corrimiento en el momento  $P'$  en todas las situaciones cinemáticas. Por ejemplo, en cinemática paralela el corrimiento es máximo mientras que en cinemática perpendicular el efecto es mucho menor. En este último caso, al permanecer  $\mathbf{q}$  constante, las variables cinemáticas del electrón se mantienen iguales en todo el rango de  $P'$  (si no tenemos en cuenta el retroceso del blanco) y el efecto de la distorsión coulombiana debe ser constante. En la figura 4.3 pueden observarse estos efectos al comparar un cálculo en cinemática paralela con otro en cinemática perpendicular.

#### 4.4 Resumen

La distorsión coulombiana representa una corrección importante al resultado PWBA en núcleos pesados. El efecto de corrimiento en el momento transferido ha de tenerse en cuenta incluso en núcleos medios si se utiliza cinemática paralela.

Aunque los resultados en DWBA y PWBA son cualitativamente similares y el efecto de corrimiento en el valor del momento transferido se puede estimar, los efectos de focalización han de tenerse presentes a la hora de comparar con los datos experimentales. Se puede obtener una idea aproximada de la magnitud esperada de estos efectos a partir de aproximaciones como los desarrollos en  $(Z\alpha/kR)$  pero sólo el cálculo exacto en DWBA puede considerarse como referencia válida a la hora de extraer conclusiones cuantitativas sobre, por ejemplo, el factor de escala necesario para ajustar la predicción teórica a los datos experimentales.



**Parte II**

**Resultados**

## 5 Análisis de la Aproximación de Impulso: $^{208}\text{Pb}$

En este capítulo discutiremos una serie de efectos que han de tenerse en cuenta a la hora de extraer los números de ocupación a partir de los resultados experimentales en la aproximación de impulso. Estudiaremos el efecto de utilizar distintos potenciales ópticos y funciones de ondas para el nucleón ligado, de la inclusión de la distorsión coulombiana y de la elección del operador de corriente nuclear. Trataremos de establecer límites de aplicación de la aproximación de impulso y el grado de incertidumbre en las conclusiones extraídas en esta aproximación. También se compararán con otros resultados con formalismo relativista y no relativista. Se utilizarán los resultados obtenidos para el núcleo  $^{208}\text{Pb}$ .

### 5.1 Comparación con otros resultados con formalismo relativista

#### 5.1.1 PWBA

En la figura 5.1 se comparan los resultados aquí obtenidos con otros cálculos para el proceso  $(e, e'p)$  en PWBA y formalismo totalmente relativista. A la izquierda se representan los resultados de este trabajo para la sección eficaz reducida en  $\text{GeV}^{-3}$  obtenidos con los operadores  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$  y la función de onda del nucleón ligado obtenida con el modelo HS. También se muestra el resultado presentado en la referencia [McD90]. En dicho cálculo se utiliza el operador  $J_{ncc2}$  y los mismos potenciales ópticos que en nuestro trabajo. Sin embargo ambos resultados (el nuestro, curva  $ncc2$  y el de [McD90], curva 1990') difieren bastante. La razón de esta discrepancia es que en [McD90] se utiliza una función de ondas del nucleón ligado en la capa  $3s_{1/2}$  del plomo *diferente* de la solución estándar del modelo HS [HMS91]. En esta misma figura, a la derecha, se comparan las funciones de onda para el nucleón ligado: la utilizada en [McD90] (denominada 1990'), la solución estándar del modelo HS (curva 1990) y la correspondiente al modelo NL1.

A la izquierda se representa también el resultado para la sección eficaz reducida calculada a partir de la función de ondas del modelo HS obtenido con el programa REEP desarrollado por el autor de la referencia [McD90] (curva 1990). Como se observa, utilizando la misma función de ondas y el

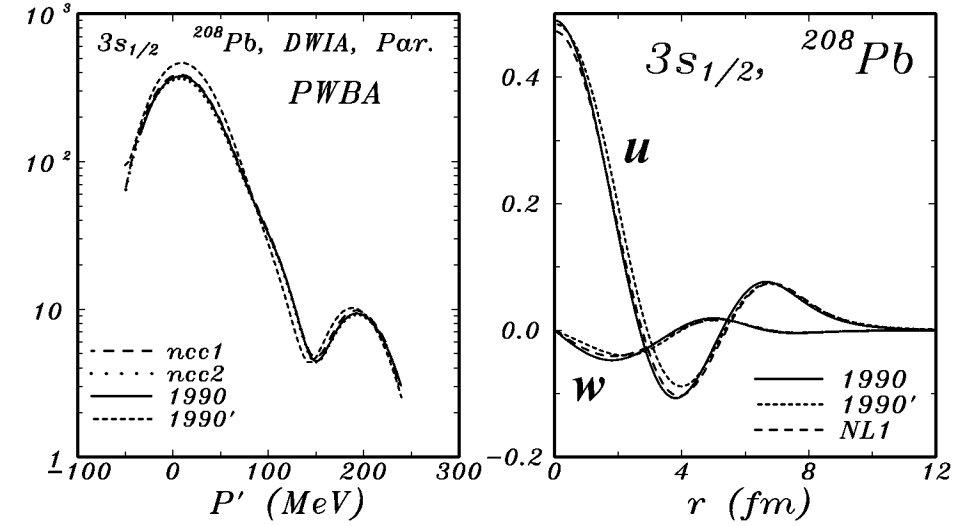
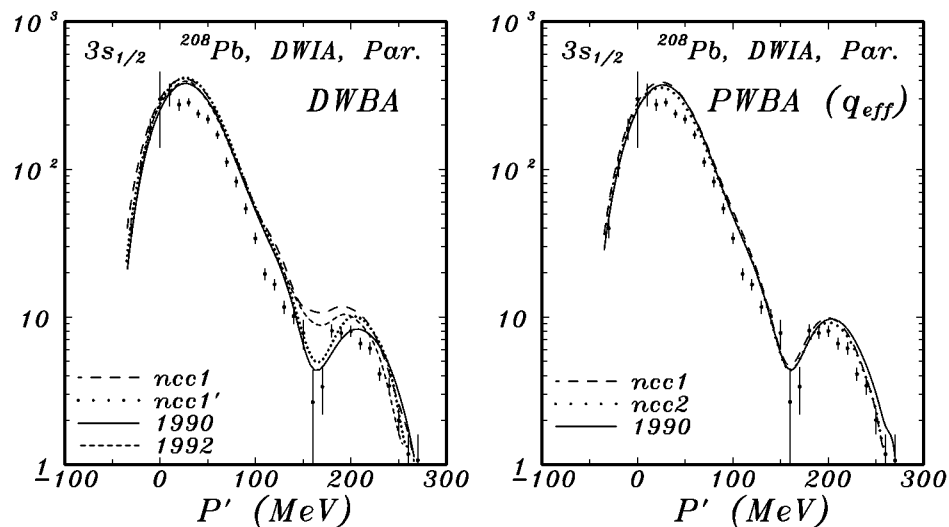


Figura 5.1: Sección eficaz reducida en  $\text{GeV}^{-3}$  para el proceso  $(e, e'p)$  en la capa  $3s_{1/2}$  del plomo. Se comparan los resultados obtenidos con  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$  en cinemática paralela (izquierda). Se utiliza la función de ondas para nucleón ligado del modelo HS, en PWBA con el código desarrollado para este trabajo, (curvas  $ncc1$  y  $ncc2$ ) y para  $J_{ncc2}$  también con el programa REEP, desarrollado por el autor de la referencia [McD90] (curva 1990). También se representa el resultado de la referencia [McD90] (curva 1990'), obtenido con una función de ondas para el nucleón ligado distinta. A la derecha se representa la parte radial de la componente superior ( $u$ ) e inferior ( $w$ ) de la función de onda obtenida con el modelo HS (curva 1990), la utilizada en [McD90] (curva 1990') y la obtenida con el modelo NL1.

mismo operador las curvas calculadas con dos programas diferentes (curva 1990–REEP y curva  $ncc2$  obtenida con el código desarrollado para este trabajo) son muy parecidas. Ambas coinciden aproximadamente con el resultado equivalente de la referencia [JnO92] (no mostrado en la figura). Por tanto el acuerdo en PWBA entre los tres resultados es satisfactorio.

#### 5.1.2 DWBA

En la figura 5.2, a la izquierda, se presentan los resultados en DWBA para el mismo caso estudiado en la sección anterior (curva  $ncc1$ ). Se representa también el resultado para el mismo caso obtenido de la referencia [JnO92] y el calculado con el código DWBA en la aproximación de conser-



**Figura 5.2:** Sección eficaz reducida en  $(GeV)^{-3}$  para el proceso  $(e, e'p)$  en la capa  $3s_{1/2}$  del plomo. A la izquierda, el cálculo DWBA con el operador  $J_{ncc1}$  ( $ncc1$ ), sin incluir los desfases para el electrón ( $ncc1'$ ), el obtenido con el código RDEEP (1990) y el mostrado en la referencia [JnO92] (1992). A la derecha se comparan los resultados en PWBA frente a  $q_{eff}$  con los operadores  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ , y se compara con el resultado equivalente del programa RDEEP.

variación de helicidad (con el código RDEEP de la referencia [McD90]) con la misma función de ondas para el protón ligado (en la figura se denomina 1990). Esta curva es diferente a la correspondiente al mismo caso que aparece en la referencia [McD90] porque, aunque se utiliza el mismo programa, las funciones de onda del protón ligado son diferentes como se ha comentado en la sección anterior.

Se puede ver que los resultados se diferencian en:

1. El cálculo DWBA con el código RDEEP no rellena el mínimo en  $P' \approx 150$  MeV.
2. El efecto de focalización del resultado obtenido con RDEEP es mucho menor: El cálculo de [JnO92] muestra un ligero aumento en el valor de los máximos que no se observa en el resultado del código utilizado en [McD90] (ver la tabla 5.1).

3. Para  $P'$  alrededor de 200 MeV, el efecto del corrimiento en el momento es diferente en uno y otro cálculo.

**Tabla 5.1:** Porcentaje de variación en la sección eficaz en DWBA respecto de PWBA, en la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}Pb$ ,  $T_F = 100$  MeV y  $\epsilon_i = 430$  MeV.

	$ncc1$	[JnO92]	RDEEP ([McD90])	$ncc1'$
Primer Máximo	7.5 %	8.0 %	2.4 %	4 %
Segundo Máximo	14 %	13 %	-10 %	2 %

Para entender las causas de estas diferencias se ha realizado un cálculo con nuestros códigos en DWBA, pero utilizando desfases nulos para la función de ondas del electrón (curva  $ncc1'$  en la figura 5.2). Como se ha discutido en el capítulo cuarto, ésta es una de las aproximaciones utilizadas en la referencia [McD90]. Ha de tenerse en cuenta que en nuestros resultados en DWBA se utiliza el operador  $J_{ncc1}$  mientras que los cálculos de otros autores con los que comparamos se han obtenido con  $J_{ncc2}$ . La comparación con el cálculo incluyendo los desfases (curva  $ncc1$ ) muestra aproximadamente los efectos antes señalados:

1. El mínimo en  $P' \approx 150$  MeV no se rellena en el cálculo sin desfases.
2. El efecto de focalización es menor en el cálculo sin desfases. En el primer máximo el cálculo completo muestra alrededor de un 8% de aumento respecto al cálculo equivalente en PWBA mientras que en el cálculo sin desfases el aumento es de un 4%.

De este modo puede concluirse que los efectos de la *aproximación de conservación de helicidad* introducida en la referencia [McD90] y utilizados en el código RDEEP van en el mismo sentido que los obtenidos en este trabajo al eliminar los desfases de las funciones de ondas del electrón, aunque como se comprueba en la tabla 5.1, la diferencia observada con respecto al cálculo DWBA no se explica sólo por el uso de desfases nulos.

Por último compararemos el resultado en DWBA de la referencia [JnO92] (1992 en la figura 5.2) y el obtenido aquí (curva  $ncc1$ ).

Se han utilizado las mismas funciones de ondas para el nucleón ligado y el mismo potencial óptico para calcular la función de onda distorsionada

para el nucleón final. En ambos cálculos, sin embargo, se utilizan operadores distintos para la corriente nuclear:  $J_{ncc2}$  en [JnO92] y  $J_{ncc1}$  en la curva ncc1. Parte de las diferencias observadas se deben a este último punto. A la derecha se compara el resultado con ambos operadores en ondas planas; con el operador  $J_{ncc1}$  se obtienen valores más altos de la sección eficaz: alrededor de un 6% mayores en torno a  $P' = 0$  y un 7% en el segundo máximo. La comparación en DWBA muestra que en ambos casos se rellena el mínimo en  $P' \approx 150$  MeV en aproximadamente la misma magnitud. Asimismo los efectos de focalización y el desplazamiento del momento con respecto a PWBA son muy parecidos (ver tabla 5.1).

En la región entre  $P' = 100$  MeV y  $P' = 150$  MeV se observan mayores diferencias entre ambos resultados que representan o bien un desplazamiento en el momento diferente en ambos cálculos o bien un efecto de focalización algo mayor para ncc1. Esto puede deberse a diferencias en la distribución de carga utilizada en el cálculo de la distorsión del electrón o a pequeñas variaciones del efecto de la distorsión coulombiana para uno u otro operador. Esta diferencia no se observa en la curva ncc1', esto es, en el cálculo sin desfases, por lo que las ligeras desviaciones entre ambos resultados en esta región parecen deberse a efectos de focalización que se corresponden con los observados en el capítulo cuarto en la figura 4.3 alrededor del segundo máximo en PWIA para este mismo caso.

## 5.2 Comparación con cálculos no relativistas

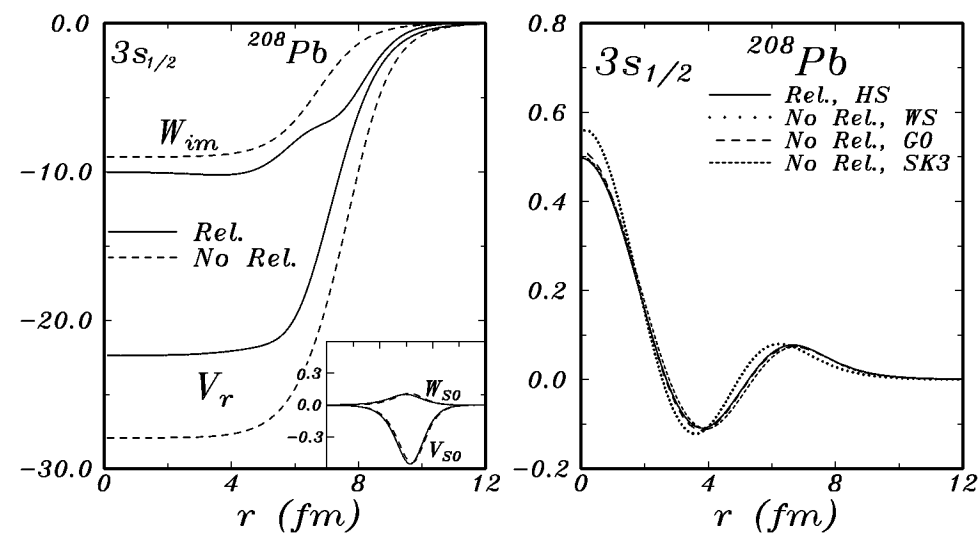
Las diferencias entre el formalismo relativista y el no relativista se deben básicamente a:

1. El operador de corriente nuclear.
2. Los potenciales ópticos.
3. Las funciones de onda del nucleón ligado.

### 5.2.1 Operador de corriente

En esta sección utilizaremos el operador  $J_{ncc2}$  en el caso relativista. Los resultados para la sección eficaz reducida se comparan con cálculos no relativistas obtenidos con el código DWEEPY [GiuP87]. En este código se utiliza el operador descrito en la referencia [McVH62]. Este operador se

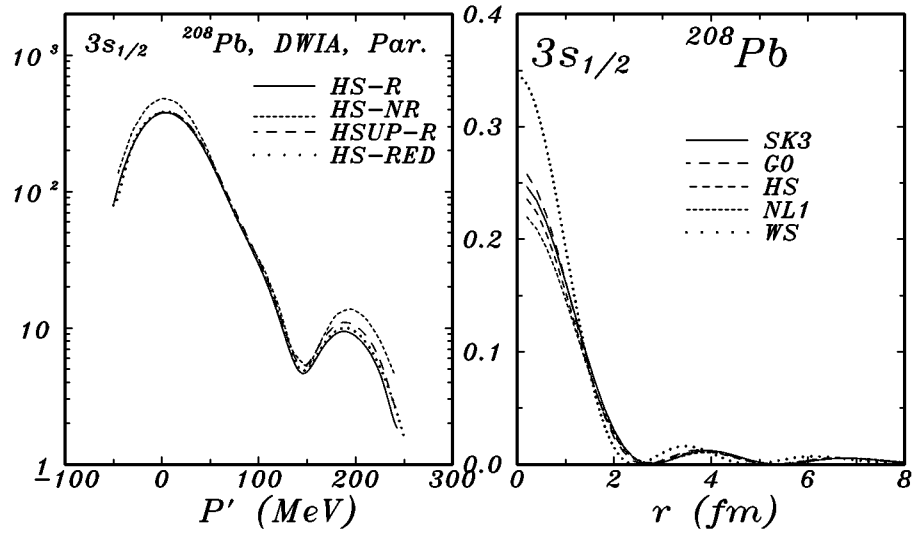
obtiene a partir de una expresión relativista similar a la del operador  $J_{ncc2}$  mediante un desarrollo en potencias de  $q/M$ .



**Figura 5.3:** Potenciales ópticos en MeV (izquierda) y funciones de onda en  $\text{fm}^{-3/2}$  (derecha) utilizados en los cálculos de esta sección. Se muestra (curva Rel.) el límite no relativista del potencial fit 2 junto con el potencial óptico no relativista (NoRel.) que se utiliza en la referencia [Qn88] y que se obtiene de un ajuste a datos de dispersión de protones por  $^{208}\text{Pb}$ . A la derecha se muestra una reducción no relativista de la función de ondas para la capa  $3s_{1/2}$  del núcleo  $^{208}\text{Pb}$  obtenida a partir del modelo HS y también las soluciones de los modelos no relativistas G0 y SK3 y con un potencial de Woods-Saxon.

### 5.2.2 Potenciales ópticos

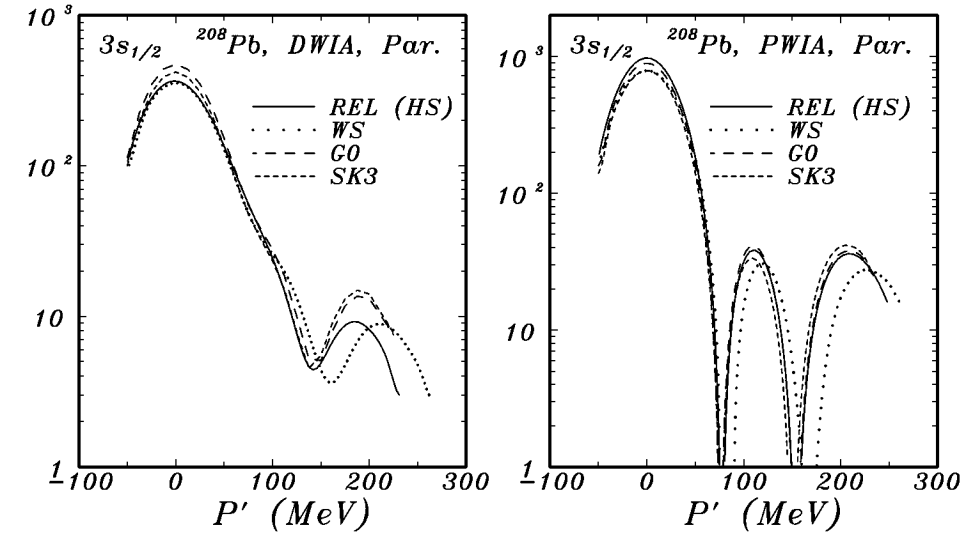
En la figura 5.3 (izquierda) se muestran varios potenciales ópticos. Se compara el potencial óptico no relativista ajustado a datos de dispersión de protones por  $^{208}\text{Pb}$  [Qn88] con el límite no relativista del potencial óptico relativista ‘fit 2’ (ver el capítulo segundo) ajustado globalmente y que usamos en los cálculos relativistas de esta sección. Las dos curvas son similares en general y los potenciales de espín-órbita son muy parecidos en los dos casos. Sin embargo el *término de absorción*, reflejado en la parte imaginaria del potencial óptico  $W_{im}$ , es algo mayor para el potencial relativista. El término real, en cambio, es menor.



**Figura 5.4:** Comparación de las densidades radiales en  $\text{fm}^{-3}$  (derecha) para la capa  $3s_{1/2}$  en  $^{208}\text{Pb}$  calculadas con los modelos relativistas (HS, NL1) y no relativistas (G0, SK3, WS). A la izquierda se comparan los resultados para la sección eficaz reducida ( $\text{GeV}^{-3}$ ) en cinemática paralela y DWIA. La función de ondas se obtiene con el modelo relativista HS y la sección eficaz con el código no relativista DWEOPY (curva HS-NR) y con el desarrollado para este trabajo (HS-R, HSUP-R y HS-RED).

### 5.2.3 Función de ondas ligada

En la figura 5.3, a la derecha, se representa la parte radial de la función de ondas del nucleón ligado para la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$  calculada con los modelos autoconsistentes no relativistas G0 y SK3 (ver el capítulo tercero). También se muestra la función de ondas obtenida con un potencial de Woods-Saxon (ajustado para reproducir el valor experimental de la energía de ligadura del protón). Se comparan estas funciones no relativistas con la componente superior de la función de ondas calculada en el modelo HS normalizada igual que las funciones no relativistas. En la figura 5.4 se representan las densidades radiales  $|u|^2 + |w|^2$  en el caso relativista (HS y NL1) y  $|u|^2$  en el no relativista (SK3, G0 y WS). Las diferencias son bastante pequeñas entre los modelos autoconsistentes mientras que en el resultado con el potencial de Woods-Saxon los máximos y mínimos están algo desplazados.

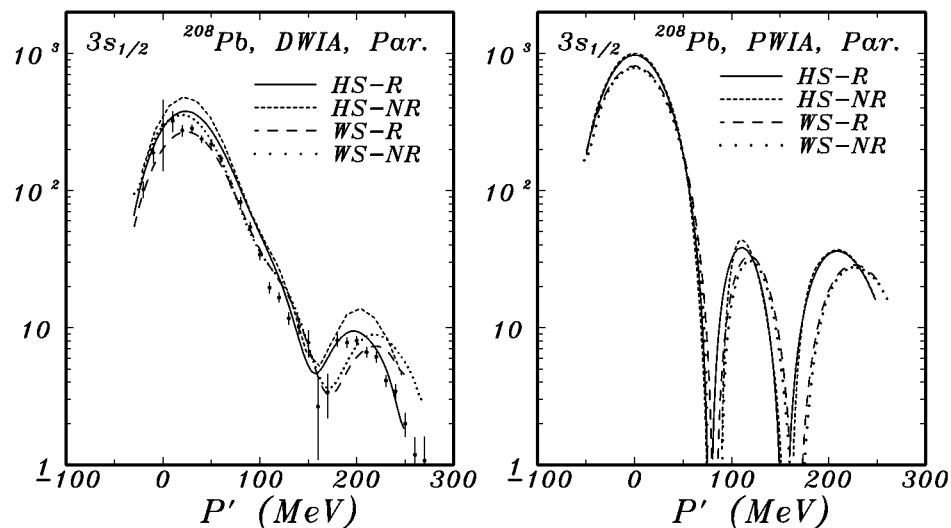


**Figura 5.5:** Sección eficaz reducida en cinemática paralela para la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$ , en PWIA (derecha) y DWIA (izquierda). Se comparan los resultados relativistas obtenidos a partir del modelo HS (REL HS) con los no relativistas (WS, G0, SK3).

