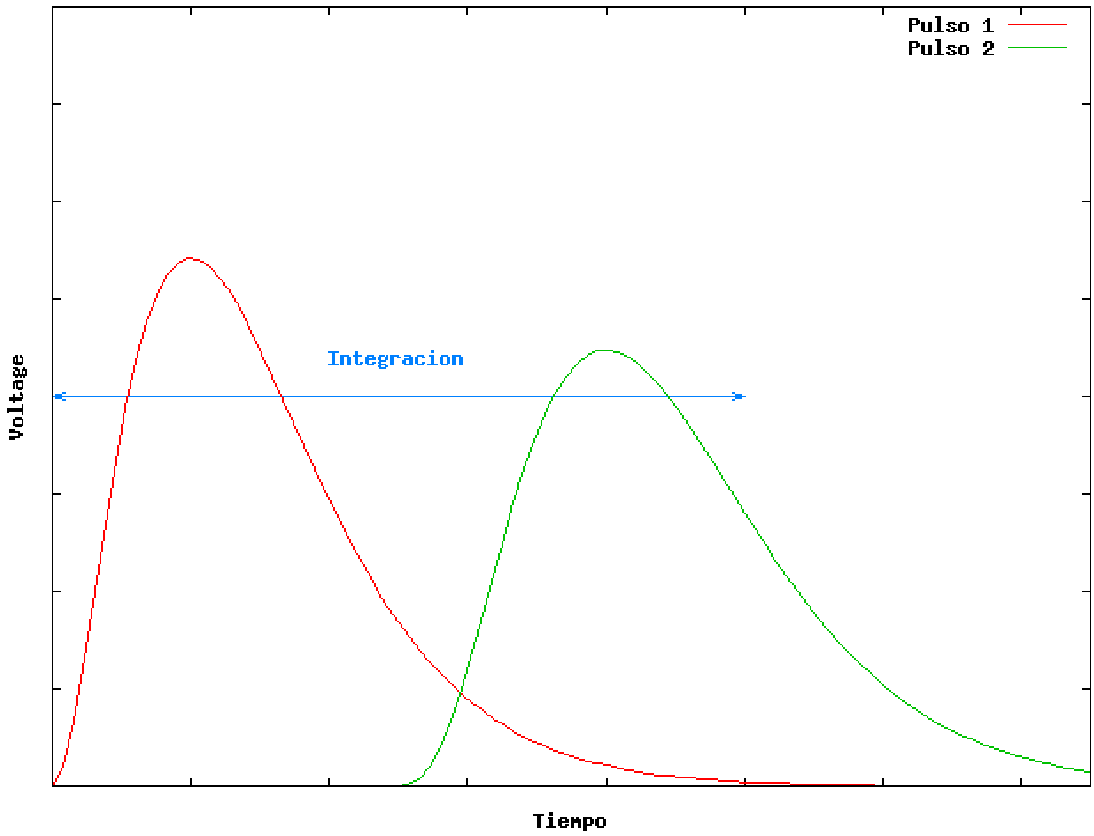
SOBRE CÓMO ESTIMAR EL NÚMERO DE COINCIDENCIAS QUE SUFREN APILAMIENTO Y LA FRACCIÓN DE ELLAS QUE SE PIERDEN PARA UNA DETERMINADA VENTANA DE ENERGÍA

Coincidencia con apilamiento: es la coincidencia en la que al menos uno de los singles que la componen estuvo afectado en el proceso de integración por dos o más fotones cumpliendo que los dos fotones que produjeron sendos disparos en los detectores se correspondan con los dos fotones de aniquilación del mismo par electrón-positrón.



El apilamiento supone dos problemas en PET:

- Desconocimiento de la energía real depositada por el fotón que provoca el disparo. Esto da lugar a la pérdida de coincidencias por superar el límite superior de la ventana de energía y la a inclusión de coincidencias que por existir apilamiento superan el umbral inferior de la ventana de energía, aumentando el número de coincidencias de scatter.
- Mal posicionamiento de la interacción debido a que la lógica de Anger mezcla la información de los distintos pulsos para la obtención del centroide.

Para que un single sufra apilamiento, los pulsos de dos o más fotones detectados en el mismo detector deben coincidir parcial o totalmente en el tiempo que dura la integración. Para poder estimar la probabilidad de que ocurra un suceso de este tipo hacemos el siguiente razonamiento. Supongamos que en un instante t tenemos un fotón que llega a un detector, provoca un disparo y se procede a su integración durante un tiempo T_{int}. Para que se produzca apilamiento, al menos otro fotón debe alcanzar el detector dentro del intervalo $[t-T_{int}, t+T_{int}]$. La probabilidad de que esto ocurra sigue una distribución de Poisson ya que la media es mucho menor que 20 como se explica en la página 20 del Knoll (ver figura 1)