### 5.2.4 Comparación

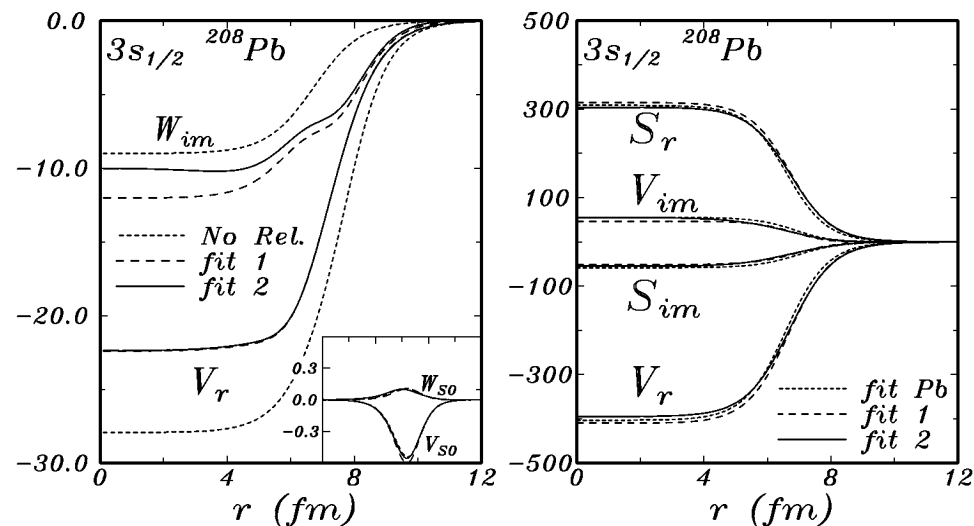
En la figura 5.5 se pueden ver los resultados en DWIA y PWIA para el mismo caso anterior. En PWIA (derecha), en el cálculo relativista (con la función de onda del modelo HS, curva 'REL') se obtiene el valor más alto en el primer máximo. Con los modelos no relativistas G0 y SK3 los máximos se sitúan aproximadamente en la mismas posiciones que en el modelo HS. En cambio, con la función de ondas calculada con el potencial de Woods-Saxon, los valores de la sección eficaz son menores que en los demás modelos y los máximos están desplazados ligeramente. A la izquierda podemos ver que en DWIA, sin embargo, el resultado relativista presenta la mayor disminución respecto de PWIA de forma que este resultado es ahora menor que el de los modelos G0 y SK3. Con la función de ondas relativista y las de los modelos G0 y SK3 la forma de la sección eficaz reducida es similar, aunque en los modelos no relativistas los valores son más elevados. Con la función de ondas de Woods-Saxon el valor de los máximos es casi igual que en el caso relativista pero el segundo máximo aparece para valores de  $P'$  unos 30 MeV más altos.

Por tanto, la introducción del potencial óptico produce mayor reducción



**Figura 5.6:** Igual que la figura anterior, pero ahora se utilizan las mismas funciones de onda (WS y HS) para obtener tanto los resultados relativistas (HS-R y WS-R) como los no relativistas (HS-NR y WS-NR). En DWIA (izquierda) se representan también los datos experimentales.

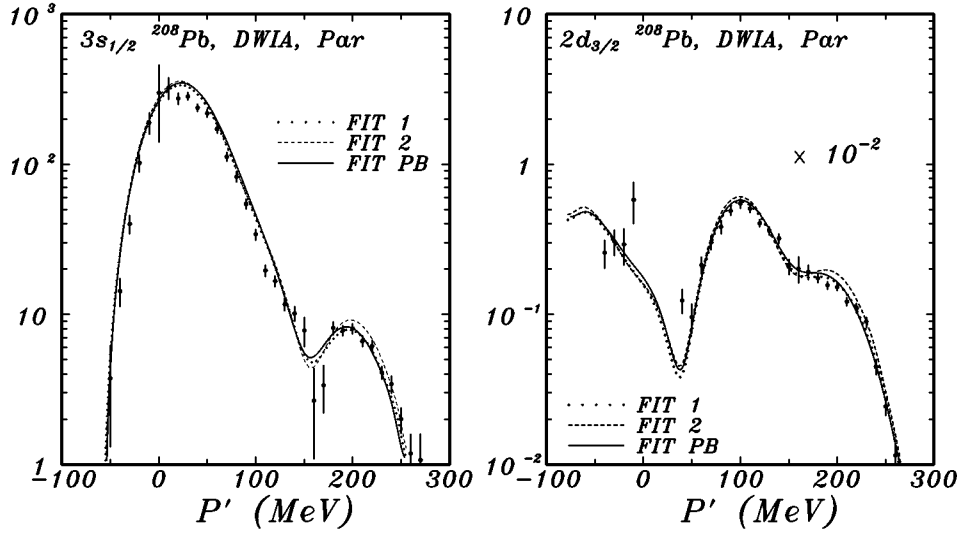
de la sección eficaz en el caso relativista. En la figura 5.4, a la izquierda, se comparan dos cálculos en DWIA con formalismo relativista y no relativista. Para observar los posibles efectos relativistas se utiliza la misma función de ondas del modelo HS para obtener el resultado no relativista, prescindiendo de la componente inferior y normalizando la función de ondas igual que en el caso no relativista (curva HS-NR). Esta misma función de ondas (sin componente inferior) se utiliza para obtener los cálculos relativistas mostrados en la curva HSUP-R. También se compara con el resultado relativista obtenido a partir de la función de ondas del modelo HS pero con la componente inferior obtenida a partir de la expresión (2.42) válida para espinores libres (curva HS-RED). Los resultados relativistas con estas dos funciones de ondas se comparan con el no relativista (HS-NR) y con el caso relativista en el que se incluye la componente inferior del modelo HS (curva HS-R). Las diferencias entre los tres resultados relativistas indican de forma aproximada la magnitud de posibles efectos relativistas. Estos empiezan a ser apreciables para  $P' > 150$  MeV, con alrededor del 15% de diferencia en el segundo máximo entre el resultado HS-R y HSUP-R. En el límite no relativista (en el que



**Figura 5.7:** Potenciales ópticos para  $^{208}\text{Pb}$ . A la derecha se comparan los resultados para los potenciales relativistas de dos parametrizaciones globales (fit 1 y fit 2) con una parametrización individual (fit Pb). A la izquierda se compara el potencial óptico no relativista con una reducción no relativista de los potenciales relativistas globales. Potenciales en MeV.

la masa del nucleón tiende a infinito) ambos resultados deben ser idénticos. Por otro lado, la diferencia entre el cálculo relativista completo (HS-R) y el resultado obtenido imponiendo la condición para espinores libres en la función de ondas del nucleón ligado (HS-RED) es pequeño, alrededor del 5% en el segundo máximo. Este último resultado da idea de la diferencia que puede esperarse entre los resultados del operador no relativista (en cuya obtención la expresión (2.42) se encuentra implícita) y el relativista.

En DWIA la sección eficaz no relativista es bastante mayor que la relativista: un 30% en el primer máximo y un 40% en el segundo. Teniendo en cuenta la comparación de los resultados en PWIA y ya que las funciones de onda que se utilizan en la figura 5.4 son similares, se deduce que en el caso relativista el potencial óptico produce más absorción que en el caso no relativista. Esta es la causa principal de las diferencias observadas entre uno y otro caso. Para confirmarlo, en la figura 5.6 se comparan más resultados relativistas y no relativistas: con la función de ondas de Woods-Saxon (WS-R y WS-NR) y con la función de ondas del modelo HS (en el caso relativista



**Figura 5.8:** Comparación de las secciones eficaces reducidas obtenidas en el modelo relativista con tres parametrizaciones de los potenciales ópticos, para la capa  $3s_{1/2}$  (izquierda) y  $2d_{3/2}$  (derecha) de  $^{208}\text{Pb}$ . Operador  $J_{ncc2}$ , en PWBA con  $q_{eff}$  y cinemática paralela.

se incluye la componente inferior).

En PWIA los resultados relativistas y no relativistas son muy parecidos para ambas funciones de onda pero en DWIA la sección eficaz relativista es menor. A la izquierda se presentan los resultados en DWIA para el protón incluyendo el desplazamiento en el momento debido al potencial coulombiano de forma similar para los modelos relativistas y no relativistas. La función de ondas relativista reproduce bien la forma de la sección eficaz experimental (posición de los máximos y su valor relativo) aunque con el programa (y los potenciales ópticos) no relativistas el valor es mucho mayor que el observado. Con la función de ondas de Woods-Saxon se obtiene el segundo mínimo bastante desplazado con respecto a los datos experimentales. También vemos que en DWIA las predicciones relativistas para la sección eficaz son menores que las no relativistas.

### 5.3 Dependencia en el potencial óptico

Como hemos visto en el apartado anterior, con potenciales ópticos ajustados a los mismos datos se obtienen resultados bastante diferentes depen-

**Tabla 5.2:** Factores de escala deducidos (N) con tres parametrizaciones del potencial óptico. También se tabula la cantidad  $M/g.d.l.$  (ver el Apéndice C) y el error estadístico. Resultados de cálculo en PWBA con  $q_{eff}$ ,  $J_{ncc2}$  y cinemática paralela.

Potencial	$3s_{1/2}$		$2d_{3/2}$	
	N	$M/g.d.l.$	N	$M/g.d.l.$
FIT 2	0.82(4)	2.1	0.88(5)	2.5
FIT <i>Pb</i>	0.84(5)	2.7	0.94(5)	2.1
FIT 1	0.86(5)	2.8	0.96(5)	1.9

diendo del formalismo utilizado (relativista o no relativista). En esta sección estudiaremos las variaciones que se producen en los resultados para el proceso  $(e, e'p)$  en el formalismo relativista al utilizar potenciales ópticos ajustados a los mismos datos pero con parametrizaciones ligeramente distintas:

1. fit 1 y fit 2, parametrizaciones globales introducidas en el capítulo tercero con dependencia en la masa atómica del núcleo blanco y la energía del protón dispersado.
2. fit *Pb*, obtenido a partir de un ajuste sólo con datos de  $^{208}\text{Pb}$ , con dependencia en la energía pero no en la masa atómica (un ajuste para cada núcleo) [HCCM92].

En la figura 5.7, a la derecha, se muestran las partes real ( $S_r, V_r$ ) e imaginaria ( $S_{im}, V_{im}$ ) de los potenciales escalar y vector para el núcleo  $^{208}\text{Pb}$ . Las diferencias entre los tres potenciales son bastante pequeñas. A la izquierda en esa misma figura, se compara un límite no relativista de los dos potenciales globales y el potencial óptico ajustado con el formalismo no relativista. En el límite no relativista intervienen cancelaciones entre términos relativamente grandes para dar lugar a valores comparativamente pequeños de los potenciales, lo cual explica que las diferencias entre los dos potenciales relativistas sean más fácilmente apreciables en este límite.

Como se ha dicho en el capítulo tercero, para los núcleos aquí estudiados las parametrizaciones globales utilizadas describen adecuadamente los datos de dispersión elástica de protones [C183]. Es interesante comprobar si es

posible observar diferencias en las predicciones para el proceso  $(e, e'p)$ . Utilizamos los resultados de un cálculo DWIA para el protón con la función de onda del nucleón ligado determinada por el modelo HS. Usamos el operador  $J_{ncc2}$  para la corriente nuclear. La distorsión coulombiana se tiene en cuenta a través de  $q_{eff}$ . En la figura 5.8 se representan los resultados en cinemática paralela para la capa  $3s_{1/2}$  (izquierda) y  $2d_{3/2}$  (derecha) junto con algunos datos experimentales. Se comparan las predicciones de las tres parametrizaciones del potencial óptico (fit 1, fit 2 y fit  $Pb$ ). En la tabla 5.2 se resumen los factores de escala resultantes de ajustar a los datos experimentales.

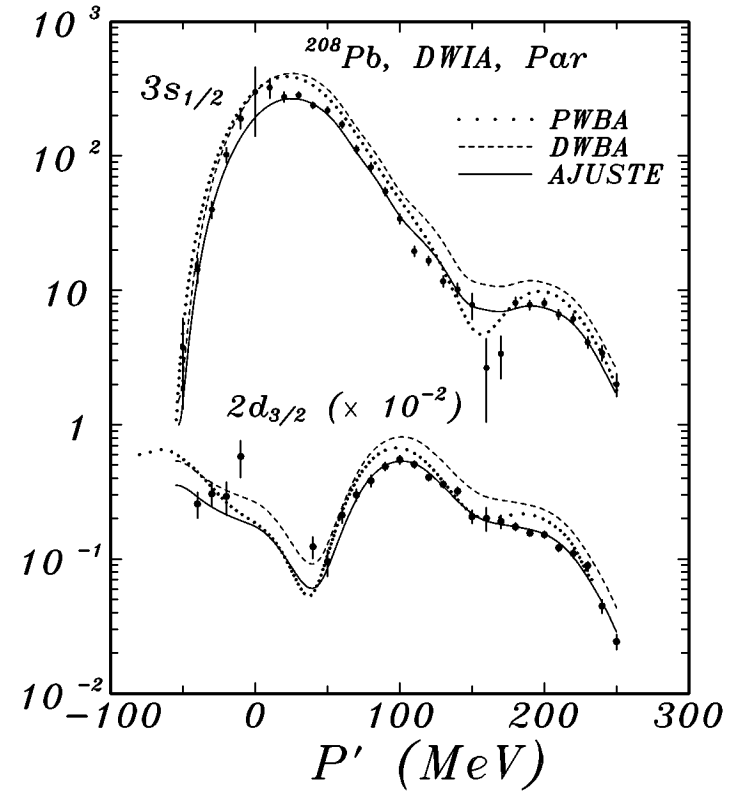
Puede verse que los resultados obtenidos con los tres potenciales ópticos se diferencian en un 4% para la capa  $3s_{1/2}$  y un 8% para la  $2d_{3/2}$ . Con el ajuste individual (fit  $Pb$ ) se obtienen valores intermedios entre los dos ajustes globales. El potencial fit 1 da los valores más altos del factor de escala y fit 2 los menores. La calidad del ajuste es parecida en los tres casos.

**Tabla 5.3:** Factores de escala deducidos (N) con funciones de onda del nucleón ligado obtenidas con los modelos HS y NL1. También se tabula el radio cuadrático medio en  $fm$ . Potencial óptico fit 2, operador  $J_{ncc1}$  y DWBA para el electrón.

	$3s_{1/2}$			$2d_{3/2}$		
	rms	N	$M/g.d.l.$	rms	N	$M/g.d.l.$
HS	5.49	0.65(3)	2.5	5.52	0.66(3)	1.7
NL1	5.61	0.61(3)	2.7	5.71	0.60(3)	2.4

## 5.4 Dependencia en la función de onda ligada

En esta sección intentaremos determinar cuál es la incertidumbre teórica asociada a la indeterminación en la función de onda. Con esa finalidad en el capítulo tercero se han introducido dos modelos relativistas de características similares cuyo acuerdo global con el experimento es del mismo orden pero con predicciones cuantitativamente diferentes para las funciones de onda del nucleón ligado. En trabajos anteriores [Qn88, Her88] se ha comprobado que para los modelos no relativistas, una variación relativamente grande en la parte radial de la función de ondas del nucleón ligado (un cambio del orden



**Figura 5.9:** Resultados de este trabajo para la sección eficaz reducida en  ${}^{208}Pb$  para las capas  $2d_{3/2}$  y  $3s_{1/2}$ . Se muestra el cálculo en DWIA con el potencial óptico fit 2. Las funciones de onda del nucleón ligado son las obtenidas con el modelo HS. Se utiliza el operador  $J_{ncc1}$  y se compara el resultado en PWBA con  $q_{eff}$  y la predicción en DWBA. También se muestra el ajuste a los datos experimentales obtenido a partir del resultado en DWBA. Los factores de escala son 0.65(3) y 0.66(3) respectivamente para la capa  $3s_{1/2}$  y  $2d_{3/2}$ .

del 5% en el radio cuadrático medio) repercute en escasa medida en el factor de escala necesario (alrededor del 1%). En la tabla 5.3 aparecen los radios cuadráticos medios de las funciones de onda calculadas con los modelos HS y NL1 para las capas de  ${}^{208}Pb$  antes estudiadas; también se comparan los factores de escala deducidos en ambos casos. Con funciones de ondas cuyo el radio cuadrático medio difiere en alrededor del 2–4% se obtienen diferencias



de un 8% en el factor de escala derivado. El modelo NL1 da lugar a números de ocupación más bajos.

## 5.5 Dependencia en la forma de la corriente

Ya hemos visto en el capítulo segundo que existe cierta incertidumbre en la expresión del operador de corriente a utilizar para nucleones ligados. Se obtienen resultados diferentes con la familia de operadores del tipo ‘cc2’ respecto de la ‘cc1’ y dentro de cada grupo la forma en que se impone (o no) conservación de corriente introduce alguna variación adicional. En general, con los operadores del tipo  $J_{cc1}$  la sección eficaz teórica es mayor que con los del tipo  $J_{cc2}$ . Además, entre  $J_{ncc1}$ ,  $J_{cc1}^{(0)}$  y  $J_{cc1}^{(3)}$  (ver el capítulo segundo) hay una variación mayor que entre los correspondientes operadores del tipo  $J_{cc2}$ . Esto puede observarse en la tabla 5.4 en la que se comparan los factores de escala deducidos variando sólo la expresión del operador de corriente. Dentro de cada grupo de operadores la variación mayor se da entre los operadores  $J^{(3)}$  y el resto. Con el operador  $J_{cc1}^{(3)}$  el resultado teórico no es capaz de reproducir adecuadamente las observaciones experimentales. El operador  $J_{cc1}^{(0)}$  da lugar a valores de sección eficaz algo mayores, con un ajuste un poco peor. Con  $J_{cc2}^{(0)}$  y  $J_{ncc2}$  se obtienen prácticamente los mismos resultados y con  $J_{cc2}^{(3)}$  la sección eficaz es alrededor de un 4% más pequeña.

**Tabla 5.4:** Comparación entre los factores de escala (N) deducidos a partir de las secciones eficaces obtenidas con diferentes expresiones del operador de corriente nuclear. Capa  $3s_{1/2}$  en  $^{208}\text{Pb}$ , potencial óptico fit 2, modelo HS y PWBA con  $q_{eff}$  para el electrón.

	$J_{ncc2}$	$J_{cc2}^{(0)}$	$J_{cc2}^{(3)}$	$J_{ncc1}$	$J_{cc1}^{(0)}$	$J_{cc1}^{(3)}$
N	0.82(4)	0.82(4)	0.86(4)	0.76(4)	0.72(4)	0.49(8)
M/g.d.l.	2.1	2.2	2.2	2.2	2.4	20

Suele tomarse la diferencia entre los resultados obtenidos con  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$  como medida de la incertidumbre debida al desconocimiento del operador de corriente. En el caso de espinores libres se han estudiado con bastante detalle estas diferencias tanto en el caso no polarizado [dFor83] como en el caso en que se miden polarizaciones [CaDP92]. Para el proceso  $(e, e'p)$

sin polarizaciones se ha encontrado [dFor83, Mul90] que, para los valores de cinemática y alejamiento de la capa de masas contemplados en este trabajo (en los que el nucleón ligado está fuera de la capa de masas en unas pocas decenas de MeV) la variación entre los resultados de  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$  para la sección eficaz electrón–protón es en general de un 2–3%. Sin embargo, hay muy pocos estudios de la situación para el caso en que se usan funciones de onda iniciales y finales distintas de las soluciones libres de la ecuación de Dirac. En [dFor84] se comparan los resultados para el proceso inclusivo  $(e, e')$  en el pico cuasielástico obtenidos a partir de  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$  con espinores libres pero utilizando las masas efectivas para el nucleón que resultan del modelo HS. En dicho cálculo hay diferencias mayores entre ambos operadores y la comparación con las observaciones es peor para  $J_{ncc1}$ . Sin embargo, para las energías relativamente bajas de estos experimentos esta prescripción tan sencilla no está completamente justificada.

Aquí hemos comparado los resultados obtenidos a partir de ambos operadores con funciones de ondas calculadas en el modelo HS para el nucleón ligado y con potenciales ópticos relativistas para el nucleón final.

Encontramos que las diferencias en los valores de la sección eficaz reducida del proceso  $(e, e'p)$  predicha con ambos operadores son mayores que las observadas entre espinores libres, en el caso general y son del orden del 10 % para los casos aquí estudiados de  $^{208}\text{Pb}$ . Los valores del factor de escala deducido son mayores en el caso de  $J_{ncc2}$ , que por tanto resulta favorecido frente a  $J_{ncc1}$  en la comparación con los datos experimentales.

Esto no quiere decir que no puedan encontrarse diferencias mayores en algún caso particular. Tampoco está justificado el considerar sólo estas dos clases de operadores. Respecto a las demás expresiones de la corriente de las que se ha hablado en el capítulo segundo podemos decir:

1. En el caso de  $J_{cc1,cc2}^{(0,3)}$ , la prescripción utilizada para restaurar la conservación de corriente es bastante artificial. La comparación entre estos operadores puede dar idea de cuál es la desviación respecto del caso ideal (en que la corriente se conserva). Estos resultados deben interpretarse con cuidado; por ejemplo, la desviación entre los operadores  $J_{cc1}^{(3)}$  y el resto es bastante grande, lo cual hace pensar que la prescripción utilizada en estos operadores no está exenta de problemas.
2. Para el operador  $J_{Mou}$ , el problema radica en la forma de calcular la masa efectiva que aparece en la expresión del operador. Con infor-

mación teórica procedente sólo de la aproximación de impulso no es posible determinar si es preferible la utilización de una masa efectiva o de una energía efectiva (como en el operador  $J_{cc1}$ ). Asimismo, el término en  $q_\mu$  que se añade no garantiza conservación de la corriente entre espinores no libres.

3. Tampoco existen criterios claros para preferir los operadores del tipo  $J_{cc1}$  o  $J_{cc2}$ . Lo cierto es que fuera de la capa de masas la transformación de Gordon no es válida y los dos operadores no son equivalentes. Observando las componentes longitudinales y transversales se comprueba que los resultados para la contribución longitudinal son muy parecidos para ambos operadores. Las diferencias entre los dos son debidas fundamentalmente a la contribución transversal. En el caso de espinores libres fuera de la capa de masas puede demostrarse que la contribución longitudinal es idéntica para los operadores  $J_{cc1}^{(0)}$  y  $J_{cc2}^{(0)}$  [Ca92].

## 5.6 Distorsión coulombiana

Como hemos visto en el capítulo cuarto, la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón modifica la sección eficaz dando lugar a dos clases de efectos:

1. Debidos a la focalización: el valor de la sección eficaz se modifica lo cual puede observarse en un aumento o disminución del valor en los máximos y en el rellenado parcial de los mínimos.
2. Desplazamiento en el momento transferido que se observa en el corrimiento aparente en  $P'$  de la sección eficaz reducida calculada en DWBA frente al resultado en PWBA. La magnitud de este efecto depende de la cinemática.

En la figura 5.9 aparece la sección eficaz reducida en cinemática paralela, para las capas  $3s_{1/2}$  y  $2d_{3/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$ . Se compara el cálculo en PWBA utilizando el valor efectivo del momento transferido ( $q_{eff}$ ) determinado por la ecuación (4.1) con el resultado en DWBA.

Puede observarse que el corrimiento en el momento obtenido de forma aproximada es similar al observado en DWBA, en líneas generales.

En cuanto a los efectos de focalización, hay cierta dependencia en la capa que se considere como se ve en la tabla 5.5 en la que se comparan los

**Tabla 5.5:** Efecto de la distorsión coulombiana en el factor de escala ( $N$ ) ajustado para reproducir los datos experimentales. Cálculo en DWIA para  $^{208}\text{Pb}$  con el potencial óptico fit 2, modelo HS. Cinemática paralela,  $T_F = 100$  MeV,  $\epsilon_i = 375$  MeV.

	$3s_{1/2}$		$2d_{3/2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
$J_{ncc1}$				
PWBA ( $q_{eff}$ )	0.76(4)	2.2	0.80(5)	3.2
DWBA	0.65(3)	2.5	0.66(3)	1.7
$J_{ncc2}$				
PWBA ( $q_{eff}$ )	0.82(4)	2.1	0.88(5)	2.5
DWBA (estimado)	0.70(4)	—	0.73(3)	—

factores de escala ajustados a los datos experimentales. En la capa  $3s_{1/2}$  se obtiene alrededor de un 15% de reducción del factor de escala en DWBA respecto de PWBA. En la capa  $2d_{3/2}$  esta reducción en el factor de escala es del 17%.

El cálculo exacto en DWBA se realiza sólo para el operador  $J_{ncc1}$ . Como es de esperar que los efectos de la distorsión coulombiana no sean muy diferentes en el caso de utilizar el operador  $J_{ncc2}$  puede estimarse el factor de escala necesario para ajustar los resultados obtenidos con este último operador. Con este procedimiento el valor del factor de escala necesario para reproducir los valores experimentales es de 0.700 en la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$ . En la referencia [JnO92] en un cálculo con el mismo operador  $J_{ncc2}$  se obtiene un valor algo mayor (0.714). De la comparación más detallada realizada en una sección anterior parece deducirse que esa diferencia se debe a un menor incremento en el cálculo de la referencia [JnO92] de la sección eficaz en DWBA respecto de PWBA, sobre todo en la región entre 50 y 150 MeV. Esta diferencia del 2% entre ambos cálculos es del orden de la incertidumbre numérica estimada para los resultados en DWBA de este trabajo (ver el apéndice C).

## 5.7 Resumen

El análisis teórico del proceso ( $e, e'p$ ) suele realizarse partiendo de los

siguientes supuestos:

1. Aproximación de impulso.
2. Interacción a través de un potencial óptico entre el núcleo residual y el protón detectado en el estado final.
3. Modelo de partículas independientes para el núcleo blanco.

Si se aceptan las dos primeras hipótesis, el análisis del proceso  $(e, e'p)$  proporcionará información sobre la validez de la tercera, es decir, permitirá estudiar si la descripción del núcleo como un sistema de partículas independientes en el seno de un potencial central, la base del modelo de capas, es correcta. Como hemos visto en el capítulo segundo, en el marco definido por estas tres hipótesis la sección eficaz es proporcional al número de ocupación de la capa de interés, esto es, al número de protones del núcleo blanco con valores de la energía de ligadura compatibles con la energía desaparecida elegida en el experimento. El factor de escala introducido para ajustar el resultado teórico a los datos experimentales representa, en este esquema, el porcentaje de ocupación de la capa elegida. Este porcentaje de ocupación puede ser utilizado como un parámetro indicativo de la validez de la tercera hipótesis y el hecho de que sea inferior a la unidad se debería, en esta interpretación, a efectos no tenidos en cuenta en el modelo de partículas independientes (interacción residual, correlaciones, ...).

Sin embargo, como esta interpretación se basa en la aceptación de hipótesis previas, se está introduciendo una *dependencia en el modelo*, a través de los siguientes ingredientes que determinan el resultado teórico final:

1. El operador utilizado para la corriente nuclear.
2. El potencial óptico.
3. Las funciones de onda monoparticulares del nucleón ligado.

En este capítulo hemos introducido variaciones en cada uno de estos tres ingredientes lo cual, mediante la observación de la influencia de tales variaciones en los factores de escala derivados, proporciona una idea de la dependencia en el modelo introducida en este tipo de análisis. A continuación resumimos los resultados obtenidos en este sentido:

1. Las variaciones en la función de onda del nucleón ligado repercuten en el factor de escala deducido. Hemos comprobado que un cambio del 2–4% en el radio cuadrático medio da lugar a una variación del orden del 10% en el factor de escala. Con el modelo HS también utilizado en algunos trabajos anteriores [JnO92, McD90] se obtienen valores menores para la sección eficaz que con el modelo NL1.
2. En cuanto al potencial óptico, hemos comparado parametrizaciones globales (fit 1 y fit 2 con dependencia en la masa del núcleo blanco y la energía del protón emitido) y una parametrización con dependencia sólo en la energía del protón (fit *Pb* correspondiente al núcleo  $^{208}\text{Pb}$ ). La calidad del ajuste de las parametrizaciones globales a observables de dispersión elástica de protones por núcleos mágicos es similar y algo peor, lógicamente, que para la parametrización individual fit *Pb* [Co87, Hm90]. Las variaciones entre los resultados para el proceso  $(e, e'p)$  en  $^{208}\text{Pb}$  obtenidos con estos potenciales son de un 5% en la capa  $3s_{1/2}$  y un 8% en la  $2d_{3/2}$ , entre los potenciales fit 1 y fit 2. Con la parametrización individual se obtienen resultados intermedios. Los factores de escala más altos se obtienen con la parametrización fit 1. La calidad del ajuste es similar en los tres casos.
3. Hemos comparado los resultados obtenidos con diferentes expresiones del operador de corriente. En concreto, hemos presentado los resultados obtenidos a partir de los operadores del tipo  $J_{cc1}$  y  $J_{cc2}$ . Hemos visto que con  $J_{ncc2}$  se obtienen factores de escala alrededor del 10% mayores que los obtenidos a partir de  $J_{ncc1}$ . Además, la indeterminación ligada a la conservación de la corriente, que aquí hemos estimado observando los resultados con  $J_{ncc}$ ,  $J^{(0)}$  y  $J^{(3)}$ , es mayor para los operadores del tipo  $J_{ncc1}$ . Parece por tanto preferible utilizar el operador  $J_{ncc2}$  en el análisis teórico del proceso  $(e, e'p)$ . Sin embargo, por razones técnicas (ver el apéndice C), sólo se presentan cálculos en DWBA obtenidos con el operador  $J_{ncc1}$ .

Aparte de todo lo antes expuesto, a la hora de construir el modelo para el proceso  $(e, e'p)$  es posible partir de un formalismo totalmente relativista tanto para la parte electrónica como nuclear, o bien utilizar un formalismo no relativista sólo para la parte nuclear. En este trabajo se ha elegido el tratamiento totalmente relativista con el fin de poder incluir la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón de forma exacta. La

comparación directa con los resultados no relativistas se ve dificultada por las diferencias en la función de onda del nucleón ligado y en el tratamiento de la distorsión coulombiana. En este capítulo se han intentado comparar ambas opciones. Los resultados apuntan a que las diferencias en los factores de escala obtenidos en ambos formalismos se deben, por un lado, a que los potenciales ópticos relativistas dan lugar a mayor absorción cuando son utilizados para calcular la sección eficaz del proceso  $(e, e'p)$  que los correspondientes potenciales ópticos no relativistas. Por otro, al tratamiento exacto de la distorsión coulombiana, con el que se observa menos efecto de focalización que con los métodos aproximados utilizados en los códigos no relativistas. Por otra parte, se ha comprobado que los modelos autoconsistentes relativistas son capaces de reproducir correctamente la forma (esto es, la posición e importancia relativa de los máximos) de la sección eficaz reducida para las capas  $3s_{1/2}$  y  $2d_{3/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$  sin necesidad de desplazamientos adicionales en el momento transferido, a diferencia del análisis no relativista de la referencia [Qn88].

## 6 Análisis de la Aproximación de Impulso: $^{40}\text{Ca}$

### 6.1 Distorsión Coulombiana

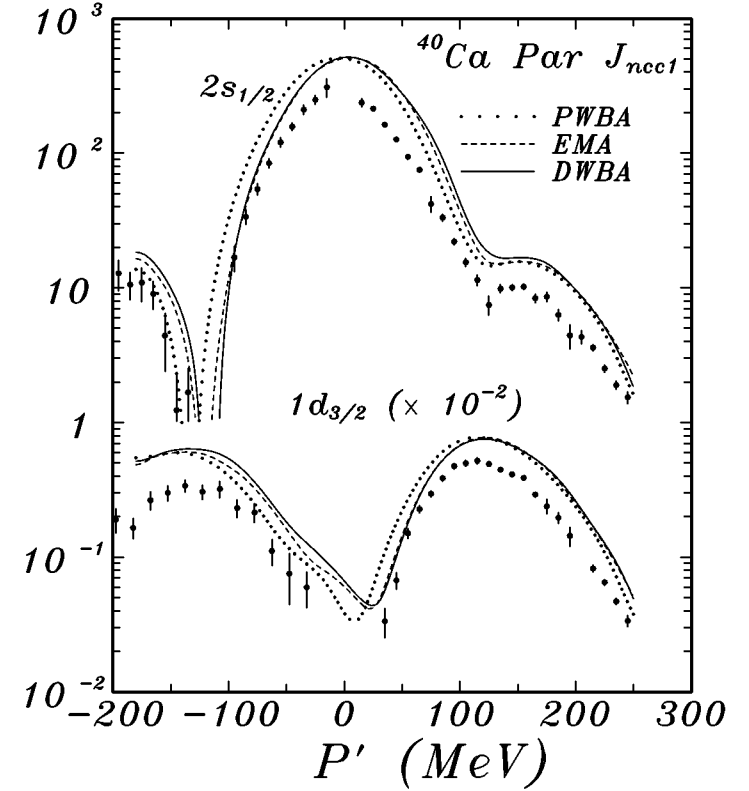
En este capítulo estudiamos los resultados obtenidos para dos capas cercanas al nivel de Fermi del núcleo  $^{40}\text{Ca}$ . Este núcleo posee una carga eléctrica mucho menor que el caso estudiado en el capítulo anterior ( $^{208}\text{Pb}$ ) por lo que es de esperar que los efectos de la distorsión coulombiana de la onda del electrón sean mucho menos apreciables.

En la figura 6.1 se comparan varios cálculos en cinemática paralela que se diferencian sólo en el cálculo de la distorsión coulombiana:

1. PWBA, o sea, sin considerar la distorsión de la onda del electrón.
2. EMA, o aproximación de momento efectivo. Esta curva se calcula utilizando valores efectivos del momento cinético del electrón como se ha descrito en el capítulo cuarto.
3. DWBA. En este caso se realiza el cálculo completo de la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón mediante un desarrollo en ondas parciales.

**Tabla 6.1:** Efecto de la distorsión coulombiana en el factor de escala ( $N$ ) ajustado para reproducir los datos experimentales. Para el mismo cálculo representado en la figura 6.1.

$J_{ncc1}$	$2s_{1/2}$		$1d_{3/2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
PWBA ( $q_{eff}$ )	0.45(3)	7.8	0.60(3)	3.6
DWBA	0.44(3)	7.7	0.60(3)	4.7
$J_{ncc2}$				
PWBA ( $q_{eff}$ )	0.52(3)	11.	0.76(2)	1.6
DWBA (estimado)	0.51(3)	—	0.76(2)	—



**Figura 6.1:** Resultados en el núcleo  $^{40}\text{Ca}$  para la sección eficaz reducida en las capas  $1d_{3/2}$  y  $2s_{1/2}$ , con cinemática paralela. Se muestra el cálculo en DWBA con el potencial óptico fit 2. Las funciones de onda del nucleón ligado se obtienen a partir del modelo HS. Se utiliza el operador  $J_{ncc1}$ . Se compara el resultado en PWBA, en PWBA con  $q_{eff}$  (EMA) y la predicción en DWBA. El momento del electrón incidente es de  $375 \text{ MeV}$  y la energía cinética del protón detectado de  $100 \text{ MeV}$ .

La figura corresponde a un cálculo que utiliza el operador  $J_{ncc1}$  para la corriente del nucleón. La energía total del electrón incidente es de  $375 \text{ MeV}$  y la energía cinética del protón detectado es de  $100 \text{ MeV}$ . El desplazamiento de la sección eficaz obtenido con la aproximación de momento efectivo (EMA) reproduce bien el mostrado por el cálculo exacto (DWBA). En cuanto a los efectos de focalización, su magnitud no es muy grande. En la capa  $2s_{1/2}$  hay un aumento de alrededor del 2% en el primer máximo del

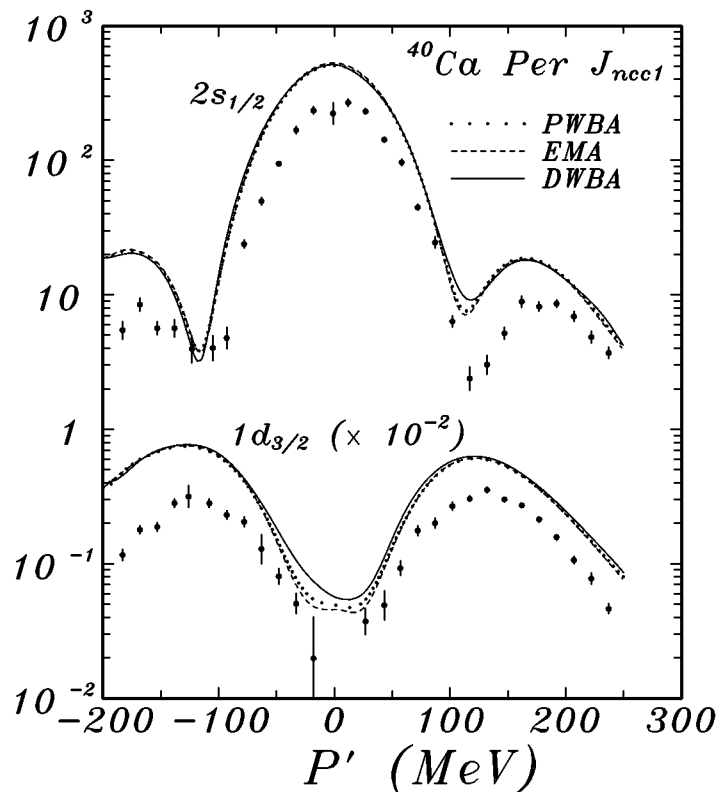


Figura 6.2: Igual que la figura 6.1 en cinemática perpendicular.

cálculo DWBA respecto de PWBA. En la capa  $1d_{3/2}$  hay un aumento del 6% en el primer máximo ( $P' < 0$ ) y una disminución del 3% en el segundo ( $P' > 0$ ) también en DWBA respecto de PWBA. En conjunto, este efecto de focalización modifica en un 2% el factor de escala deducido en la capa  $2s_{1/2}$  y deja inalterado el de la capa  $1d_{3/2}$  como puede observarse en la tabla 6.1.

Los resultados en cinemática perpendicular se muestran en la figura 6.2 y tabla 6.2. Los efectos de focalización son similares a los observados en cinemática paralela. En cinemática perpendicular, como se ha discutido en el capítulo cuarto, en la sección eficaz reducida no se observan efectos debidos al desplazamiento en el momento del electrón.

Tabla 6.2: Igual que la tabla 6.1 para cinemática perpendicular.

$J_{ncc1}$	$2s_{1/2}$		$1d_{3/2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
PWBA ( $q_{eff}$ )	0.42(4)	11.	0.44(5)	16.
DWBA	0.41(4)	12.	0.44(4)	9.0
$J_{ncc2}$				
PWBA ( $q_{eff}$ )	0.49(5)	11.	0.55(4)	6.7
DWBA (estimado)	0.48(5)	—	0.55(4)	—

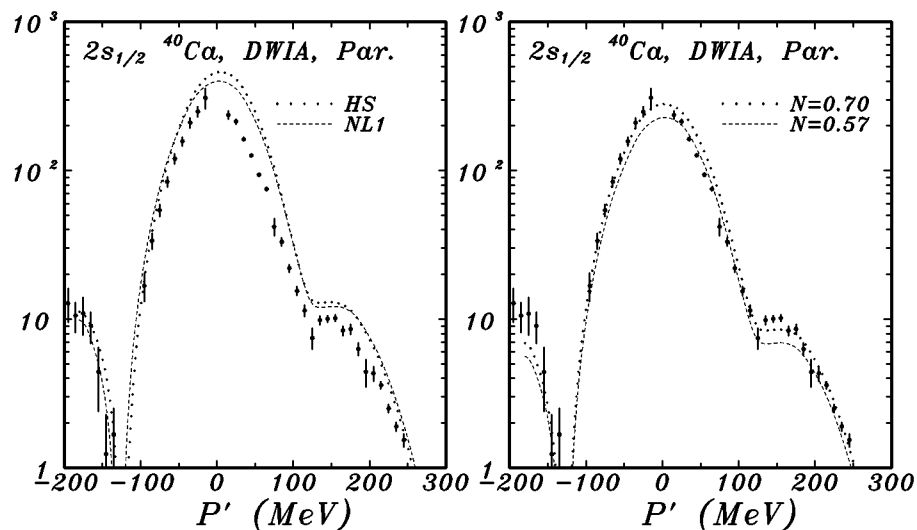
Tabla 6.3: Factores de escala ( $N$ ) para las secciones eficaces reducidas calculadas con funciones de onda del nucleón ligado obtenidas a partir de los modelos HS y NL1 para el caso representado en el figura 6.1. Se utiliza PWBA en la aproximación de momento efectivo y el operador  $J_{ncc2}$ .

	$2s_{1/2}$			$1d_{3/2}$		
	$rms$ (fm)	$N$	$M/gdl$	$rms$ (fm)	$N$	$M/gdl$
HS	3.87	0.52(3)	11.	3.73	0.76(2)	1.6
NL1	3.80	0.57(3)	7.2	3.78	0.74(2)	2.1

## 6.2 Resultados para la capa $2s_{1/2}$

### 6.2.1 Cinemática paralela

En la tabla 6.1 se observa que los factores de escala deducidos para la capa  $2s_{1/2}$  son bastante inferiores a los obtenidos en las dos capas estudiadas de  $^{208}\text{Pb}$  o en la capa  $1d_{3/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$ . No obstante, hay que tener en cuenta que la calidad del ajuste en este caso no es buena. En la tabla 6.3 se muestran los resultados obtenidos utilizando dos funciones de onda diferentes correspondientes a los modelos HS y NL1. Mientras en la capa  $1d_{3/2}$  los resultados con una u otra función de ondas difieren sólo en un 3%, para



**Figura 6.3:** Izquierda: Comparación de los resultados en  $^{40}\text{Ca}$  para la sección eficaz reducida utilizando las funciones de onda del nucleón ligado de los modelos HS y NL1. Derecha: Comparación entre los datos experimentales y el resultado teórico obtenido a partir del modelo NL1 con dos factores de escala distintos. Resultados en DWIA, PWBA en la aproximación de momento efectivo y operador  $J_{ncc2}$ .

**Tabla 6.4:** Factores de escala para la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$  extraídos a partir de los datos en cinemática paralela. Se utiliza el potencial óptico fit 2 y PWBA con momento efectivo.

	$J_{ncc1}$		$J_{ncc2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
HS	0.45(3)	7.8	0.52(3)	10.
NL1	0.49(2)	5.9	0.57(3)	7.2

la capa  $2s_{1/2}$  la variación es del 10%. Para esta capa, con el modelo NL1 se obtiene un factor de escala bastante más alto y la calidad del ajuste es mejor. En la figura 6.3 (izquierda) se comparan los resultados obtenidos con el modelo HS y NL1.

En la referencia [JnO92] los resultados para el factor de escala de la

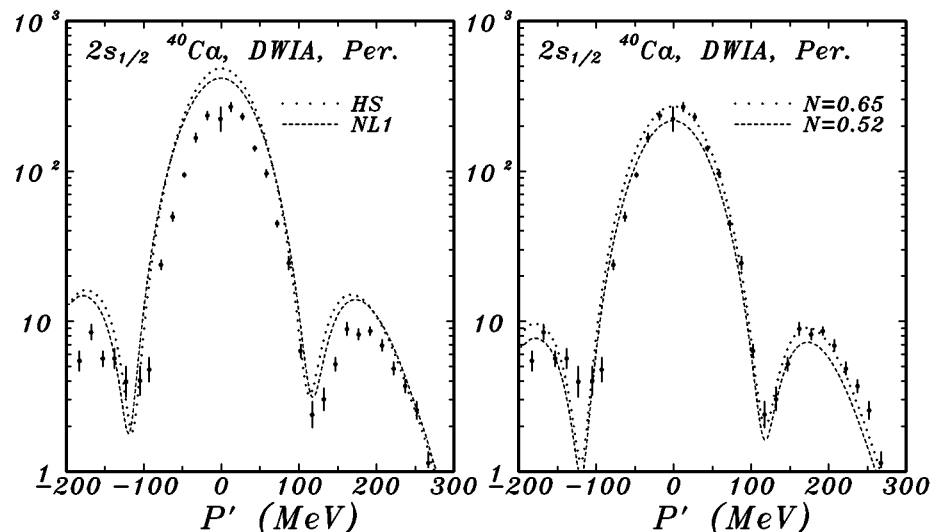
capa  $2s_{1/2}$  son bastante más altos ( $N \approx 0.75$ ). Las diferencias se explican en parte porque las funciones de onda utilizadas en dicho trabajo proceden de potenciales fenomenológicos ajustados para reproducir las energías de ligadura observadas experimentalmente, en lugar de las soluciones obtenidas por el método de Hartree que utilizamos aquí. En nuestro caso, el cálculo realizado con las funciones de onda determinadas por el modelo NL1 proporciona resultados para la sección eficaz reducida más parecidos a los obtenidos en [JnO92] de lo que parece deducirse a partir de la comparación de los factores de escala. Esto puede ser debido a que en dicha referencia el método utilizado para extraer el factor de escala a partir de los datos experimentales difiere del seguido aquí que, como se explica en el apéndice C, se basa en un método de mínimos cuadrados que da distinto peso a los datos según su error. En la referencia [JnO92], en cambio, los factores de escala se extraen a partir de un *ajuste visual*. Este último procedimiento suele dar el mismo peso a todos los datos independientemente de su error. Si la calidad del ajuste es buena, con este procedimiento pueden obtenerse valores del factor de escala razonables. Un ajuste por mínimos cuadrados que dé el mismo peso a todos los datos independientemente de su error proporciona  $N = 0.64(3)$  en lugar del valor de la tabla 6.3,  $N = 0.57(3)$ . Como se aprecia en la figura 6.3 (a la derecha) en este caso resulta bastante difícil decidir si es preferible el ajuste con  $N = 0.57$  (el valor obtenido por el método de mínimos cuadrados) o con  $N = 0.70$ .

El factor de escala extraído a partir de un ajuste de *mala calidad* es mucho más sensible a pequeños errores en el desplazamiento del momento perdido  $P'$ . Por ejemplo, desplazando la sección eficaz reducida en 5 MeV, se obtiene  $N \approx 0.63(3)$  y la calidad del ajuste es un poco mejor (con cinemática paralela).

Si el ajuste es bueno ( $M/gdl \approx 2$ ), el ajuste por mínimos cuadrados o por el método visual conduce a factores de escala similares. Desplazamientos en la sección eficaz respecto a  $P'$  (que pueden justificarse por la utilización de potenciales ópticos inadecuados, por una función de ondas del nucleón de onda incorrecta o por errores sistemáticos en los datos experimentales) empeoran significativamente la calidad del ajuste. En cambio, si el ajuste no es bueno se produce cierta indeterminación en el factor de escala a deducir por el método de mínimos cuadrados (la función a minimizar posee un mínimo poco profundo) y es difícil apreciar visualmente dicho factor. Además es posible realizar ajustes de similar calidad a partir de secciones eficaces desplazadas en  $P'$ .

**Tabla 6.5:** Igual que la tabla 6.4 en cinemática perpendicular.

	$J_{ncc1}$		$J_{ncc2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
HS	0.42(4)	11.	0.49(4)	10.
NL1	0.44(4)	12.	0.52(5)	11.

**Figura 6.4:** Igual que la figura 6.3 en cinemática perpendicular.

### 6.2.2 Cinemática perpendicular

En las tablas 6.4 y 6.5 se resumen algunos factores de escala para la capa  $2s_{1/2}$  obtenidos con cinemática paralela y perpendicular, respectivamente. Los resultados obtenidos son del orden de un 5% a un 10% más altos en cinemática paralela. La calidad de los ajustes es peor para el caso de cinemática perpendicular. En esta última cinemática la distorsión fuerte de la función de ondas del protón emitido afecta menos a la sección eficaz reducida que en cinemática paralela. Esto se observa en las figuras en la mayor simetría en torno a  $P' = 0$  y en que los mínimos se rellenan mucho menos que en cinemática paralela.

**Tabla 6.6:** Comparación entre los factores de escala deducidos a partir del cálculo de la sección eficaz reducida en DWIA y PWBA con momento efectivo utilizando diferentes potenciales ópticos y la función de ondas del nucleón ligado obtenida con el modelo HS.

	$2s_{1/2}$ Cinemática Paralela			
	$J_{ncc1}$		$J_{ncc2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
FIT 1	0.46(3)	8.8	0.53(4)	12.
FIT 2	0.44(3)	7.7	0.52(3)	11.
FIT $Ca$	0.45(3)	9.4	0.51(4)	14.
	$2s_{1/2}$ Cinemática Perpendicular			
	$J_{ncc1}$		$J_{ncc2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
FIT 1	0.44(5)	12.	0.51(5)	11.
FIT 2	0.42(4)	11.	0.49(4)	10.
FIT $Ca$	0.42(4)	11.	0.49(5)	11.
	$1d_{3/2}$ Cinemática Paralela			
	$J_{ncc1}$		$J_{ncc2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
FIT 1	0.64(3)	3.3	0.80(2)	1.5
FIT 2	0.60(3)	3.6	0.76(2)	1.6
FIT $Ca$	0.60(3)	4.7	0.76(2)	1.5
	$1d_{3/2}$ Cinemática Perpendicular			
	$J_{ncc1}$		$J_{ncc2}$	
	$N$	$M/gdl$	$N$	$M/gdl$
FIT 1	0.46(5)	16.	0.58(4)	7.0
FIT 2	0.44(5)	16.	0.55(4)	6.7
FIT $Ca$	0.44(5)	16.	0.56(4)	6.5

En la figura 6.4 (izquierda) puede comprobarse que, al igual que se ha visto anteriormente para el caso de cinemática paralela, con el modelo NL1



se obtienen secciones eficaces menores que con el modelo HS.

En esa misma figura, a la derecha, se muestra el mismo resultado teórico con dos factores de escala,  $N = 0.52$ , obtenido por el ajuste de mínimos cuadrados y  $N = 0.65$ , extraído mediante *ajuste visual*. Lo comentado para el caso de cinemática paralela es válido aquí: dado que el ajuste a los datos no es bueno existe bastante indeterminación en el valor del factor de escala.

### 6.3 Resultados para la capa $1d_{3/2}$

El factor de escala necesario es bastante más alto que para la capa  $2s_{1/2}$ . Con el operador  $J_{ncc2}$  se deducen factores superiores al 75% tanto en cinemática paralela como perpendicular. Estos valores están de acuerdo con los extraídos en el capítulo anterior para  $^{208}\text{Pb}$ , son similares a los presentados en la referencia [JnO92] y algo mayores que los obtenidos en la referencia [McD90]. El ajuste a los datos experimentales es bueno, sobre todo para los resultados obtenidos con el operador  $J_{ncc2}$  en cinemática paralela.

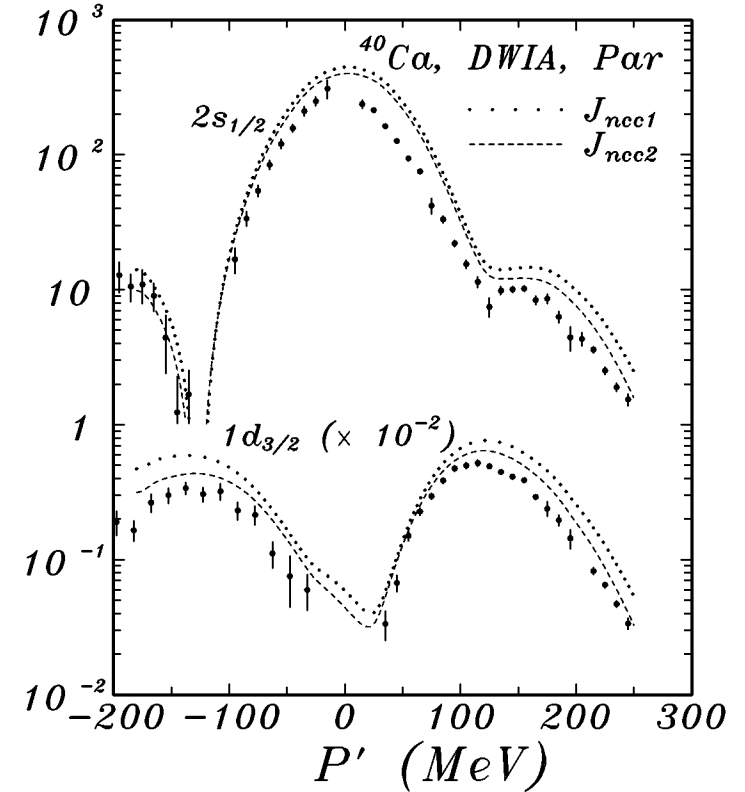
Los resultados obtenidos con funciones de onda para el nucleón ligado correspondientes a los modelos relativistas HS y NL1 son mucho más parecidos entre sí que en el caso de la capa  $2s_{1/2}$ . Las diferencias son menores del 2%.

Todo esto parece indicar que el valor del factor de escala deducido para esta capa es más fiable que el obtenido para la capa  $2s_{1/2}$ .

### 6.4 Variación con el potencial óptico

Al igual que en el capítulo anterior para el caso de  $^{208}\text{Pb}$ , hemos comparado los resultados con tres potenciales ópticos: uno procedente de un ajuste a datos sólo de  $^{40}\text{Ca}$  (fit  $Ca$ ) y dos parametrizaciones globales ligeramente diferentes (fit 1 y fit 2).

En la tabla 6.6 se muestran los factores de escala obtenidos al variar los potenciales ópticos siendo los demás elementos del cálculo idénticos. En el caso del núcleo  $^{40}\text{Ca}$  la variación es bastante menor que la obtenida para  $^{208}\text{Pb}$  ya que todos los resultados están dentro de un intervalo del 5%. Con el potencial fit 1 se obtienen factores de escala mayores tanto en cinemática paralela como perpendicular.



**Figura 6.5:** Comparación de los resultados en  $^{40}\text{Ca}$  para la sección eficaz reducida obtenidos con los operadores  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ , en DWIA para el protón final y PWBA con momento efectivo. Las funciones de onda del nucleón ligado se obtienen con el modelo NL1 para la capa  $2s_{1/2}$  y HS para la  $1d_{3/2}$ . Cinemática paralela.

### 6.5 Variación con el operador de corriente

En la tabla 6.6 y en las figuras 6.5 y 6.6 se comparan los resultados obtenidos con el operador  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ . Vemos que las diferencias en el factor de escala deducido son de alrededor del 15% en la capa  $2s_{1/2}$  y del 20% en la capa  $1d_{3/2}$ . Con el operador  $J_{ncc2}$  se obtienen factores de escala mayores. En la capa  $2s_{1/2}$  se obtienen ajustes algo mejores con el operador  $J_{ncc1}$ . En la  $1d_{3/2}$ , en cambio, el ajuste de los resultados obtenidos con el operador  $J_{ncc2}$  es mejor. Esta diferencia entre las secciones eficaces obtenidas

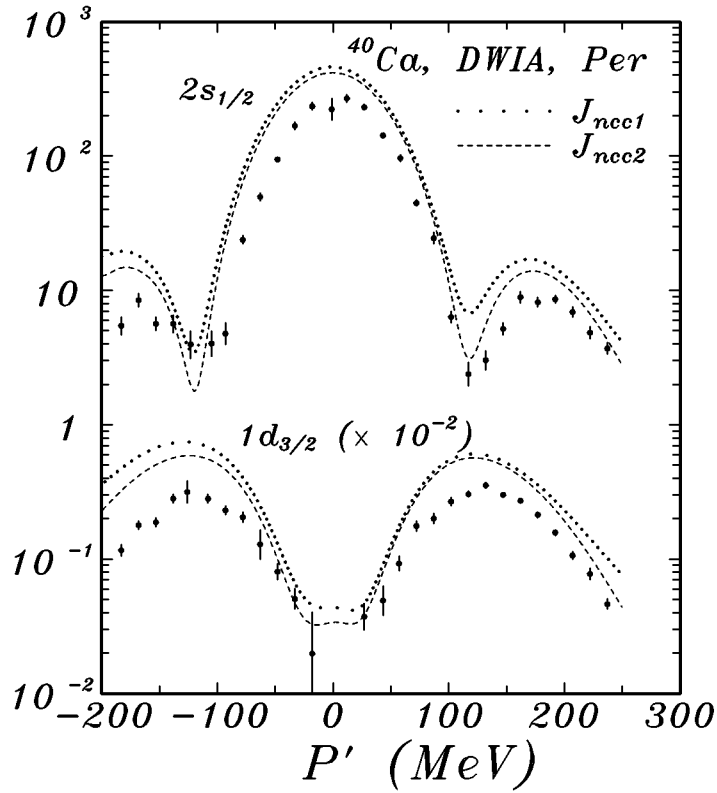


Figura 6.6: Igual que la figura 6.5 en cinemática perpendicular.

con uno u otro operador es algo mayor que la encontrada en  $^{208}\text{Pb}$ .

## 6.6 Separación L-T

En la sección 2.3 estudiamos la diferente dependencia en las variables cinemáticas de las contribuciones a la sección eficaz del proceso  $(e, e'p)$  procedentes de las contribuciones longitudinales y transversales de la corriente nuclear.

Para experimentos no polarizados, la sección eficaz para el proceso  $(e, e'p)$  puede escribirse en términos de cuatro *funciones de estructura* [dFor83, GaRM91] que dependen de cuatro escalares (por ejemplo  $q_\mu^2$ ,  $P_A^\mu q_\mu$ ,  $k_f^\mu q_\mu$  y  $P_A^\mu k_{f\mu}$ ). Dichas funciones de estructura pueden relacionarse con las compo-

ponentes de la corriente nuclear. Suelen definirse  $W_L$ ,  $W_T$ ,  $W_{LT}$  y  $W_{TT}$  de forma que:

$$\frac{d\sigma^{ee'p}}{dE_F d\epsilon_f d\Omega_F d\Omega_f} = E_F |\mathbf{P}_F| \sigma_{Mott} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \left( \frac{-q_\mu q^\mu}{\mathbf{q}^2} \right) \times \left[ W_L + \epsilon^{-1} W_T + \cos(\phi) \sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon}} W_{LT} + \cos(2\phi) W_{TT} \right] \quad (6.1)$$

con  $\epsilon^{-1} = 1 - \frac{2q^2}{q_\mu q^\mu} \tan^2(\theta_e/2)$  y  $\sigma_{Mott} = \frac{4\alpha^2}{q_\mu^4} \epsilon_i \epsilon_f \cos^2(\theta_e/2)$ .

En cinemática paralela, a partir de la expresión (2.34) puede comprobarse que en las funciones de estructura que contienen los términos de interferencia  $J_- J_+^*$  y  $\rho J_\pm$  o sea,  $W_{TT}$  y  $W_{LT}$ , aparece como factor  $\sin \gamma$  y por tanto son cero en cinemática paralela. Las otras dos funciones de estructura:

$$W_L = \frac{-q_\mu q^\mu}{\mathbf{q}^2} |\rho|^2 \quad (6.2)$$

$$W_T = -\frac{1}{2} |J_T|^2 \quad (6.3)$$

pueden entonces ser extraídas realizando experimentos con valores distintos de  $\epsilon$ . El denominador *diagrama de Rosenbluth* [Rsnb50] en el que se representa la cantidad  $W_L + \epsilon^{-1} W_T$  frente a  $\epsilon^{-1}$  permite obtener ambas funciones de estructura.

Los resultados experimentales se expresan a veces como valores de  $R_G = \sqrt{\frac{4M^2 W_T}{Q^2 W_L}}$ , con  $Q^2 = -q_\mu q^\mu$ . Esta cantidad se elige porque el denominador y el numerador son del mismo orden de magnitud y se espera que sus errores sistemáticos se cancelen en gran medida en el cociente. Si se supone válida la aproximación de factorización  $R_G$  tiene una interpretación sencilla ya que en ese caso la función espectral aparece como factor común que se cancela entre numerador y denominador. El resultado  $R_G^{fact}$  es el correspondiente a un protón libre,  $R_G \approx \mu_p$ , salvo por los efectos del cálculo fuera de la capa de masas. En DWIA sin factorización  $R_G$  depende de la interacción de estados finales, de la función de onda del nucleón ligado y del operador de corriente utilizado.

En los últimos años se ha realizado este tipo de extracción en el pico cuasielástico para experimentos *inclusivos* (en los que en el estado final sólo

se detecta el electrón). Se ha encontrado en varios núcleos un incremento del cociente  $W_T/W_L$  observado experimentalmente respecto de las predicciones teóricas. En concreto, en el caso de  $^{40}\text{Ca}$  este incremento es del 40% [MezB84, DeaW83].

Muy recientemente se ha realizado una separación de este tipo para el proceso  $(e, e'p)$  en algunas capas del núcleo  $^{40}\text{Ca}$ . Con un análisis basado en un formalismo no relativista con tratamiento aproximado de la distorsión coulombiana no se aprecia el incremento del cociente  $W_T/W_L$  observado en los experimentos inclusivos [Bu92].

En el proceso  $(e, e'p)$ , para valores de la energía perdida por debajo del umbral de emisión de más de una partícula el estado final se conoce mejor que en el caso de los experimentos inclusivos, para los cuales han de tenerse en cuenta las contribuciones de dichos procesos de emisión de varias partículas. Por ello es de esperar que la información obtenida sea más fácil de interpretar.

### 6.6.1 Diagrama de Rosenbluth y separación L-T

La separación de las funciones de estructura  $W_L$  y  $W_T$  mediante el diagrama de Rosenbluth es estrictamente válida sólo en la aproximación de PWBA. Dado que este procedimiento se basa en la comparación de datos experimentales obtenidos con valores diferentes para la energía del electrón, la distorsión coulombiana afecta de forma distinta a datos utilizados para obtener un mismo valor de las funciones de estructura. El valor del desplazamiento del momento efectivo es mayor para energías del electrón más bajas.

Como hemos visto en los apartados anteriores, los efectos de la distorsión coulombiana, aunque mucho menores que en el caso del plomo, dan lugar a desplazamientos apreciables en la sección eficaz reducida obtenida en cinemática paralela.

Con el fin de estudiar la validez del procedimiento de Rosenluth se comparará con los resultados teóricos de las contribuciones longitudinales y transversales a la sección eficaz. En DWBA, esto se ha realizado obteniendo por un lado la contribución longitudinal de la amplitud a partir del operador  $J_{cc1}^{(0)}$  y por otro la amplitud total a partir del operador  $J_{ncc1}$ . En cinemática paralela y para valores de  $P'$  menores de 100 MeV los resultados obtenidos a partir de  $J_{cc1}^{(0)}$  se diferencian de los obtenidos a partir de  $J_{ncc1}$  en

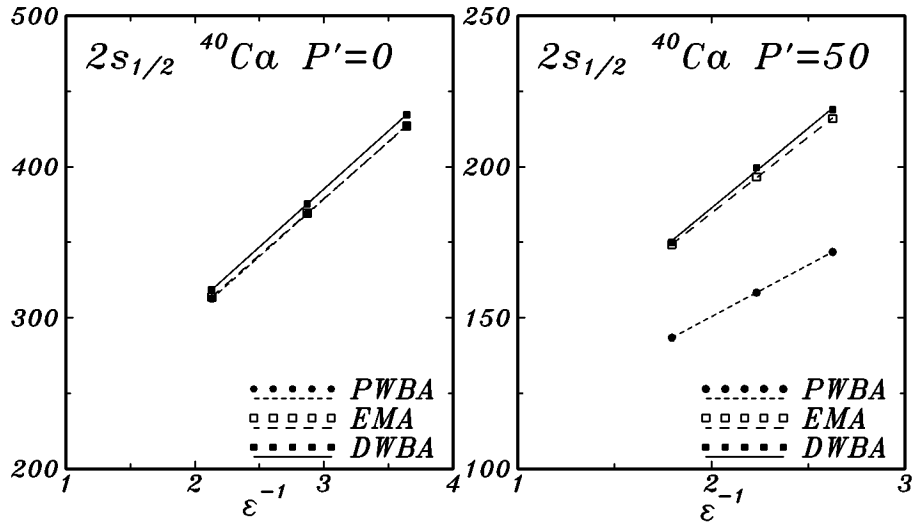
menos del 1%, por lo que la extracción teórica de las contribuciones longitudinal y transversal es válida dentro del error numérico del cálculo en DWBA (alrededor de un 2%).

**Tabla 6.7:** Variables cinemáticas elegidas para la construcción del diagrama de Rosenbluth.

$P'$ (MeV)	$Q^2$ (GeV <sup>2</sup> )	$\varepsilon^{-1}$	$\epsilon_i$ (MeV)	$T_F$ (MeV)
0	0.185	3.64	350	100
"	"	2.87	375	"
"	"	2.13	425	"
50	0.143	2.62	350	100
"	"	2.23	375	"
"	"	1.80	425	"

Se ha realizado un cálculo en la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$ . Se ha elegido un valor de  $P'$  cerca del máximo ( $P' = 0$ ) y otro fuera de él ( $P' = 50$  MeV). Se utilizan resultados obtenidos con tres energías diferentes para el electrón incidente. Los valores de algunas variables cinemáticas se resumen en la tabla 6.7. Se han construido los diagramas de Rosenbluth correspondientes (figura 6.7) utilizando los resultados obtenidos a partir del operador  $J_{ncc1}$  en PWBA, en la aproximación de momento efectivo para el electrón (EMA) y en DWBA. En los tres casos se obtiene un buen ajuste a una línea recta. En el caso de PWBA los tres puntos calculados se encuentran situados exactamente sobre la línea mientras que para los resultados en DWBA y EMA el ajuste a una recta es sólo aproximado aunque la desviación entre los puntos representados y la línea recta es pequeña. En las tablas 6.8 y 6.9 se muestran los valores de las funciones de estructura obtenidas a partir del diagrama de Rosenbluth, así como las correspondientes a la extracción teórica para cada energía. Si la aproximación de PWBA fuese exactamente válida, los valores de las funciones de estructura teóricas correspondientes a valores de la energía del electrón distintas serían iguales. Las diferencias observadas en las tablas 6.8 y 6.9 se deben a desviaciones en el comportamiento respecto a las variables cinemáticas de DWBA respecto de PWBA.

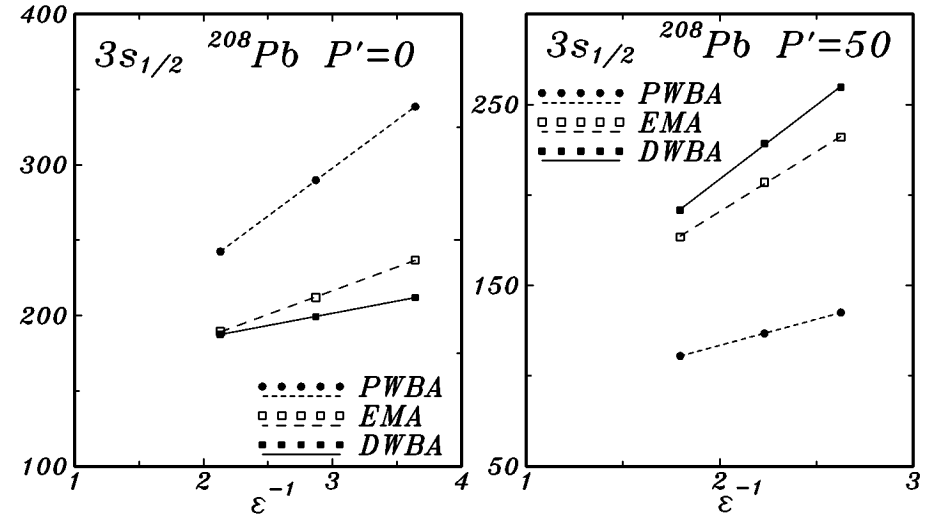
Existen diferencias importantes entre los valores obtenidos con ambos



**Figura 6.7:** Diagrama de Rosenbluth realizado con resultados para la sección eficaz del proceso  $(e, e'p)$  en la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$  utilizando el operador  $J_{ncc1}$ , el potencial óptico fit 2 y las funciones de onda del nucleón ligado del modelo HS. Con  $P' = 0$  (izquierda) y  $P' = 50$  MeV (derecha). El resto de variables cinemáticas se especifican en la tabla 6.7. Se representa  $W_L + \epsilon^{-1}W_T$  en  $\text{GeV}^{-3}$  frente a  $\epsilon^{-1}$ .

procedimientos. Esto se debe a la distorsión coulombiana ya que el efecto relativo del desplazamiento en el momento es diferente para puntos calculados con valores distintos de la energía del electrón. Para los valores calculados cerca del máximo la sección eficaz no varía mucho con  $P'$  y por eso las diferencias observadas en  $P' = 0$  entre los resultados EMA o DWBA con PWBA son pequeñas. Sin embargo, fuera del máximo la sección eficaz varía rápidamente y los efectos de la distorsión están mucho más acentuados, observándose un incremento del cociente  $W_T/W_L$  obtenido con el diagrama de Rosenbluth a partir de los resultados en la aproximación de impulso efectivo de un 46 % y de un 60 % a partir de DWBA, en ambos casos respecto del valor obtenido a partir de los resultados en PWBA. Estudiando la tabla puede concluirse:

1. Los resultados obtenidos en la aproximación de momento efectivo y de DWBA son similares, lo cual está en acuerdo con las observaciones de las secciones anteriores para la sección eficaz reducida, donde los efectos de focalización encontrados son del orden del 1–2%.



**Figura 6.8:** Igual que la figura 6.7 para  $^{208}\text{Pb}$ .

2. El cociente  $W_T/W_L$  así como la cantidad  $R_G$  deducidas de los valores teóricos de  $W_L$  y  $W_T$  mantienen valores bastante uniformes. Sin embargo estas cantidades deducidas mediante el diagrama de Rosenbluth presentan variaciones bastante importantes entre los resultados de PWBA y DWBA o EMA para valores de la cinemática lejos del máximo de la sección eficaz. Este es un efecto *espúreo* introducido por el método de extracción empleado debido a la rápida variación con  $P'$  (y por tanto en cinemática paralela con  $|\mathbf{q}|$ ) de la sección eficaz lejos del máximo.
3. Un aumento del cociente  $W_T/W_L$  puede traducirse en una disminución del obtenido tras la extracción de Rosenbluth (o *viceversa*).

Los resultados aquí presentados confirman anteriores observaciones de que un buen ajuste a una línea recta de los datos representados en el diagrama de Rosenbluth no implica la validez del procedimiento [TTZ88, Jn91].

También hemos realizado un estudio similar en  $^{208}\text{Pb}$ . En este caso los efectos de focalización son importantes, por lo que es de esperar que las diferencias entre DWBA y EMA sean notables. Esto se aprecia en los diagramas de Rosenbluth que aparecen en la figura 6.8. En la tabla 6.10 presentamos los resultados para  $W_T/W_L$  y  $R_G$  para  $^{208}\text{Pb}$  deducidos a partir

**Tabla 6.8:** Comparación entre las funciones de estructura  $W_L$  y  $W_T$  (en  $GeV^{-3}$ ) teóricas y las deducidas mediante el diagrama de Rosenbluth a partir de las secciones eficaces obtenidas en PWBA, EMA y DWBA para la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}Ca$ . También se muestra el resultado para  $W_T/W_L$  y  $R_G$ .

$P' = 0$	Rosenbluth	$\epsilon_i = 350 MeV$	$\epsilon_i = 375 MeV$	$\epsilon_i = 425 MeV$
$W_L$ PWBA	150	150	150	150
$W_L$ EMA	154	138	141	145
$W_L$ DWBA	153	152	151	152
$W_T$ PWBA	76	76.4	76.4	76.4
$W_T$ EMA	75	79.4	79.3	79.1
$W_T$ DWBA	77	78.4	78.8	78.8
$W_T/W_L$ PWBA	0.51	0.51	0.51	0.51
$W_T/W_L$ EMA	0.49	0.58	0.56	0.55
$W_T/W_L$ DWBA	0.50	0.52	0.52	0.52
$R_G$ PWBA	3.11	3.11	3.11	3.11
$R_G$ EMA	3.05	3.32	3.26	3.23
$R_G$ DWBA	3.08	3.15	3.14	3.15

de las secciones eficaces reducidas obtenidas en las diferentes aproximaciones. Las diferencias entre DWBA y EMA son significativas. A partir del cálculo en la aproximación de momento efectivo se obtiene un valor de  $R_G$  mucho mayor que en PWBA o DWBA. Los valores de  $R_G$  y  $W_T/W_L$  deducidos de las funciones de estructura teóricas son bastante uniformes, pero los obtenidos a partir del diagrama de Rosenbluth presentan grandes variaciones. Por ejemplo, para los datos con  $P' = 0$  vemos que a partir de los resultados en DWBA con el diagrama de Rosenbluth se obtiene un cociente  $W_T/W_L$  casi cuatro veces mayor que el obtenido a partir del cálculo en DWBA. Sin embargo, la comparación con los valores teóricos de  $W_L$  y  $W_T$  revela en realidad una ligera reducción de este cociente en DWBA frente a PWBA.

**Tabla 6.9:** Igual que la tabla 6.8 con  $P' = 50 MeV$ .

$P' = 50$	Rosenbluth	$\epsilon_i = 350 MeV$	$\epsilon_i = 375 MeV$	$\epsilon_i = 425 MeV$
$W_L$ PWBA	81.9	81.9	81.9	81.9
$W_L$ EMA	83.9	99.3	98.6	97.5
$W_L$ DWBA	80.5	106	104	101
$W_T$ PWBA	34.2	34.2	34.2	34.2
$W_T$ EMA	50.4	44.8	43.9	42.7
$W_T$ DWBA	53.0	43.6	43.7	41.9
$W_T/W_L$ PWBA	0.41	0.41	0.41	0.41
$W_T/W_L$ EMA	0.60	0.45	0.45	0.44
$W_T/W_L$ DWBA	0.66	0.41	0.42	0.41
$R_G$ PWBA	3.18	3.18	3.18	3.18
$R_G$ EMA	3.84	3.32	3.32	3.29
$R_G$ DWBA	4.03	3.18	3.21	3.18

De lo visto en estos dos ejemplos se concluye:

1. Incluso para núcleos con carga no muy grande como es el caso de  $^{40}Ca$ , la distorsión coulombiana de las funciones de onda del electrón, aunque no da lugar a efectos de focalización importantes, sí que afecta al procedimiento de separación  $L-T$  basado en el diagrama de Rosenbluth, debido a la variación en el momento efectivo del electrón. Estos efectos son más importantes para valores de  $P'$  alejados de los máximos de la sección eficaz.
2. En el caso de núcleos más pesados, los efectos de focalización hacen que los resultados del procedimiento de Rosenbluth a partir de resultados en DWBA sean bastante diferentes de los obtenidos con puntos calculados en la aproximación de momento efectivo.
3. Como consecuencia de ello los valores de  $R_G$  obtenidos con el diagrama

**Tabla 6.10:** Comparación entre  $R_G$  y  $W_T/W_L$  deducidos mediante el diagrama de Rosenbluth a partir de las secciones eficaces obtenidas en PWBA, EMA y DWBA con los valores teóricos en la capa  $3s_{1/2}$  de  $^{208}\text{Pb}$ .

$P' = 0$	Rosenbluth	$\epsilon_i = 350 \text{ MeV}$	$\epsilon_i = 375 \text{ MeV}$	$\epsilon_i = 425 \text{ MeV}$
$W_T/W_L$ PWBA	0.58	0.58	0.58	0.58
$W_T/W_L$ EMA	0.26	0.74	0.69	0.66
$W_T/W_L$ DWBA	0.11	0.56	0.57	0.57
$R_G$ PWBA	3.37	3.37	3.37	3.37
$R_G$ EMA	2.22	3.75	3.62	3.53
$R_G$ DWBA	1.43	3.26	3.27	3.28
$P' = 50$	Rosenbluth	$\epsilon_i = 350 \text{ MeV}$	$\epsilon_i = 375 \text{ MeV}$	$\epsilon_i = 425 \text{ MeV}$
$W_T/W_L$ PWBA	0.49	0.49	0.49	0.49
$W_T/W_L$ EMA	1.14	0.58	0.56	0.55
$W_T/W_L$ DWBA	1.83	0.46	0.46	0.46
$R_G$ PWBA	3.45	3.45	3.45	3.45
$R_G$ EMA	5.28	3.79	3.72	3.66
$R_G$ DWBA	6.69	3.36	3.36	3.36

de Rosenbluth difieren mucho de los valores deducidos a partir de las funciones de estructura teóricas (bien conocidas en nuestro cálculo). En consecuencia, la obtención con este procedimiento a partir de datos experimentales de valores para  $R_G$  distintos de los esperados puede ser ocasionado por un tratamiento incompleto de la distorsión coulombiana y no implica necesariamente una modificación al resultado de  $R_G$  predicho por la aproximación de impulso.

### 6.6.2 Extracción L-T en la capa $2s_{1/2}$ de $^{40}\text{Ca}$

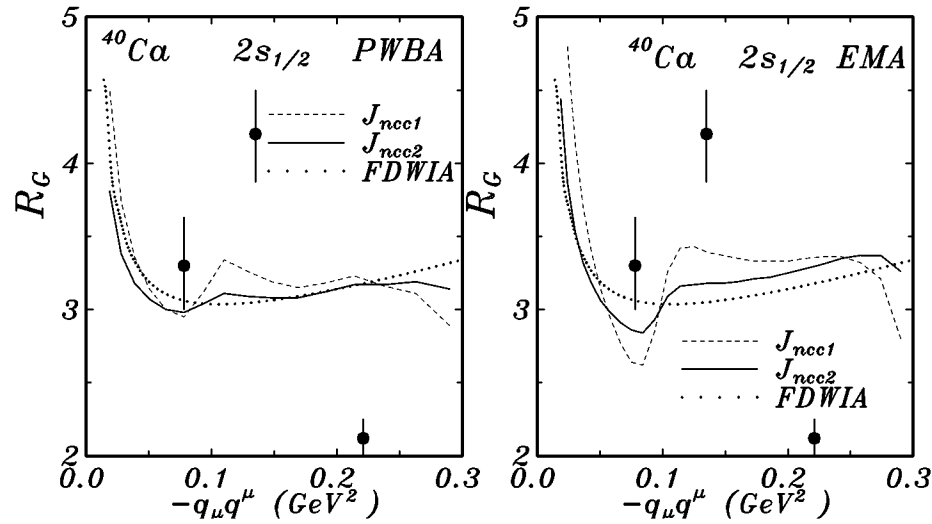
Analizamos en esta sección algunos resultados para  $R_G$  obtenidos re-

**Tabla 6.11:** Condiciones cinemáticas correspondientes a los datos utilizados en la separación experimental de las funciones de estructura en la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$  para construir el diagrama de Rosenbluth.

$P' \text{ (MeV)}$	$Q^2 \text{ (GeV}^2\text{)}$	$\epsilon^{-1}$	$\epsilon_i \text{ (MeV)}$	$T_F \text{ (MeV)}$
-38	0.221	4.81	353.1	100
”	”	2.00	472.9	”
60	0.135	4.81	293.7	100
”	”	1.58	461.3	”
145	0.078	3.56	255.3	100
”	”	1.30	472.9	”

cientemente [Bu92] en experimentos  $(e, e'p)$  en condiciones cinemáticas por debajo del umbral de emisión de más de un nucleón. Los valores de las variables cinemáticas utilizadas en la obtención de los datos se muestran en la tabla 6.11.

En la figura 6.9 se muestean las predicciones teóricas para  $R_G$  en la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$  en la aproximación de momento efectivo (derecha) y PWBA (izquierda) con cinemática paralela. Se compara el resultado factorizado (FDWIA) que es independiente de la capa y el obtenido con los operadores  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ . También se muestran los datos experimentales para este mismo caso. Con el operador  $J_{ncc2}$  se obtienen valores de  $R_G$  bastante cercanos a la predicción factorizada, sobre todo en PWBA. Con  $J_{ncc1}$  la diferencia respecto al caso factorizado es algo mayor. Estas diferencias entre los valores de  $R_G$  derivados a partir de uno y otro operador son menores del 10% para las condiciones cinemáticas consideradas, como se muestra en la figura 6.10 (derecha). El acuerdo con los datos experimentales no es bueno y tampoco es mejor para los resultados en DWBA obtenidos con el operador  $J_{ncc1}$  (figura 6.10 izquierda) que son similares a los obtenidos en la aproximación de momento efectivo. Esto debe atribuirse a que estamos comparando resultados de  $R_G$  “exactos” con valores deducidos a través del diagrama de Rosenbluth. En la figura 6.11 se muestran los resultados de una comparación con valores de  $R_G$  extraídos de datos experimentales en la que *tanto para los datos como*

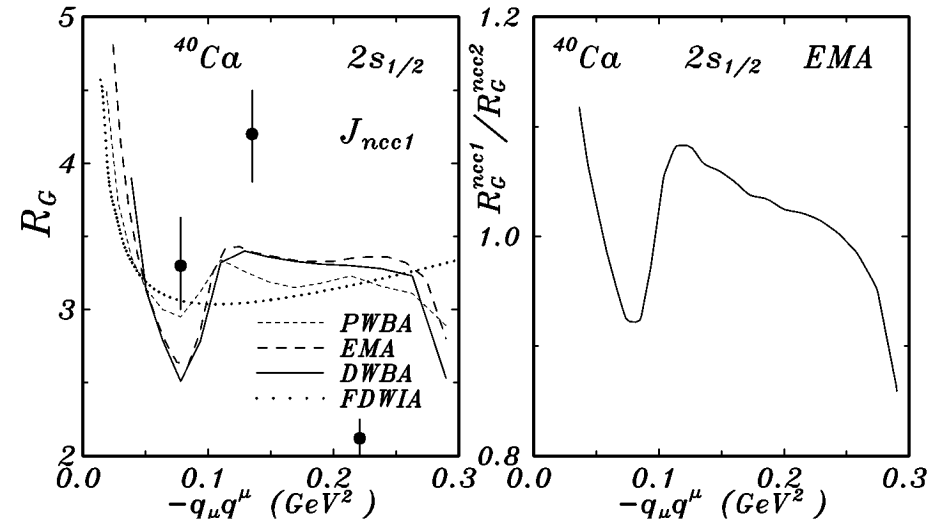


**Figura 6.9:**  $R_G$  frente a  $Q^2 = -q_\mu q^\mu$  en cinemática paralela para la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$ . Se utiliza el modelo HS. La energía cinética del protón detectado es  $T_F = 100 \text{ MeV}$ . La energía total del electrón incidente es  $\epsilon_i = 375 \text{ MeV}$ . Se comparan los resultados obtenidos con  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$  en la aproximación de momento efectivo (derecha) y PWBA (izquierda).

para los resultados teóricos se utiliza el procedimiento de Rosenbluth. Como hemos comentado en la sección anterior, esto produce mayor variación en los valores de  $R_G$  que el obtenido a partir de las funciones de estructura teóricas.

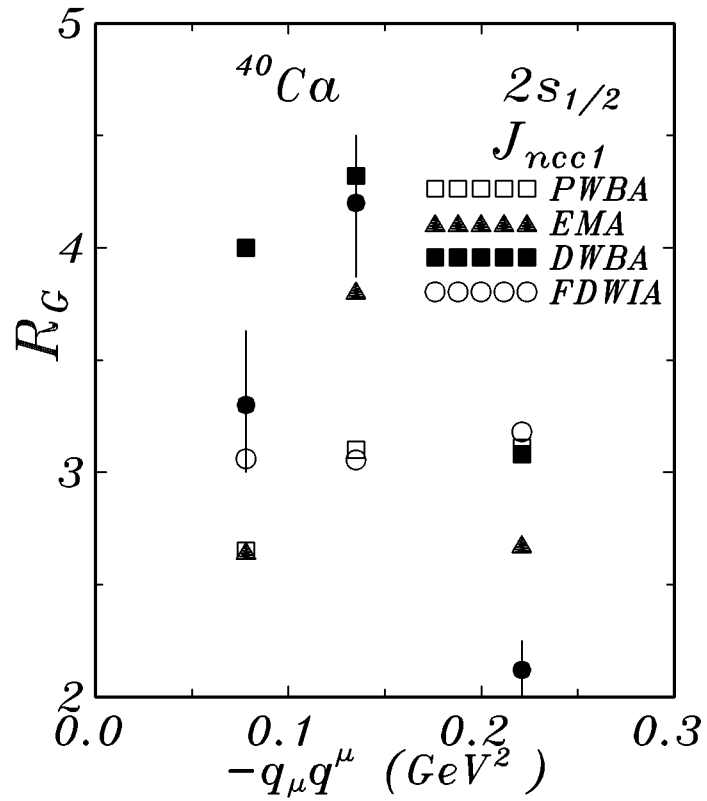
Un ajuste a los datos experimentales proporciona  $R_G = 0.82(7)$  a partir de los resultados en PWBA,  $R_G = 0.91(8)$  en la aproximación de momento efectivo y  $R_G = 0.77(6)$  en DWBA. El ajuste es mejor para los resultados obtenidos en DWBA. El análisis no relativista realizado en la referencia [Bu92] conduce a  $R_G = 0.91 \pm 0.04 \pm 0.08$ . La primera incertidumbre se refiere al error estadístico y la segunda al estimado en el resultado teórico. En este resultado se incluye la distorsión del electrón de forma aproximada. Si tomamos como incertidumbre teórica de nuestro cálculo la diferencia observada entre los resultados obtenidos con  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ , podemos dar como valor de este trabajo:  $R_G = 0.77 \pm 0.06 \pm 0.08$  en DWBA (el error estadístico se toma como una desviación estándar).

Como hemos visto en la sección anterior, no está clara la conexión entre



**Figura 6.10:** Izquierda: Igual que la figura 6.9, con el operador  $J_{ncc1}$ , comparando los resultados en PWBA, DWBA y EMA. Derecha: Cociente entre  $R_G$  obtenido con los operadores  $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$  en la aproximación de momento efectivo.

este incremento en el factor  $R_G$  extraído mediante el diagrama de Rosenbluth y posibles desviaciones entre el cociente  $W_T/W_L$  experimental y el predicho por la aproximación de impulso. Es interesante recalcar que incluso en  $^{40}\text{Ca}$  la diferencia en los valores de  $R_G$  obtenidos en DWBA y EMA es bastante grande. Los valores de la energía del electrón utilizados en la obtención de estos datos son en algunos casos menores que los utilizados en la sección anterior, con lo cual los efectos de la distorsión coulombiana pueden ser aún más importantes que los encontrados en dicha sección.



**Figura 6.11:** Resultados para  $R_G$  deducido a partir del diagrama de Rosenbluth en PWBA, EMA y DWBA, con el operador  $J_{ncc1}$  y la función de ondas del nucleón ligado del modelo HS, en la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}\text{Ca}$ . Las condiciones cinemáticas se resumen en la tabla 6.11.



## 7 Resumen y Conclusiones

### 7.1 Análisis del proceso $(e, e'p)$

Mediante el proceso  $(e, e'p)$  es posible obtener información única sobre propiedades monoparticulares del núcleo, como distribuciones de momentos en cada capa. También puede obtenerse información sobre modificaciones de la estructura del nucleón en el núcleo respecto del nucleón libre estudiando las diferencias entre las observaciones y las predicciones de la aproximación de impulso.

El escenario habitual utilizado en el análisis teórico de los datos del proceso  $(e, e'p)$  incluye los siguientes ingredientes:

1. Aproximación de impulso con intercambio de un fotón.
2. Descripción de la interacción protón-núcleo en el estado final por medio de un potencial óptico fenomenológico, ajustado para reproducir los datos de dispersión elástica de protones por el núcleo blanco.
3. Modelo de partículas independientes para el núcleo blanco.

Comparando las secciones eficaces teóricas con los datos experimentales es posible, en este esquema, extraer los factores espectroscópicos de la capa estudiada.

En este trabajo hemos estudiado el proceso  $(e, e'p)$  con el fin de averiguar de qué modo puede obtenerse información sobre la estructura nuclear a partir de las observaciones experimentales. Para ello es necesario describir el proceso de la forma más completa posible. En nuestro caso, se ha incluido la distorsión fuerte de la función de ondas del protón emitido y la distorsión coulombiana del electrón, y no se ha utilizado la aproximación de factorización.

Hemos centrado nuestro interés en los dos primeros puntos, estudiando la posible indeterminación en los ingredientes de la aproximación de impulso, como resumimos a continuación.

#### 7.1.1 Operador para la corriente

Hemos estudiado la influencia en la sección eficaz de las diferentes prescripciones utilizadas para extender la expresión del operador de corriente

para nucleones libres al caso de nucleones fuera de la capa de masas.

Con funciones de onda del nucleón calculadas con modelos relativistas realistas se han encontrado diferencias entre las expresiones más utilizadas de la corriente ( $J_{ncc1}$  y  $J_{ncc2}$ ) del orden del 10%. En algún caso son aún mayores, como en la capa  $1d_{3/2}$  del núcleo  $^{40}\text{Ca}$  en que llega a ser de un 20%. Estas diferencias son mayores que las obtenidas en estudios previos que utilizaban espinores libres para el protón [dFor83, Na90].

En el capítulo segundo se ha visto que esa diferencia se debe sobre todo a la no validez de la descomposición de Gordon para el protón detectado debido a la interacción en el estado final.

También se ha estudiado la indeterminación debida a la forma de restaurar (o no) conservación de corriente. Las diferencias entre los resultados obtenidos al eliminar la componente longitudinal espacial en función de la temporal son mayores en el caso del operador  $J_{cc1}$ . Con el operador  $J_{cc2}$  no son mayores del 5% en las condiciones cinemáticas con las que suelen obtenerse datos del proceso  $(e, e'p)$ .

#### 7.1.2 Factorización

Aunque la aproximación de factorización no es válida en el caso relativista en general, la desviación cuantitativa entre la sección eficaz reducida obtenida en esta aproximación y la obtenida con el operador  $J_{ncc2}$  es pequeña, sobre todo en cinemática paralela.

#### 7.1.3 Distorsión coulombiana

Para los resultados de la sección eficaz obtenidos con el operador  $J_{ncc1}$  se ha calculado de *forma exacta* el efecto de la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón. En el caso del núcleo  $^{208}\text{Pb}$  los efectos de focalización son de alrededor del 15% y por tanto es necesario tenerlos en cuenta a la hora de extraer factores espectroscópicos fiables. En  $^{40}\text{Ca}$  estos efectos son mucho menores, alrededor del 2%, comparables a los errores sistemáticos en los datos experimentales. Sin embargo, el efecto de desplazamiento en el momento del electrón modifica la sección eficaz en cinemática paralela de forma apreciable. El desplazamiento observado en el cálculo en DWBA resulta bien reproducido en la aproximación de momento efectivo utilizando los valores de la energía de Coulomb derivados de las distribuciones de carga del núcleo blanco predichas por los modelos Hartree relativistas.

La comparación con los resultados aproximados utilizados en los análisis no relativistas muestra que el efecto de focalización obtenido con el cálculo exacto es menor, dando lugar a secciones eficaces más bajas en nuestro caso y por tanto a factores espectroscópicos mayores.

#### 7.1.4 Potenciales ópticos

Se han obtenido resultados con tres parametrizaciones distintas del potencial óptico: dos parametrizaciones globales (fit 1 y fit 2) y parametrizaciones individuales para cada núcleo (fit  $Pb$  y fit  $Ca$ ). En  $^{208}Pb$  se han encontrado variaciones en los resultados de alrededor del 10% al utilizar diferentes potenciales ópticos. En  $^{40}Ca$  esta variación es menor del 5%.

Se ha encontrado que los potenciales ópticos ajustados con formalismo relativista dan lugar a secciones eficaces menores que sus contrapartidas no relativistas debido a que dan lugar a mayor absorción. Por tanto los factores espectroscópicos obtenidos en el caso relativista son mayores que en el caso no relativista, incluso en la aproximación de PWBA para el electrón

#### 7.1.5 Factores espectroscópicos

Se han calculado por un método de mínimos cuadrados compensado en el error de cada dato los factores de escala necesarios para ajustar las predicciones teóricas para la sección eficaz reducida a los datos experimentales. Para los resultados en el caso de cinemática paralela se obtienen buenos ajustes ( $M/gdl \approx 2$ ) en las capas  $3s_{1/2}$ ,  $2d_{3/2}$  de  $^{208}Pb$  y  $1d_{3/2}$  de  $^{40}Ca$ . En cinemática perpendicular, analizada para  $^{40}Ca$ , los ajustes son peores. En la capa  $2s_{1/2}$  de  $^{40}Ca$  los ajustes no son buenos ni en cinemática paralela ni perpendicular.

Para los casos en que el ajuste es satisfactorio se encuentran factores de escala en el rango 70–75%, superiores a los obtenidos para los mismos casos con análisis no relativistas.

Para las capas en que el ajuste no es bueno los factores de escala deducidos son menores. En este caso, los factores ajustados con *métodos visuales* como en la referencia [JnO92] pueden diferir bastante de los obtenidos en este trabajo. Además es posible introducir pequeños desplazamientos (del orden de 5 MeV) en el momento  $P'$  obteniendo ajustes de similar calidad pero con factores de escala hasta un 10% más altos. De esto puede concluirse que el valor del factor de escala deducido a partir de un ajuste inadecuado con los datos experimentales no es fiable.

En la aproximación de impulso el factor de escala que se deduce al comparar los resultados teóricos con los datos experimentales coincide con el factor espectroscópico para la capa elegida. En el modelo de capas extremo este factor coincide además con el número de ocupación de la capa. En este modelo extremo, la sección eficaz del proceso ( $e, e'p$ ) presenta un pico de anchura nula para el valor de la energía perdida  $E_m$  correspondiente a la energía de ligadura del protón en el núcleo blanco. Experimentalmente, la sección eficaz reducida se obtiene integrando sobre el rango de  $E_m$  correspondiente al pico observado, cuya anchura es finita como se puede ver en la figura 2.10. Esta anchura finita es causada principalmente por el efecto de las *correlaciones*, debido a las cuales parte de la probabilidad de encontrar al nucleón en la capa estudiada se desplaza a valores de la energía perdida distintos del correspondiente al modelo de capas extremo. Cálculos recientes en materia nuclear muestran que las correlaciones pueden disminuir la ocupación de los niveles cercanos al nivel de Fermi (los estudiados mediante procesos ( $e, e'p$ )) a valores del orden del 80–90% y que en el rango de energía perdida estudiado en estos experimentos se encuentra aproximadamente el 70% de la función espectral total [RPD90, PanPW84]. Estos números están bastante cerca de los factores espectroscópicos deducidos a partir del análisis del proceso ( $e, e'p$ ) [St91] y en particular de los obtenidos en este trabajo en las capas  $3s_{1/2}$ ,  $2d_{3/2}$  de  $^{208}Pb$  y  $1d_{3/2}$  de  $^{40}Ca$  con cinemática paralela.

#### 7.1.6 Separación L-T

Se han analizado algunos datos para la separación de las funciones de estructura longitudinal y transversal correspondientes al proceso ( $e, e'p$ ). Se ha estudiado especialmente la influencia de la distorsión coulombiana en la validez del procedimiento utilizado para extraer ambas contribuciones a partir de los datos experimentales (el diagrama de Rosenbluth). En nuestro cálculo es posible obtener de forma teórica estas contribuciones por separado (incluso en DWBA). La comparación con las funciones de estructura extraídas mediante el diagrama de Rosenbluth revela que este procedimiento no es adecuado ni siquiera para un núcleo con carga relativamente pequeña, como es el caso de  $^{40}Ca$  para el que, con el diagrama de Rosenbluth, se obtienen variaciones del cociente  $W_T/W_L$  grandes debidas al distinto desplazamiento del momento para los datos correspondientes a energías diferentes del electrón. En el núcleo  $^{208}Pb$  el análisis de los resultados obtenidos en DWBA muestra que los efectos de focalización son importantes: hay grandes diferen-

cias entre los resultados extraídos a partir de DWBA y de la aproximación de momento efectivo.

## 7.2 Conclusión

En definitiva, el formalismo totalmente relativista que hemos desarrollado es adecuado para analizar los resultados de los experimentos  $(e, e'p)$ . Para obtener información fiable sobre estructura nuclear a partir de estos experimentos es preciso incluir de forma exacta la distorsión coulombiana de la función de ondas del electrón. El efecto sobre la extracción L-T basada en el diagrama de Rosenbluth es importante incluso para núcleos ligeros como  $^{40}\text{Ca}$ . La existencia de diferencias entre el cociente  $W_T/W_L$  obtenido con este procedimiento y las predicciones teóricas puede ser debida tanto a desviaciones respecto de la aproximación de impulso (modificaciones en la forma del operador de corriente del nucleón ligado respecto del libre) como a un tratamiento incorrecto de la distorsión coulombiana.

**Parte III**

**Apéndices**

## A Resolución de la Ecuación de Dirac

En este apéndice vamos a incluir brevemente las expresiones para las funciones de onda utilizadas en la tesis. Para un estudio más completo puede consultarse por ejemplo [BD64, Üb71, Ro61]. En este trabajo se utilizan unidades naturales  $\hbar = c = 1$  así como los convenios para la métrica del espacio tiempo y las matrices de Dirac de la referencia [BD64]. Los vectores espaciales (tres componentes) se representarán por letras en negrilla (*e.g.*  $\mathbf{p}$ ) y los vectores de 4 componentes con subíndice o superíndice griego. Las matrices de Dirac  $\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$  que utilizamos se definen en función de las matrices  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta$  como:  $\gamma^0 = \beta, \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}$ .

### A.1 Ecuación de Dirac con potencial central

La ecuación de Dirac con potenciales escalar  $V_s(r)$  y vector  $V_v(r)$  esféricamente simétricos puede escribirse:

$$[i\boldsymbol{\alpha}\nabla + E - \beta(M + V_s(r)) - V_v(r)]\Psi = 0 \quad (\text{A.1})$$

con  $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ . Se han introducido las matrices  $2 \times 2$  de Pauli  $\boldsymbol{\sigma}$  e identidad  $\mathbf{1}$ . Introduciendo el operador

$$K = \beta(\boldsymbol{\sigma}l + 1) \quad (\text{A.2})$$

la ecuación (A.1) puede escribirse:

$$[i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\hat{r} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} - \beta\frac{K}{r} \right] - E + \beta(M + V_s) + V_v]\Psi = 0 \quad (\text{A.3})$$

con  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = -\gamma_5\boldsymbol{\sigma}$ . Definiendo:

$$\phi_\kappa^\mu(\hat{r}) = [Y_l \otimes \boldsymbol{\sigma}]_j^\mu = \sum_{m, m'} \langle l m \frac{1}{2} m' | j \mu \rangle Y_{lm}(\hat{r}) \chi_{m'}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4})$$

donde  $\chi_{m'}^{\frac{1}{2}}$  es un espinor de Pauli de 2 componentes y  $j = |\kappa| - 1/2, l = \kappa$  si  $\kappa > 0$  y  $l = -\kappa - 1$  si  $\kappa < 0$ . Introduciendo en (A.3) espinores de 4 componentes de la forma:

$$\psi_\kappa^\mu(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(r)\phi_\kappa^\mu(\hat{r}) \\ i f_{\bar{\kappa}}(r)\phi_{-\kappa}^\mu(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

donde  $\bar{\kappa} = \kappa - \frac{|\kappa|}{\kappa}$ , vemos que son soluciones de la ecuación de Dirac si las funciones radiales verifican:

$$\frac{df_k}{dr} = \frac{\kappa - 1}{r} f_\kappa - [E - M - V_s - V_v]g_\kappa \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{dg_k}{dr} = -\frac{\kappa - 1}{r} g_\kappa - [E - M + V_s - V_v]f_\kappa \quad (\text{A.7})$$

### A.2 Obtención de estados ligados del nucleón

De lo visto en la sección anterior, los estados ligados con valor del momento angular total  $j$  y tercera componente  $\mu$ , solución de la ecuación de Dirac son de la forma:

$$\psi(l, j, \mu) = \psi_\kappa^\mu(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u(r)\phi_\kappa^\mu(\hat{r}) \\ iw(r)\phi_{-\kappa}^\mu(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

La normalización viene determinada por

$$\int_V d\mathbf{r} \psi^\dagger \psi = \int_V r^2 dr [ |u|^2 + |w|^2 ] = 1 \quad (\text{A.9})$$

Estas ecuaciones junto con (A.6), (A.7) determinan  $u, w$  salvo por una fase.

### A.3 Estados de dispersión

Vamos a estudiar ahora las soluciones de la ecuación de Dirac en el continuo.

### A.3.1 Caso libre

En este caso, la solución de la ecuación de Dirac libre corresponde a la ecuación (A.1) con potenciales nulos y el resultado son ondas planas [BD64]. Para la solución de energía positiva se tiene:

$$\psi_{\text{P.W.}}^{\sigma} = \sqrt{\frac{M}{EV}} \begin{pmatrix} \chi_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\sigma \mathbf{k}}{E+M} \chi_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (\text{A.10})$$

Si realizamos un desarrollo en ondas parciales como combinación lineal de las funciones definidas en la expresión (A.5) resulta:

$$\psi_{\text{P.W.}}^{\sigma} = 4\pi \sqrt{\frac{E+M}{2EV}} \sum_{\kappa, \mu, m'} i^{l < l' m'} \frac{1}{2} m | j \mu > Y_{l, m'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \psi_{\kappa}^{\mu(0)}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.11})$$

con:

$$\psi_{\kappa}^{\mu(0)}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} j_l(kr) \phi_{\kappa}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \\ i \frac{|\kappa|}{\kappa} j_{\bar{l}}(kr) \phi_{-\kappa}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$\bar{l} = l - \frac{|\kappa|}{\kappa}$  y  $j_l$  son las funciones esféricas de Bessel.

### A.3.2 Potencial no nulo

Asintóticamente ( $r \rightarrow \infty$ ), en la función de ondas del estado de dispersión podemos identificar una parte de onda plana incidente y otra de onda esférica saliente (para un estado inicial) o de onda plana saliente y esférica incidente (para un estado final). En este límite asintótico y si el potencial va a cero en  $r \rightarrow \infty$  más rápido que  $1/r$ , a partir de las expresiones (A.6),(A.7) obtenemos:

$$g_{\kappa} \rightarrow \frac{1}{kr} \cos(kr + \delta'_{\kappa}) \quad (\text{A.13})$$

$$f_{\kappa} \rightarrow \frac{k}{E+M} \frac{1}{kr} \sin(kr + \delta'_{\kappa}) \quad (\text{A.14})$$

Comparando con el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel soluciones del caso libre (A.13), observamos que en el caso de potencial no nulo la ecuación (A.11) debe modificarse con la inclusión de una fase  $e^{i\delta_{\kappa}}$  para la onda incidente o  $e^{-i\delta_{\kappa}}$  para la onda saliente, con  $\delta_{\kappa} = \delta'_{\kappa} + \frac{1}{2}(l+1)\pi$ :

$$\psi^{\sigma}(\mathbf{r}) = 4\pi \sqrt{\frac{E+M}{2EV}} \sum_{\kappa, \mu, m'} e^{\pm i\delta_{\kappa}} i^{l < l' m'} \frac{1}{2} m | j \mu > Y_{l, m'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \psi_{\kappa}^{\mu}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.15})$$

### CASO COULOMBIANO

Los potenciales *de largo alcance* que incluyen términos de la forma  $1/r$  han de ser tratados de forma un poco distinta. En el caso de un campo eléctrico creado por una distribución de carga puntual el potencial es  $V_v = -Z\alpha/r$ ,  $V_s = 0$  y la ecuación (A.6) puede resolverse analíticamente con lo que se obtienen dos soluciones independientes: la solución regular cerca del origen y la solución irregular,  $f_{\kappa}^R$ ,  $f_{\kappa}^I$ ,  $g_{\kappa}^R$ ,  $g_{\kappa}^I$  [Ro61] que asintóticamente tienen la forma:

$$f_{\kappa}^R \rightarrow \frac{-1}{kr} \sin(kr + y \log kr + \delta_{\kappa}^C) \quad (\text{A.16})$$

$$g_{\kappa}^R \rightarrow \frac{1}{kr} \cos(kr + y \log kr + \delta_{\kappa}^C) \quad (\text{A.17})$$

y expresiones similares para las funciones irregulares pero con desfases  $\delta_{\kappa}^{Ci}$ . Los desfases  $\delta_{\kappa}^C$  del caso coulombiano para las funciones regulares vienen dados por:

$$\delta_{\kappa}^C = \phi - \frac{\pi}{2}\rho - \arg(\Gamma(\rho + iy)) \quad (\text{A.18})$$

donde  $y = E/k\eta$ ,  $\eta = Z/\alpha$ ,  $\rho = +\sqrt{\kappa^2 - \eta^2}$ ,  $\alpha$  es la constante de estructura fina y  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler [AbrS64].  $\phi$  está definido por:

$$e^{2i\phi} = e^{-i\pi} \left[ \kappa - \frac{iyM}{E} \right] \frac{1}{\rho + iy} \quad (\text{A.19})$$

y  $-\pi \leq \phi \leq 0$ . Finalmente, la diferencia entre el desfase de las funciones regulares e irregulares es:

$$\delta_{\kappa}^C - \delta_{\kappa}^{Ci} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{\rho}\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{-\rho}\right) - \pi\rho - \arg(\Gamma(\rho + iy)) + \arg(\Gamma(-\rho + iy)) \quad (\text{A.20})$$

### ESTADOS DE DISPERSIÓN PARA EL ELECTRÓN

En este caso el potencial a considerar en la expresión (A.1) corresponde sólo al producido por la distribución de carga nuclear ( $V_s = 0$ ). Además, para las energías de interés aquí, del orden de cientos de  $MeV$  para el electrón, es una buena aproximación no tener en cuenta la masa del electrón frente a su energía:  $m_e \rightarrow 0$ ,  $k_e = \epsilon_e$ .

Inspeccionando las ecuaciones (A.6) y (A.7) vemos que en esta aproximación  $f_{-\kappa} = -g_{\kappa}$  y  $g_{-\kappa} = f_{\kappa}$ ; además también se cumple  $\delta_{-\kappa} = \delta_{\kappa}$ .

Para obtener el desfase adicional debido a la parte no puntual de la interacción coulombiana, se integran las expresiones (A.6) y (A.7) hasta un punto  $r_m$  fuera de la distribución de carga, a partir del cual  $V(r) = \frac{-Z\alpha}{r}$  y en ese punto se compara con las dos soluciones independientes del caso puntual (regular e irregular):

$$f_\kappa(r_m) = A f_\kappa^R(r_m) + B f_\kappa^I(r_m) \quad (\text{A.21})$$

$$g_\kappa(r_m) = A g_\kappa^R(r_m) + B g_\kappa^I(r_m) \quad (\text{A.22})$$

El desfase adicional se obtiene de:

$$\tan(\delta_\kappa - \delta_\kappa^c) = \frac{\sin(\delta_\kappa^{Ci} - \delta_\kappa^C)}{A/B + \cos(\delta_\kappa^{Ci} - \delta_\kappa^C)} \quad (\text{A.23})$$

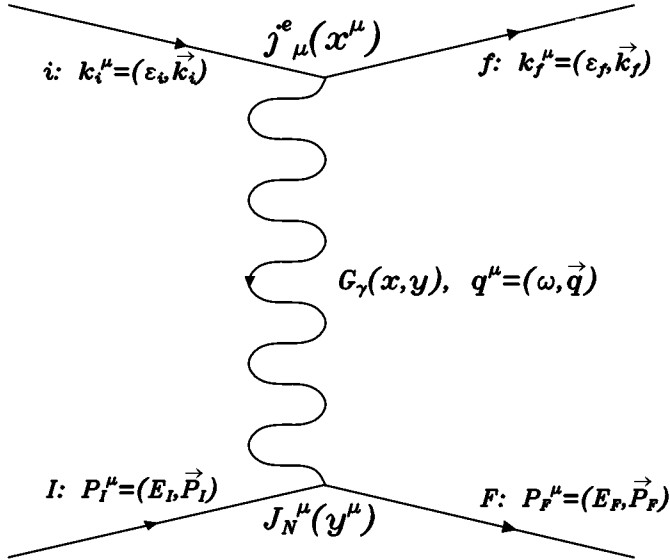
Y la normalización viene dada por  $|A|^2 + |B|^2 = 1$ .

#### ESTADOS DE DISPERSIÓN PARA EL NUCLEÓN

Se procede igual que para el electrón, pero ahora ha de tenerse en cuenta que tanto  $V_v$  como  $V_s$  pueden ser no nulos y pueden tener, en el caso más general, parte imaginaria con lo que los desfases  $\delta_\kappa$  pueden ser números complejos.

## B Sección Eficaz para el Proceso $(e, e'p)$

En este apéndice calculamos la sección eficaz para la reacción  $(e, e'p)$  en la aproximación de impulso y con intercambio de un fotón. Como hemos visto en el capítulo segundo, en esta aproximación este proceso puede interpretarse básicamente como dispersión de electrones por nucleones ligados. Por ello, primero consideraremos la sección eficaz de dispersión electrón–protón desde un punto de vista que sea posible aplicar a protones ligados. Después veremos cuáles son los efectos del núcleo residual y obtendremos la expresión de la sección eficaz para el proceso  $(e, e'p)$ .



**Figura B.1:** Diagrama de Feynmann para el proceso de dispersión electrón–protón con intercambio de un fotón.

### B.1 Sección eficaz electrón–nucleón en PWBA

#### B.1.1 Amplitud de transición

En la figura B.1 se representa el diagrama de Feynmann para el proceso de dispersión electrón–nucleón.  $G_\gamma(x, y)$  es el propagador (retardado) del fotón,  $j_\mu^e$  y  $J_N^\mu$  son las corrientes electromagnéticas del electrón y nucleón, de cargas  $-e$  y  $+e$ . La amplitud de transición se escribe [BD64]:

$$S_{fi} = (ie^2) \int d^4x \int d^4y j_\mu^e(x) G_\gamma(x, y) J_N^\mu(y) \quad (\text{B.1})$$

La expresión del propagador del fotón es:

$$G_\gamma(x, y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)} \frac{-1}{q_\mu^2} \quad (\text{B.2})$$

Si suponemos que los estados iniciales y finales son estados de energía bien definida, la dependencia temporal de las corrientes puede escribirse como:

$$j_\mu(r) = e^{-i(\epsilon_i - \epsilon_f)x^0} j_\mu(r) \quad (\text{B.3})$$

y se pueden realizar las integraciones temporales con lo que:

$$S_{fi} = +ie^2 \delta(\epsilon_i + E_I - \epsilon_f - E_F) \int dx \int dy \int \frac{dq}{(2\pi)^2} j_\mu^e(x) e^{-iq(x-y)} \frac{-1}{q_\mu^2} J_N^\mu(y) \quad (\text{B.4})$$

con  $\omega = \epsilon_i - \epsilon_f$ .

$S_{fi}$  es la *amplitud de probabilidad* de transición del estado inicial  $(i, I)$  al final  $(f, F)$  debido a la interacción electromagnética, mediada por un único fotón.

La probabilidad de transición  $\omega_{fi}$  por unidad de volumen y unidad de tiempo es:

$$\omega_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT} \quad (\text{B.5})$$

La sección eficaz representa la probabilidad de encontrar partículas en el estado final por cada partícula incidente en el estado inicial, así que hemos de dividir la probabilidad de transición  $\omega_{fi}$  por el flujo de partículas incidentes  $\phi$  y el número de partículas blanco por unidad de volumen. Con la normalización aquí elegida [BD64], el flujo puede escribirse en función de la velocidad relativa entre las partículas incidentes y el blanco:  $\phi = |\mathbf{v}_{rel}|/V$ . La velocidad relativa entre el núcleo blanco y el electrón incidente es 1, en unidades de  $c$ , ya que trabajamos en el sistema laboratorio, en el cual el



nucleón blanco está en reposo y en la aproximación ultrarelativista para el electrón. El número de partículas por unidad de volumen es  $1/V$ . Por último hemos de multiplicar por el número de estados finales de interés, con momentos cinéticos entre  $\mathbf{k}_f$  y  $\mathbf{k}_f + d\mathbf{k}_f$  para el electrón,  $\mathbf{P}_F$  y  $\mathbf{P}_F + d\mathbf{P}_F$  para el protón. Este factor es:

$$V \frac{d\mathbf{k}_f}{(2\pi)^3} V \frac{d\mathbf{P}_F}{(2\pi)^3} \quad (\text{B.6})$$

Como  $e^2 = 4\pi\alpha$  y  $d\mathbf{p} = |\mathbf{p}|^2 d\Omega d|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}| \epsilon d\Omega dE$ , llegamos a:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_f d\Omega_f dE_F d\Omega_F} = \frac{\delta(\epsilon_i + E_I - \epsilon_f - E_F)}{(2\pi)^5} 4\alpha^2 \epsilon_f^2 E_F |\mathbf{P}_F| V^3 |W_{if}|^2 \quad (\text{B.7})$$

donde

$$W_{if} = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} j_\mu^e(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{-1}{q_\mu^2} J_N^\mu(\mathbf{y}) \quad (\text{B.8})$$

Vamos a calcular  $W_{if}$  con distintas aproximaciones.

### B.1.2 Nucleón libre

El caso más sencillo que consideraremos será el de dispersión de electrones por un nucleón libre; en este caso, tanto las funciones de onda del electrón como del protón pueden tomarse como ondas planas y las corrientes resultantes son:

#### ELECTRÓN

Para una partícula puntual de Dirac:

$$j_e^\mu(\mathbf{x}) = \frac{m}{V} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_i \epsilon_f}} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\mathbf{x}} \bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \quad (\text{B.9})$$

#### PROTÓN

Es similar al caso anterior, sólo que la expresión del operador para la corriente  $\hat{J}^\mu$  es distinta de la correspondiente a una partícula puntual y por el momento la dejamos por determinar.

$$J_N^\mu(\mathbf{y}) = \frac{M}{V} \frac{1}{\sqrt{E_I E_F}} e^{i(\mathbf{P}_I - \mathbf{P}_F)\mathbf{y}} \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}^\mu u(\mathbf{P}_I, \sigma_I) \quad (\text{B.10})$$

Introduciendo (B.9) y (B.10) en (B.8) las integrales sobre  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{q}$  pueden hacerse inmediatamente:

$$W_{if}^{ep} = (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i + \mathbf{P}_I - \mathbf{k}_f - \mathbf{P}_F) \frac{mM}{V^2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_i \epsilon_f E_I E_F}} \frac{-1}{q_\mu^2} \times \bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}_\mu u(\mathbf{P}_I, \sigma_I) \quad (\text{B.11})$$

sustituyendo en (B.7) queda:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_f d\Omega_f dE_F d\Omega_F} = \delta^{(4)}(k_i^\mu + P_I^\mu - k_f^\mu - P_F^\mu) \frac{4\alpha^2}{q_\mu^4} m^2 M^2 \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \frac{|\mathbf{P}_F|}{E_I} \times |\bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}_\mu u(\mathbf{P}_I, \sigma_I)|^2 \quad (\text{B.12})$$

Si el protón final no es detectado, la sección eficaz correspondiente se obtiene integrando sobre  $d\mathbf{P}_F$ :

$$\frac{d\sigma^{ep}}{d\epsilon_f d\Omega_f} = \frac{4\alpha^2}{q_\mu^4} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \frac{m^2 M^2}{E_I E_F} \times$$

$$|\bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}_\mu u(\mathbf{P}_I, \sigma_I)|^2 \delta(\epsilon_i + E_I - \epsilon_f - E_F) \quad (\text{B.13})$$

Si no se determina la energía del electrón dispersado, después de integrar sobre  $d\epsilon_f$  la expresión resultante es:

$$\sigma_{free}^{ep} = \frac{d\sigma^{ep}}{d\Omega_f} = \frac{4\alpha^2}{q_\mu^4} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \frac{m^2 M^2}{E_I E_F} \times |\bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}_\mu u(\mathbf{P}_I, \sigma_I)|^2 \quad (\text{B.14})$$

Por último, si las polarizaciones de las partículas finales no se miden y las de las partículas iniciales no se conocen (proyectiles y blancos no polarizados) hay que sumar sobre todas las direcciones de espines finales y promediar sobre los valores posibles de los espines iniciales:

$$\frac{d\sigma^{ep}}{d\Omega_f} = \frac{4\alpha^2}{q_\mu^4} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \frac{m^2 M^2}{E_I E_F} \times \frac{1}{2} \sum_{\sigma_i} \frac{1}{2} \sum_{\sigma_I} \sum_{\sigma_f, \sigma_F} |\bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}_\mu u(\mathbf{P}_I, \sigma_I)|^2 \quad (\text{B.15})$$

### B.1.3 Nucleón en un potencial central

En este caso el nucleón blanco está representado por un estado ligado de un potencial central con momento angular  $J_B$  y tercera componente  $M_B$ . La corriente del electrón viene dada por (B.9) y el protón final lo seguimos considerando libre (onda plana). Tenemos entonces:

$$J_N^\mu(\mathbf{y}) = \sqrt{\frac{M}{VE_F}} e^{i(-\mathbf{P}_F)\mathbf{y}} \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}^\mu \psi^{J_B, M_B}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.16})$$

con

$$\int_V \psi^\dagger J_B, M_B(\mathbf{y}) \psi^{J_B, M_B}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$$

Introduciendo (B.16) y (B.9) en (B.8) resulta:

$$\begin{aligned} W_{if}^{PWBA, PWIA} &= \frac{2\pi}{V} \frac{m}{\sqrt{\epsilon_i \epsilon_f}} \sqrt{\frac{M}{E_F V}} \frac{-1}{q_\mu^2} \bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \\ &\times \bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}_\mu \int d\mathbf{y} e^{-i(-\mathbf{q} + \mathbf{P}_F)\mathbf{y}} \psi^{J_B, M_B}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

con  $\omega = \epsilon_i - \epsilon_f$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ . Sustituyendo en (B.7) e incluyendo la suma y promedio sobre espines:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{PWIA, PWBA}}{d\epsilon_f d\Omega_f dE_F d\Omega_F} &= \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} M m^2 \frac{4\alpha^2}{q_\mu^4} \frac{\delta(\epsilon_i + E_I - \epsilon_f - E_F)}{(2\pi)^3} |\mathbf{P}_F| \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{\sigma_i, \sigma_f} \frac{1}{2J_B + 1} \sum_{M_B, \sigma_I} |\bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i)|^2 \\ &\times |\bar{u}(\mathbf{P}_F, \sigma_F) \hat{J}_\mu \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{P}'\mathbf{y}} \psi^{J_B, M_B}(\mathbf{y})|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

con  $\omega = \epsilon_i - \epsilon_f$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$  y  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_F - \mathbf{q}$ .

### B.1.4 DWIA

Ahora el protón final no lo consideramos descrito por una onda plana sino en un estado de dispersión cuya función de ondas  $\psi_F^{\sigma_F}(\mathbf{P}_F, E_F, \mathbf{y})$  está representada por una solución no ligada de energía positiva de la ecuación de Dirac con un potencial central. La expresión para  $W_{if}$  es:

$$\begin{aligned} W_{if}^{PWBA, DWIA} &= \frac{2\pi}{V} \frac{m}{\sqrt{\epsilon_i \epsilon_f}} \frac{-1}{q_\mu^2} \bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \\ &\times \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{q}\mathbf{y}} \bar{\psi}_F^{\sigma_F}(\mathbf{P}_F, E_F, \mathbf{y}) \hat{J}_\mu^N \psi^{J_B, M_B}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

con  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ .

## B.2 Sección eficaz electrón–protón en DWBA

Haremos un apunte breve de las expresiones para el caso en el que los electrones no se describen a través de ondas planas, sino por medio de ondas distorsionadas por un potencial central. La corriente del electrón viene dada por la expresión general para una partícula *puntual*:

$$j_e^\mu(\mathbf{x}) = \bar{\psi}_e^{\sigma_f}(\mathbf{k}_f, \epsilon_f \sigma_f) \gamma^\mu \psi_e^{\sigma_i}(\mathbf{k}_i, \epsilon_i \sigma_i) \quad (\text{B.20})$$

La integral sobre  $\mathbf{q}$  en la ecuación (B.8) puede realizarse analíticamente, resultando (para un propagador retardado) [Mo84]:

$$\int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{-1}{\omega^2 - \mathbf{q}^2} = -2\pi^2 \frac{e^{i\omega|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{B.21})$$

y así:

$$W_{if}^{DWBA, DWIA} = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{y} \int d\mathbf{x} j_e^\mu(\mathbf{x}) \frac{e^{i\omega|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|} J_\mu^N(\mathbf{y}) \quad (\text{B.22})$$

Usando la expansión de  $\frac{e^{i\omega|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}$  en funciones esféricas de Bessel y armónicos esféricos podemos separar las integraciones angulares y radiales en (B.22) y llegamos a:

$$\begin{aligned} W_{if}^{DWBA, DWIA} &= 2\pi\omega \sum_{LM} \int dy y^2 \int dx x^2 j_L(\omega r_<) y_L(\omega r_>) \\ &\times \int d\hat{y} Y_{LM}^*(\hat{y}) J_\mu^N(\mathbf{y}) \int d\hat{x} Y_{LM}(\hat{x}) J_e^\mu(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

con  $r_<(r_>)$  el menor (mayor) de  $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|$ .

### B.3 Extensión al proceso ( $e, e'p$ )

En el caso de la sección eficaz del proceso ( $e, e'p$ ) hay que tener en cuenta el núcleo residual. En lo que sigue trabajaremos en la aproximación de PWBA para el electrón. Las expresiones se generalizan sin dificultad al

caso de DWBA siguiendo los mismos pasos que para el proceso de dispersión electrón-nucleón.

Con la notación utilizada en la figura 2.1 reescribimos la amplitud de transición de una forma similar a la obtenida en la ecuación (B.4) después de factorizar la dependencia temporal en las corrientes electrónicas e integrar sobre las coordenadas del electrón  $(\mathbf{x})$  y sobre el momento del fotón  $\mathbf{q}$ :

$$S_{fi}^{PWBA} = +ie^2 2\pi \delta(\epsilon_i + E_A - \epsilon_f - E_F - E_{A-1}) \frac{m}{V} (\epsilon_i \epsilon_f)^{-\frac{1}{2}} \frac{-1}{q_\mu^2} \times \bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{q}\mathbf{y}} J_\mu^{N, ee'p}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.24})$$

con  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ .

Veamos esquemáticamente cómo podemos calcular la integral

$$I = \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{q}\mathbf{y}} J_\mu^{N, ee'p}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.25})$$

en la aproximación de impulso. En este caso el operador de corriente nuclear es un operador a un cuerpo. En el modelo de partículas independientes los estados nucleares iniciales y finales pueden escribirse en términos de funciones de onda monoparticulares ortogonales entre sí. Suponemos además que esta ortogonalidad también se verifica para el estado no ligado correspondiente al nucleón detectado. Con todo ello puede escribirse (con notación no relativista):

$$I = \sqrt{A} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} \psi_F^*(\mathbf{P}_F, E_F, \mathbf{r}_1) \Psi_{A-1}^{\alpha*}(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \hat{J}_N \Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (\text{B.26})$$

en esta ecuación  $\psi_F(\mathbf{P}_F, E_F)$  representa la función de ondas del nucleón detectado con energía  $E_F$  y momento cinético  $\mathbf{P}_F$  (por sencillez no incluimos los índices de espín).  $\Psi_{A-1}^\alpha$  representa la función de ondas del núcleo residual de  $A-1$  nucleones que suponemos un estado de agujero obtenido a partir del estado de  $A$  nucleones  $\Psi_A$  al *aniquilar* un nucleón con números cuánticos  $\alpha$ .

Ahora factorizamos el movimiento del centro de masas. Aunque es posible realizar esta separación desde un punto de vista relativista, la forma de hacerlo no es única [Pry48]. Por otro lado como hemos visto en el capítulo cuarto, en las condiciones cinemáticas comprendidas en este trabajo los efectos relativistas no son muy importantes, así que utilizamos la prescripción

no relativista:

$$\psi_F^*(\mathbf{P}_F, E_F, \mathbf{r}_1) \Psi_{A-1}^{\alpha*}(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i(\mathbf{P}_F + \mathbf{P}_{A-1})\mathbf{R}_A} \tilde{\psi}_F^*(P_r, E_r, \mathbf{r}) \Psi_{A-1}^{\alpha*}(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (\text{B.27})$$

donde  $\mathbf{R}_A = \frac{\sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i}{A} = \frac{\mathbf{r}_1}{A} + \frac{A-1}{A} \mathbf{R}_{A-1}$  es la expresión de la coordenada del centro de masas del núcleo blanco en función de las coordenadas del nucleón detectado y del centro de masas del núcleo residual y  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{A-1}$  es la coordenada relativa.  $\boldsymbol{\xi}_i$  representa las coordenadas *intrínsecas* del sistema con  $A-1$  nucleones.  $E_r$  y  $\mathbf{P}_r$  son el momento cinético y la energía relativos en el sistema de coordenadas determinado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{R}_{A-1}$ . Análogamente a la ecuación (B.27), para el núcleo blanco tenemos:

$$\Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{+i\mathbf{P}_A \mathbf{R}_A} \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\beta} \sqrt{N_{\beta}} \tilde{\varphi}_{\beta}(\mathbf{r}) \Psi_{A-1}^{\beta}(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (\text{B.28})$$

donde hemos escrito la función de ondas del núcleo blanco factorizando el movimiento del centro de masas y hemos desarrollado en términos de las funciones de onda intrínsecas de  $A-1$  nucleones y de un nucleón adicional con números cuánticos  $\beta$ . Aparte de los coeficientes de acoplo de momento angular (que no hemos escrito por simplicidad),  $\sqrt{N_{\beta}}$  representa el coeficiente en ese desarrollo. En el modelo de partículas independientes la base de funciones de onda de  $A$  nucleones así utilizada es completa y ortogonal.

La ecuación (B.23) puede escribirse ahora como una integral sobre las coordenadas intrínsecas  $\boldsymbol{\xi}_i$ , sobre la coordenada del centro de masas  $\mathbf{R}_A$  y sobre la coordenada relativa  $\mathbf{r}$ :

$$I = \frac{1}{V} \int d\mathbf{R}_A \int d\mathbf{r} \int d\boldsymbol{\xi}_i e^{i\mathbf{q}(\frac{A-1}{A}\mathbf{r} + \mathbf{R}_A)} e^{i(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_F - \mathbf{P}_{A-1})\mathbf{R}_A} \times \tilde{\psi}_F^*(\mathbf{P}_r, E_r, \mathbf{r}) \Psi_{A-1}^{\alpha*}(\boldsymbol{\xi}_i) \hat{J} \sum_{\beta} \sqrt{N_{\beta}} \tilde{\varphi}_{\beta}(\mathbf{r}) \Psi_{A-1}^{\beta}(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (\text{B.29})$$

La integración sobre  $\mathbf{R}_A$  es inmediata, expresando la conservación del momento cinético en el vértice nuclear. La ortogonalidad de los estados de  $A-1$  partículas permite realizar la integral sobre las coordenadas intrínsecas:

$$\int d\boldsymbol{\xi}_i \Psi_{A-1}^{\alpha*}(\boldsymbol{\xi}_i) \Psi_{A-1}^{\beta}(\boldsymbol{\xi}_i) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.30})$$

y finalmente:

$$I = \frac{1}{V} \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{P}_A - \mathbf{P}_{A-1} - \mathbf{P}_F) \sqrt{N_\alpha} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \frac{A-1}{A} \mathbf{r}} \tilde{\psi}_F^*(\mathbf{P}_r, E_r, \mathbf{r}) \hat{J} \tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{r}) \quad (\text{B.31})$$

Por último, la expresión del momento relativo  $\mathbf{P}_r$  es:

$$\mathbf{P}_r = \frac{A-1}{A} \mathbf{P}_F - \frac{1}{A} \mathbf{P}_{A-1} \quad (\text{B.32})$$

La cantidad  $I$  ha sido determinada con la aproximación de impulso y el modelo de partículas independientes. Si comparamos con la expresión correspondiente al caso de dispersión de nucleones en un potencial central (B.20) vemos que en el proceso  $(e, e'p)$  la presencia del núcleo residual modifica los valores del momento con los que se calcula la integral  $I$ . Además aparece el factor  $\sqrt{N_\alpha}$ , o *amplitud espectroscópica*.

Introduciendo la expresión de (B.31) en la amplitud de transición obtenemos:

$$S_{fi}^{PWBA} = +ie^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q^\mu + P_A^\mu - P_{A-1}^\mu - P_F^\mu) \frac{m}{V} (\epsilon_i \epsilon_f)^{-\frac{1}{2}} \frac{-1}{q_\mu^2} \quad (\text{B.33})$$

$$\times \bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} e^{i\frac{A-1}{A} \mathbf{q} \mathbf{r}} \tilde{\psi}_F^*(\mathbf{P}_r, E_r, \mathbf{r}) \hat{J} \tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{r})$$

Ahora incluimos el resto de factores de la sección eficaz: En la densidad de estados finales hay un factor debido al núcleo residual no presente en el caso de dispersión electrón-nucleón:  $V \frac{d\mathbf{P}_{A-1}}{(2\pi)^3} \rho(M_{A-1}^*) dM_{A-1}^*$ . El término  $\rho(M_{A-1}^*) dM_{A-1}^*$  ha de introducirse porque el núcleo residual puede no aparecer en el estado fundamental y por tanto su energía y momento no están correlacionados.

Si definimos:

$$J_\mu^{ee'p}(\mathbf{q}) = \sqrt{V} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \mathbf{r}} \tilde{\psi}_F^*(\mathbf{P}_r, E_r, \mathbf{r}) \hat{J} \tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{r}) \quad (\text{B.34})$$

entonces podemos escribir:

$$d\sigma_{PWBA}^{ee'p} = \frac{4m^2 \alpha^2}{q_\mu^4 \epsilon_i \epsilon_f} \delta^{(4)}(q^\mu + P_A^\mu - P_{A-1}^\mu - P_F^\mu) \frac{N_\alpha}{(2\pi)^3} \quad (\text{B.35})$$

$$\times \overline{|\bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) J_\mu^{ee'p}(\mathbf{q})|^2} d\mathbf{k}_f d\mathbf{P}_F d\mathbf{P}_{A-1} \rho(M_{A-1}^*) dM_{A-1}^*$$

La barra indica suma y promedio sobre espines y  $\mathbf{q}' = \frac{A-1}{A} \mathbf{q}$ . Ahora integramos sobre las variables no medidas:  $\mathbf{P}_{A-1}$  y  $M_{A-1}^*$ , con lo que resulta:

$$\frac{d\sigma_{PWBA}^{ee'p}}{dE_F d\epsilon_f d\Omega_F d\Omega_f} = \frac{4m^2 \alpha^2 \epsilon_f}{q_\mu^4 \epsilon_i} |\mathbf{P}_F| E_F N_\alpha \overline{|\bar{u}(\mathbf{k}_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(\mathbf{k}_i, \sigma_i) J_\mu^{ee'p}(\mathbf{q}')|^2}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E_{A-1}}{M_{A-1}^*} \rho(M_{A-1}^*) \quad (\text{B.36})$$

con:

$$E_{A-1} = E_A + \omega - E_F \quad (\text{B.37})$$

$$M_{A-1}^* = \sqrt{E_{A-1}^2 + \mathbf{P}_{A-1}^2} \quad (\text{B.38})$$

$$\mathbf{P}_{A-1} = \mathbf{P}_A + \mathbf{q} - \mathbf{P}_F \quad (\text{B.39})$$

### B.3.1 Comparación con los datos experimentales

En la expresión anterior falta por determinar la función  $\rho(M_{A-1}^*)$ . El núcleo residual después de la interacción puede quedar en un estado metaestable o del continuo con lo cual dicha función tendrá un ancho finito, o bien en un estado discreto caracterizado por una energía de excitación  $E_x$  con lo que  $\rho(M_{A-1}^*) = \delta(M_{A-1}^* - M_{A-1}^0 - E_x)$ . La expresión para  $M^*$  (B.38) muestra que esta variable posee dependencia tanto en  $\omega$  como en  $\mathbf{q}$ , variables que pueden ser controladas experimentalmente. Esto posibilita la obtención de datos como los mostrados en la figura 2.10, reflejando simultáneamente la presencia de capas nucleares para valores diferentes de la energía perdida (esto es, de la energía de excitación nuclear) y la distribución de momentos de los nucleones en cada una de estas capas.

En la figura 2.9 vemos que la sección eficaz presenta picos bien definidos alrededor del valor de  $E_m$  correspondiente a las energías de los estados del núcleo residual observados. La integral de la sección eficaz debajo del pico dividida por  $\sigma_{ep} |\mathbf{P}_F| E_F$ :

$$\int_{\Delta E_m} \frac{d\sigma_{PWBA}^{ee'p}}{dE_F d\epsilon_f d\Omega_F d\Omega_f} \frac{1}{\sigma_{ep} |\mathbf{P}_F| E_F}$$

es la cantidad que suele denominarse *sección eficaz reducida experimental* y que se utiliza a la hora de presentar los datos experimentales [Qn88]. Esta

magnitud se obtiene teóricamente a partir de la ecuación (B.36) después de integrar sobre  $E_m$  (o lo que es lo mismo, sobre  $E_x$ ) y es la que se representa (en  $GeV^{-3}$ ) en la mayoría de las figuras de este trabajo.

### B.3.2 Eliminación del centro de masas

Como acabamos de obtener, en el cálculo de la sección eficaz para el proceso  $(e, e'p)$  aparecen las funciones de onda monoparticulares *intrínsecas* para el nucleón ligado en la capa  $\alpha$ . En los cálculos teóricos basados en el modelo de capas, dichas funciones intrínsecas no se conocen directamente porque no se ha tenido en cuenta la contribución *espúrea* del centro de masas. Funciones de onda intrínsecas en las que se ha eliminado esta contribución pueden obtenerse de forma exacta con el modelo del oscilador armónico [DieF74]. Los efectos observados en este modelo son de orden  $\frac{A}{A-1}$  y por tanto pueden ser importantes en núcleos ligeros. En este trabajo  $A \geq 40$  por lo que no hemos tenido en cuenta estas correcciones.

## C Cálculo Numérico

### C.1 Sección eficaz en DWBA

#### C.1.1 Cálculo de las integrales radiales

Para el electrón se toma el límite en que su masa es cero y se integra la ecuación de Dirac con el método de Milne, como en las referencias [Yn54, Ud89] incluyendo hasta la tercera derivada.

En el cálculo  $(e, e')$  se evalúa la contribución de la parte asintótica ( $r \rightarrow \infty$ ) a las integrales radiales a partir de las expresiones analíticas exactas [GrO70]. La integración numérica se realiza hasta 300–400 fm. En algún caso concreto (cerca de los mínimos) es necesario integrar hasta 1000 fm.

Para  $(e, e'p)$  se integra en las coordenadas del electrón hasta un radio más allá de la distribución de carga nuclear (unos 20 fm). A partir de ese punto se continúa la integración realizando la extracción de los valores de la integral cada 3 ó 4 fm, hasta un radio final de unos 40 fm. El valor para la integral resultará de promediar los valores de estas extracciones. Al ser la energía transferida en estos procesos mayor (en la zona cuasielástica del orden de 100 MeV frente a unos pocos MeV para los estados discretos estudiados en el caso de  $(e, e')$ ) el integrando, que para  $r$  suficientemente grande se comporta como  $h_L^{(1)}(\omega r)$ , disminuye con el radio más rápidamente en este caso y el error de truncación es menor. Como veremos más adelante al comparar un caso de prueba (DWBA con  $Z$  próximo a cero) con el resultado exacto, el error en los máximos es menor del 1%. En los mínimos este error es mayor (aunque no pasa del 10%). En la referencia [JnO92] la contribución asintótica se calcula a partir de expresiones analíticas [ZaO86] similares a las usadas aquí para el proceso  $(e, e')$  con lo que la desviación entre los resultados DWBA con  $Z=0$  y PWBA será, presumiblemente, menor en su caso. Ahora bien, el cálculo de estas contribuciones analíticas supone un esfuerzo en tiempo de cálculo adicional muy considerable. De hecho, en el caso del proceso  $(e, e')$  la obtención numérica de las contribuciones analíticas resulta la principal contribución al tiempo de cálculo total. Dado que el error sistemático en la sección eficaz experimental es del orden del 5% se ha tratado de reducir en lo posible el error numérico del cálculo en DWBA

sin penalizar el tiempo de cálculo necesario, con el fin de no sobrepasar la potencia de cálculo disponible.

Tanto en límite de ondas parciales con índice alto como de radio de integración grande el valor del integrando electrónico tiende al obtenido en el caso en que  $Z \approx 0$  (PWBA). En este trabajo hemos utilizado este hecho para reducir el error numérico, considerando que el error debido a la truncación tanto en el número de ondas parciales como del radio máximo de integración es similar en PWBA y en DWBA. De esta forma, se compara el resultado del cálculo en DWBA con  $Z \approx 0$  con el cálculo en PWBA y los factores de corrección obtenidos en la amplitud se utilizan para corregir el cálculo en DWBA. Estos factores obtenidos son cercanos de la unidad (como mucho se desvían en un 10% cerca de los mínimos). Para contrastar la validez de este método se comparan cálculos en los que se trunca la integración a 20, 30 y 40 fm. Sin efectuar la corrección, la variación entre los resultados obtenidos a diferentes radios es del 1% en los máximos y del 10% cerca de los mínimos. Después de la corrección la variación en las secciones eficaces obtenidas en los tres casos sigue siendo menor del 1% en los máximos pero se mantiene inferior al 2% en toda la región estudiada. Esta variación del 2% la tomamos como estimación del error numérico en el cálculo de DWBA para el proceso  $(e, e'p)$ .

En las figuras de este apéndice no se ha incluido esta corrección con el fin de mostrar claramente el error producido por las aproximaciones utilizadas en el cálculo numérico.

En la referencia [McD90] la integración se detiene al llegar a un radio de unos 15 a 20 fm y no se realiza el promedio en las integrales extraídas para diferentes valores del radio final. El error en los máximos en este caso puede alcanzar hasta un 3% [McD91]. Para los casos estudiados en este trabajo consideramos suficiente el nivel de precisión alcanzado mediante el procedimiento descrito en el párrafo anterior. Hay que tener presente que en circunstancias particulares (lejos de los máximos de la sección eficaz) estas contribuciones a las integrales radiales pueden ser importantes [Jn91].

#### C.1.2 Límites al desarrollo en ondas parciales

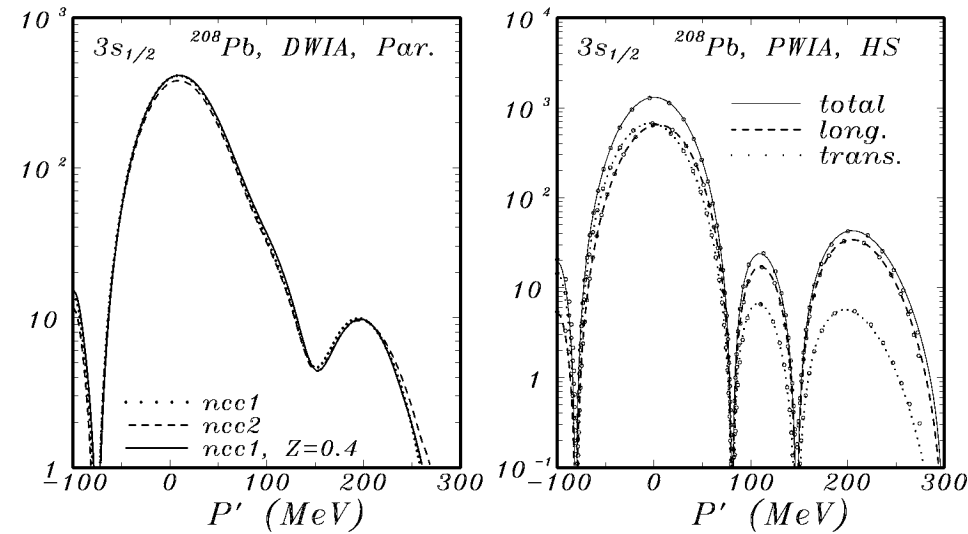
No es posible sumar todas las ondas parciales (infinitas) necesarias para obtener el valor *exacto* de la sección eficaz por lo que es preciso estimar el error introducido. La convergencia de la suma para el desarrollo en serie de la función de ondas del estado final del protón en DWIA, de las funciones

de ondas inicial y final del electrón en DWBA y del propagador del fotón en los dos casos, es muy lenta en el caso general. Para las transiciones a estados discretos estudiados con el proceso  $(e, e')$ , el número de ondas en el desarrollo del propagador del fotón está limitado por conservación del momento angular del núcleo en el estado inicial y final (por ejemplo, sólo los términos con  $L=1$  contribuyen a las transiciones  $0^+ \xrightarrow{M1} 1^+$  que se calculan en este trabajo) y por tanto sólo se trunca el desarrollo de la función de ondas del electrón (en DWBA). La convergencia de la serie es particularmente lenta para ángulos cercanos a  $180^\circ$  por lo que es preciso transformarla en otra de convergencia más rápida lo que se hace aquí siguiendo el método expuesto en las referencias [Yn54, Zg67]. Utilizando de 30 a 40 ondas parciales se consigue un acuerdo mejor que el 1% al comparar con el resultado de PWBA, excepto muy cerca de los ceros exactos de PWBA, como puede observarse en la figura 4.1. Otra posibilidad consiste en estimar la contribución de las ondas parciales con momento angular alto ( $L > 30$ ) a partir de expresiones analíticas como se hace en la referencia [ZaO86].

En  $(e, e'p)$ , en cambio, en el estado nuclear final existen componentes con todos los valores de momento angular y por tanto el desarrollo en el propagador del fotón no está limitado por conservación del momento angular a un número finito de términos. Por ello la potencia de cálculo necesaria es mucho mayor. Por otro lado, las condiciones cinemáticas para el electrón son bastante diferentes (el ángulo de dispersión es menor de  $90^\circ$ ) y la convergencia de la serie es más rápida. Los cálculos en DWBA aquí mostrados incluyen al menos 30 ondas parciales para el electrón, otro tanto para el propagador y un máximo (por razones de tiempo de cálculo y espacio de almacenamiento) de alrededor de 40. El error introducido al sumar sólo un número finito de ondas se estima en dos fases:

1. Se comprueba la truncación en el número de ondas parciales para el electrón comparando con el cálculo en PWBA, en el que no se realiza el desarrollo de la función de ondas del electrón al poder utilizarse las expresiones analíticas exactas.
2. El error de truncación para el propagador del fotón y la función de ondas del protón final se estudia sumando hasta 100 ondas parciales, para DWIA y utilizando el resultado exacto en PWIA (sin desarrollo en serie). Un valor de 30 a 40 ondas parciales es suficiente dentro de un 1% de error, en general. No obstante, ese número depende

de la cinemática: cuanto menor sean  $|q|, |P_F|$ , la convergencia será más rápida. En cinemática paralela, para  $P' = -100, P_F = 444$  y  $q = 544$  (valores en  $MeV$ ) se necesitan unas 40 ondas parciales, pero para  $P' = 200$  y  $q = 244$  bastan con 25. Es posible que para condiciones cinemáticas distintas de las aquí consideradas sea necesario incluir un



**Figura C.1:** El resultado para la sección eficaz reducida ( $GeV^{-3}$ ) en PWBA se compara con el obtenido en DWBA con  $Z \approx 0$  para comprobar la validez del cálculo. A la izquierda, en el caso de DWIA, los resultados con el operador  $J_{ncc1}$  deben coincidir. También se muestra, sólo en PWBA, un cálculo con el operador  $J_{ncc2}$ . A la derecha se utiliza la aproximación PWIA y se muestran por separado las contribuciones longitudinal y transversal. Las curvas han sido obtenidas en PWBA y las marcas sobre ellas son el cálculo de comprobación en DWBA ( $Z \approx 0$ ). Ambas figuras corresponden a cinemática paralela con  $T_F = 100$  MeV y  $\epsilon_i = 375$  MeV.

### C.1.3 Comprobación del resultado numérico

En la figura C.1 se compara el cálculo PWBA con el obtenido en DWBA ( $Z = 0.4$ ) para el proceso  $(e, e'p)$  para un caso similar al de la figura 4.3. En PWIA para el protón final (derecha) puede verse que el acuerdo del código DWBA con el resultado exacto (PWBA) se mantiene a lo largo de varios órdenes de magnitud. En el cálculo en DWIA (izquierda) se observan

pequeñas diferencias en la región de valores de  $P'$  entre 100 y 200 MeV, esto es, alrededor del segundo máximo de PWIA (enmascarado por la distorsión de la onda del protón) y el mínimo en  $P' \approx 150$  MeV.

Para reducir el error de la evaluación de la sección eficaz en DWBA, es preciso incluir más ondas parciales y evaluar mejor la contribución asintótica a las integrales radiales. Ello repercute en el tiempo de cálculo necesario. Con los límites aquí tomados para el número de ondas parciales, intervalo y radio máximo de integración, se introduce un error del 1% en los máximos. Fuera de los máximos el error es típicamente de un 2-3%, aunque puede llegar a un 10% en algún caso desfavorable. Este error se reduce a un valor no mayor del 2% con el procedimiento descrito en la sección anterior.

#### C.1.4 Tiempos de cálculo

A la hora de obtener los resultados, la diferencia más notable entre DWBA y PWBA estriba, además de en la dificultad de desarrollar un código mucho más complejo, en la potencia de cálculo necesaria para poner dicho código en funcionamiento con un error numérico aceptablemente bajo.

Por ello, en este trabajo se ha limitado el estudio del efecto de la distorsión coulombiana a los operadores de la familia  $J_{cc1}$ . Los cálculos equivalentes para el operador  $J_{cc2}$  requieren dos a tres veces más tiempo de cálculo. La obtención *por separado* de las contribuciones longitudinales y transversales es todavía más exigente en este sentido.

El operador  $J_{ncc2}$  aparece con más frecuencia en los códigos relativistas para  $(e, e'p)$  [JnO92, McD90]. Como hemos visto en el capítulo quinto, con este operador se obtienen secciones eficaces algo menores (y por tanto se derivan números de ocupación más altos). El comportamiento de este operador en cuanto a la conservación de corriente en la aproximación de impulso también es algo mejor. Sin embargo, no hay razones *definitivas* para preferirlo sobre el operador  $J_{ncc1}$ . Los modelos de teoría nuclear que tengan en cuenta las modificaciones de la estructura del nucleón en el interior del núcleo con respecto al caso libre, bien se basen en modelos de intercambio de mesones, en modelos de *quarks*, o a partir de QCD, arrojarán luz sobre cuál es la forma más adecuada para el operador de corriente nuclear en la aproximación de impulso [Mul90, Na90]. Una discusión sobre los resultados actuales de estos modelos está más allá del alcance de este trabajo.

Con todo, no es de esperar que los efectos de la distorsión coulombiana observados con uno u otro operador sean diferentes y esto justifica la extra-

polación de las predicciones para el operador  $J_{ncc1}$  (la reducción debida a la distorsión coulombiana del factor espectroscópico derivado) a los resultados obtenidos con otros operadores.

**Tabla C.1:** Potencia de cálculo y espacio en disco (en Megabytes) requeridos por los códigos desarrollados en este trabajo para el proceso  $(e, e'p)$  en DWIA. Los valores de tiempo de ejecución corresponden al cálculo de un valor de sección eficaz, en un IBM-RS6000-320H. Son necesarios de 25 a 35 valores en cada figura.

	Capa	Ondas		Disco (MB)	Tiempo	Integrales	Términos
		Elect.	Prot.				
PWBA	$s_{1/2}$	–	30	2	30 s.	$\approx 10^3$	$\approx 10^4$
PWBA	$h_{11/2}$	–	30	2	180 s.	$\approx 10^4$	$\approx 10^5$
DWBA	$s_{1/2}$	30	30	12	$4 \times 10^3$ s.	$\approx 10^5$	$\approx 10^8$
DWBA	$h_{11/2}$	30	30	70	$2 \times 10^4$ s.	$\approx 10^6$	$\approx 10^8 - 10^9$

En la tabla C.1 aparecen algunos datos sobre los cálculos realizados con el código desarrollado para este trabajo. Se muestra el tiempo de CPU típico (en un IBM-RS6000-320H) en PWBA y DWBA, el espacio en disco requerido y el número aproximado de integrales radiales y términos en el desarrollo en serie que es necesario calcular. Dado el rápido progreso en el campo de los ordenadores, es de esperar que el cálculo exacto en DWBA para el proceso  $(e, e'p)$  pueda ser accesible a la próxima generación de ordenadores personales<sup>1</sup>.

## C.2 Cálculo Hartree relativista

Para el caso de lagrangianos relativistas con acoplos lineales como el modelo HS que hemos utilizado, existen programas de ordenador disponibles para uso científico, como el código TIMORA desarrollado por Horowitz y colaboradores [HMS91, HS81] que calculan la solución Hartree.

<sup>1</sup>Por ejemplo, en ordenadores relativamente corrientes, basados en la CPU i486 a 33 MHz, todos los programas aquí desarrollados se ejecutan sin dificultades, aunque el tiempo de ejecución es de tres a cuatro veces mayor



Para los modelos no lineales hemos desarrollado un código algo más general que incluye términos no lineales (polinómicos o no). En este caso, existen ciertos problemas de estabilidad del método variacional para núcleos con  $N \neq Z$  debidos a la magnitud del acoplo correspondiente al mesón  $\rho$ . La convergencia hacia la solución Hartree es lenta, con oscilaciones de gran amplitud.

Para evitar estos problemas el valor de la constante de acoplo  $g_\rho$  se incrementa suavemente en cada iteración desde cero hasta el valor elegido, momento en el que se realizan al menos 10 iteraciones adicionales. Se considera que se ha alcanzado la convergencia cuando la energía de ligadura no ha cambiado en más de 0.01 MeV y las energías de los niveles monoparticulares en 0.001 MeV. Las variaciones en el radio cuadrático medio y en los valores de los potenciales son entonces menores del 0.1%. La convergencia se alcanza normalmente antes de terminar las 10 iteraciones adicionales. El paso radial es de alrededor de 0.05 fm. El cálculo completo requiere típicamente de cinco a diez minutos.

### C.3 Extracción del factor espectroscópico

A partir de los datos experimentales se determina con un método de mínimos cuadrados compensado en errores [Brt76] el factor de escala ( $N$ ) necesario para ajustar el resultado teórico. Obtenemos el factor de escala y el *error estadístico* (tomado como una desviación estándar). En las figuras las barras de error de los datos experimentales incluyen exclusivamente el error estadístico (una desviación estándar). También se tabulan los valores

de  $M = \sum \frac{(y_{exp} - Ny_{th})^2}{(\Delta y_{exp})^2}$  dividido por el número de grados de libertad.

Esta cantidad sigue una distribución  $\chi^2$  con  $P-1$  grados de libertad, siendo  $P$  el número de puntos experimentales empleados en el ajuste. Un valor de  $M/g.d.l$  muy superior a dos es una indicación aproximada de un acuerdo pobre entre teoría y experimento. Por otro lado, como se ha comentado en el capítulo sexto, los factores de escala deducidos a partir de ajustes visuales suelen diferir bastante de los obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados, sobre todo cuando el ajuste no es bueno.

A la hora de tabular el error de los factores espectroscópicos deducidos no se ha incluido el error sistemático en los datos experimentales, ni la incertidumbre numérica asociada al cálculo teórico (alrededor del 2%). El

error sistemático en los datos aquí estudiados, todos obtenidos en NIKHEF-K, es un 3.0 % para  $^{208}\text{Pb}$ , 4.0 % para  $^{90}\text{Zr}$  y 2.8% para  $^{40}\text{Ca}$ , dentro de una desviación estándar [Lap92, KrB89, Qn88, Her88]. Estas cantidades deben añadirse linealmente al error estadístico del factor de escala.

Dado que los datos experimentales que aquí se usan están espaciados por igual, el ajuste da más peso a los puntos con menor error lo cual suele corresponder a los máximos de la sección eficaz. En algunos estudios anteriores basados en formalismos no relativistas [Ca89, Her88] también se ajusta un desplazamiento en el momento desaparecido  $P'$ , justificado en un tratamiento incompleto de la distorsión coulombiana o en el uso de potenciales ópticos inadecuados. Los valores en los máximos proporcionan relativamente poca información sobre dicho desplazamiento que es más sensible a los puntos obtenidos en la zona de máxima pendiente.

Hay que notar que en otros estudios también basados en formalismos no relativistas, el radio cuadrático medio de la función de ondas del nucleón ligado también interviene en el ajuste [Her88, Qn88].

En este trabajo, dado que la distorsión coulombiana se incluye de forma exacta, no se ha considerado como parámetro a ajustar ningún desplazamiento en el momento, ni tampoco el radio de la función de ondas del nucleón ligado. Por tanto, *sólo el factor de escala* interviene en los ajustes.

## Referencias

- [AbrS64] R. Abramowitz y I. A. Stegun (eds.) en “Handbook of Mathematical Functions” *Dover*, N. Y. (1964).
- [BD64] J.D. Björken and S.D. Drell, en “Relativistic Quantum Mechanics” *Mc Graw-Hil*, N.Y. (1964).
- [BB77] J. Boguta y A. R. Bodmer, *Nucl. Phys.* **A292** (1977) 413.
- [BrG77] P. J. Brussaard P. W. M. Glaudemans en “Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy”, *North-Holland Publishing*, Amsterdam (1977).
- [Brk78] R. Brockmann, *Phys. Rev.* **C18** (1978) 1510.
- [BrS67] D. M. Brink y G. R. Satchler en “Angular Momentum”, *Clarendon Press*, Oxford (1967).
- [Br76] S. Brandt en “Statistical and Computational Methods in Data Analysis”, *North-Holland*, Amsterdam (1976).
- [Bu92] H. J. Bulten, Ph. D. Thesis, Amsterdam (1992) (no publicada).
- [Ca89] J. A. Caballero en “Estudio de la Influencia de la Deformación Nuclear en el Proceso de Dispersión Cuasi-Elástica de Electrones por Núcleos”, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid  
J. A. Caballero, E. Moya de Guerra, *An. Fís.* **A84** (1988) 73.
- [CaDP92] J. A. Caballero, T. W. Donnelly y G. I. Poulis, *Nucl. Phys.* **A** *en prensa*.
- [Ca92] J. A. Caballero, *comunicación privada*.
- [Cm72] X. Campi y D. W. L. Sprung, *Nucl. Phys.* **A194** (1972) 401.
- [Cl83] B.C. Clark *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **50**, (1983) 1644.
- [Co87] E. D. Cooper *et al.*, *Phys. Rev.* **C36**, (1987) 2170.
- [CheO79] D. C. Cheng y G. K. O’Neill en “Elementary Particle Physics, An Introduction”, *Addison Wesley*, Massachusetts (1979).
- [DeaW83] M. Deady *et al.*, *Phys. Rev.* **C28** (1983) 631.
- [Fes92] H. Feshbach en “Theoretical Nuclear Physics: Nuclear Reactions”, *John Wiley and Sons*, New York (1992).
- [dFor83] T. de Forest, Jr., *Nucl. Phys.* **A392** (1983) 232.
- [dFor84] T. de Forest Jr., *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 895.
- [DieF74] A. E. L. Dieperink y T. de Forest, Jr., *Phys. Rev. C* **10** (1974) 543.
- [FrM85] S. Frullani y J. Mougey, *Adv. Nuc. Phys.* **14** (1985) 1.
- [FW50] L. L. Foldy y S. A. Wouthuysen *Phys. Rev.* **78** (1950) 29.
- [dFW66] T. de Forest y J. D. Walecka, *Adv. Phys.* **15** (1966) 1.
- [GaRM91] E. Garrido, E. Ruiz Morales y E. Moya de Guerra, *An. Fís.* **A87** (1991) 60.
- [GiuP87] C. Giusti y F. Pacati, *Nucl. Phys.* **A473** (1987) 717., **A485** (1988) 461.
- [GRT90] Y. K. Gambhir, P. Ring y A. Thimet, *Ann. Phys.* **198** (1990) 132.
- [GrO70] W. W. Gargaro y D. S. Onley, *J. Mat. Phys.* **11** (1970) 1191.
- [Gr28] W. Gordon, *Z. Phys.* **50** (1928) 630.
- [Her88] J. W. A. den Herder, Ph. D. Thesis (Amsterdam) (1988).  
J. W. A. den Herder *et al.*, *Nucl. Phys.* **A490** (1988) 507.  
H. B. M. Raben *et al.*, *en prensa*
- [HCCM92] S. Hama, E. D. Cooper, B. C. Clark y R. L. Mercer, en “Global Dirac Phenomenology for Proton-Nucleus Elastic Scattering”, Ohio State University, *preprint* Agosto 1992.
- [Hm90] S. Hama *et al.*, *Phys. Rev.* **C41**, (1990) 2737.

- [Hl81] K. Holinde, *Phys. Rep.* **68**, (1981) 122.
- [Hl88] R. D. Heil *et al.*, *Nucl. Phys.* **A476** (1988) 39.
- [HMS91] C. J. Horowitz, D. P. Murdock y B. D. Serot en “Computational Nuclear Physics”, Eds. K. Langanke, J. A. Marnhn y S. E. Koonin, *Springer-Verlag*, Berlín, (1991) 129.
- [HS81] C. J. Horowitz y B. D. Serot, *Nucl. Phys.* **A368** (1981) 503.  
B. D. Serot, *Phys. Lett.* **B86** (1979) 146.
- [HsB83] J. Heisenberg y H. P. Blok, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **33** (1983) 569.  
G. Co y J. Heisenberg, *Phys. Lett.* **B197**(4) (1987).
- [JnO92] Y. Jin, D. S. Onley y L. E. Wright, *Phys. Rev.* **C45** (1992) 1311.
- [Jn91] Y. Jin, Ph. D. Thesis, Ohio University (1991).
- [Kn71] J. Knoll, Ph. D. Thesis, Heidelberg (1971) (no publicada).
- [KrB89] G. J. Kramer, *Phys. Lett.* **B227** (1989) 199.
- [Lap92] L. Lapikás, *comunicación privada*.
- [McD90] J. P. McDermott, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1991.
- [McD91] J. P. McDermott, *comunicación privada*
- [McVH62] K. V. McVoy and L. van Hove, *Phys. Rev.* **125** (1962) 1034.
- [MezB84] Z. E. Meziani *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 2130.
- [Mo84] E. Moya de Guerra, *An. de Fís.* **80** (1984) 32.
- [Mo86] E. Moya de Guerra, *Phys. Rep.* **138** (1986) 293.
- [Mou76] J. Mougey *et al.*, *Nucl. Phys.* **A262** (1976) 461.
- [Mul90] P.J. Mulders, *Phys. Rep.* **185** (1990) 83.
- [MSU87] E. Moya de Guerra, P. Sarriguren y J. M. Udías, *Phys. Lett.* **B196** (1987) 409.

- [RUPM90] J. Retamosa, J. M. Udías, A. Poves y E. Moya de Guerra, *Nucl. Phys.* **A511** (1990) 221.
- [Mzb61] E. Mezbacher en “Quantum Mechanics”, *John Wiley and Sons*, New York, (1961).
- [Na90] H. W. L. Naus *et al.*, *Nucl. Phys.* **A509** (1990) 717.
- [NFSM92] R. Nojarov, A. Faessler, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra y M. Grigorescu, *Nucl. Phys. A*, (*en prensa*).
- [NMS85] M. Nishimura, E. Moya de Guerra y D. W. L. Sprung, *Nucl. Phys.* **A435** (1985) 523.
- [PanPW84] V. R. Pandharipande, C. N. Papanicolas y J. Wambac, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1133.
- [PckOW85] A. Picklesimer, J. W. Van Orden y S. J. Wallace, *Phys. Rev.* **C32** (1985) 1312.  
A. Picklesimer y J. W. Van Orden, *Phys. Rev.* **C40** (1989) 290.
- [Pry48] M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc.* **A195** (1948) 62.
- [Qn88] E. N. M. Quint, Ph. D. Thesis, Amsterdam (1988) (no publicado).
- [RPD90] A. Ramos, A. Polls y W. H. Dickoff en “The Nuclear Equation of State: Part A”. Ed. W. Greiner y H. Stöcker, *Plenum Press*, New York (1990) 615.
- [Ro61] M. E. Rose en “Relativistic Electron Theory”, *Wiley* (1961).
- [Rn86] P.-G. Reinhard *et al.*, *Z. Phys.* **A323** (1986) 13.
- [Rn88] P.-G. Reinhard, *Z. Phys.* **A329** (1988) 257.
- [Rsnb50] M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* **79** (1950) 615.
- [ShRN86] J. R. Shepard, E. Rost y J. A. McNeil, *Phys. Rev.* **C33** (1986) 634.
- [St91] G. van der Steenhoven, *Nucl. Phys.* **A527** (1991) 17.
- [SeW86] B. D. Serot y J. D. Walecka, *Adv. Nuc. Phys.* **16** (1986) 1.

- [TTZ88] H. Traini, S. Turck-Chière y A. Zghiche, *Phys. Rev.* **C38** (1988) 2799.  
J. Knoll, *Nucl. Phys.* **A223** (1974) 262.
- [Üb71] H. Überall en “Electron Scattering from Complex Nuclei”, *Academic Press*, New York (1971).
- [Ud89] J. M. Udías, en “Efectos de la Distorsión Coulombiana en Dispersión Magnética de Electrones”, Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de Madrid (1989).
- [VBr72] D. Vautherin y D. M. Brink, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 626.
- [ViA71] R. D. Viollier y K. Adler, *Helv. Phys. Acta.* **44** (1971) 77.
- [dVrJ87] H. de Vries, C. W. de Jaeger y C. de Vries, *At. Nuc. Data Tab.* **36** (1987) 495.
- [Wa74] J. D. Walecka, *An. of Phys.* **83** (1974) 491.
- [Wa84] J. D. Walecka en “Electron Scattering”, Argonne Lectures, **ANL-83-50** (1984).
- [Yn54] D. R. Yennie, *Phys. Rev.* **95** (1954) 500.
- [ZaO86] F. Zamani-Noor, D. S. Onley, *Phys. Rev.* **C33** (1986) 1354.
- [Zg67] J. F. Ziegler en “The Calculation of Inelastic Electron Scattering by Nuclei”, **YALE-2726E-49**, Yale University, New Haven (1967).