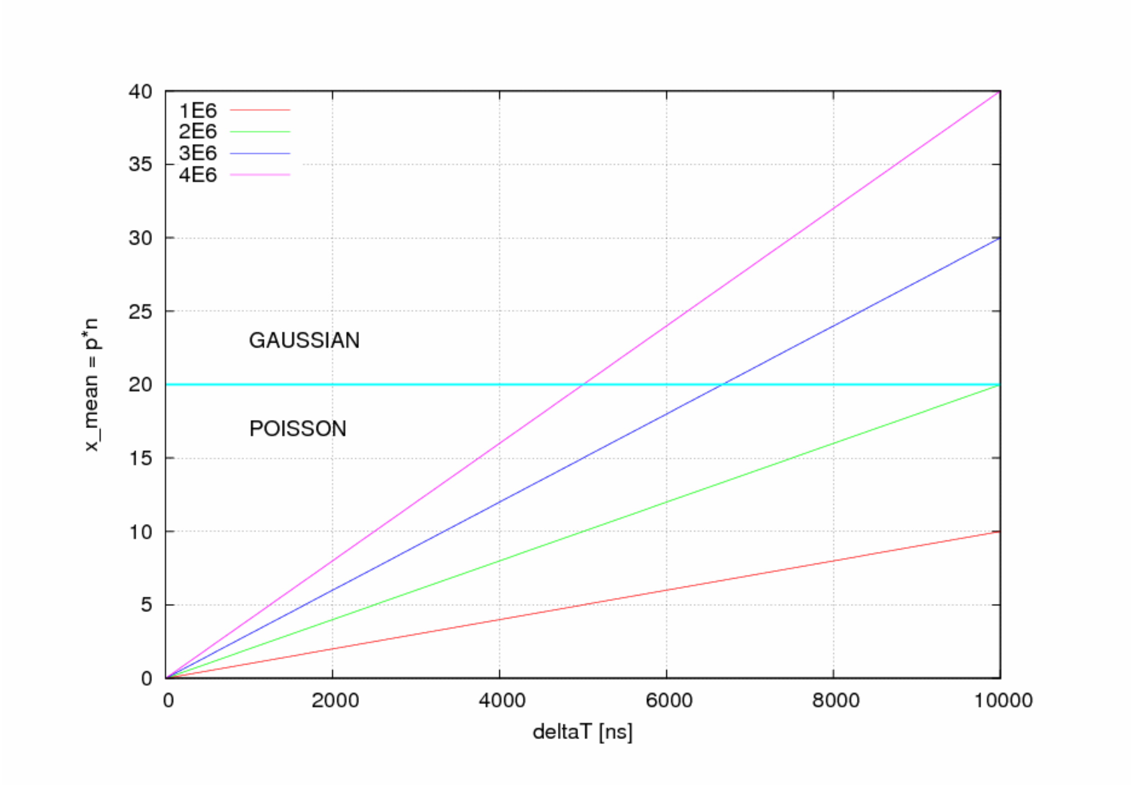


Figura 1: valor de la media frente a tiempo durante el cual pueden coincidir los fotones para diversos valores de tasa de singles medidos.

Queremos calcular la probabilidad de que para un evento ocurrido en t, haya otro que ocurra en el intervalo dt a un tiempo T del anterior. Para esto debe suceder que durante un tiempo T no haya ningún otro evento y sí que lo haya en el intervalo dt inmediatamente posterior.

Distribución de Poisson $\quad P(x) = \dfrac{\overline{x}^{x} e^{-\overline{x}}}{x!}$

donde $\overline{x}$ es la media y x es el número de sucesos ocurridos

La media de la distribución es $\overline{x} = pn = (\Delta T \lambda \varepsilon_{\text{single}}) \cdot (N) = s\Delta T$

donde p es la probabilidad de detectar un fotón y n el número de intentos. En este caso el número de intentos es el número de núcleos radioactivos en el objeto y la probabilidad es una combinación de la constante de decaimiento (λ) que expresa la probabilidad de desintegración de un núcleo por unidad de tiempo, $\varepsilon_{\text{single}}$ que es la eficiencia de detección para un fotón emitido en cualquier dirección y ΔT que es el tiempo durante el cuál se espera que ocurra el suceso. La combinación de todo menos el tiempo nos da la tasa de singles sin tiempo muerto medidos por el detector (s), cuyo valor puede ser medido y que utilizamos para el cálculo de las probabilidades.

Ningún evento en T $\quad P(0) = \dfrac{(sT)^{0} e^{-sT}}{0!} = e^{-sT}$

Algún evento en dT $\quad 1 - e^{-sdT} \approx sdT$

Ninguno en T y alguno en dT $\quad e^{-sT} \cdot sdT$

En el caso que nos ocupa la tasa de singles primarios y secundarios es la misma puesto que se trata del mismo detector. Por tanto, la tasa diferencial de singles con apilamiento (a) viene dada por

$$a = e^{-sT} \cdot s^{2} dT$$

Según podemos ver en la figura 2, el valor de la exponencial es muy próximo a uno para el caso de coincidencias aleatorias puesto que la ventana de coincidencias es muy pequeña (5-10 ns). En el caso que nos ocupa el tiempo de integración suele estar entre 100 y 1000 ns de manera que esta exponencial no tiene un valor próximo a uno para tasas de singles por detector habituales ((50-1000)x10^3 s^{-1}). Para el caso de coincidencias aleatorias la tasa de singles entre un detector y todos los que están en coincidencia con él no tiene por qué coincidir por lo que la distribución diferencial de coincidencia aleatorias viene definida por

$$\frac{dr}{dT} = s_i s_j$$

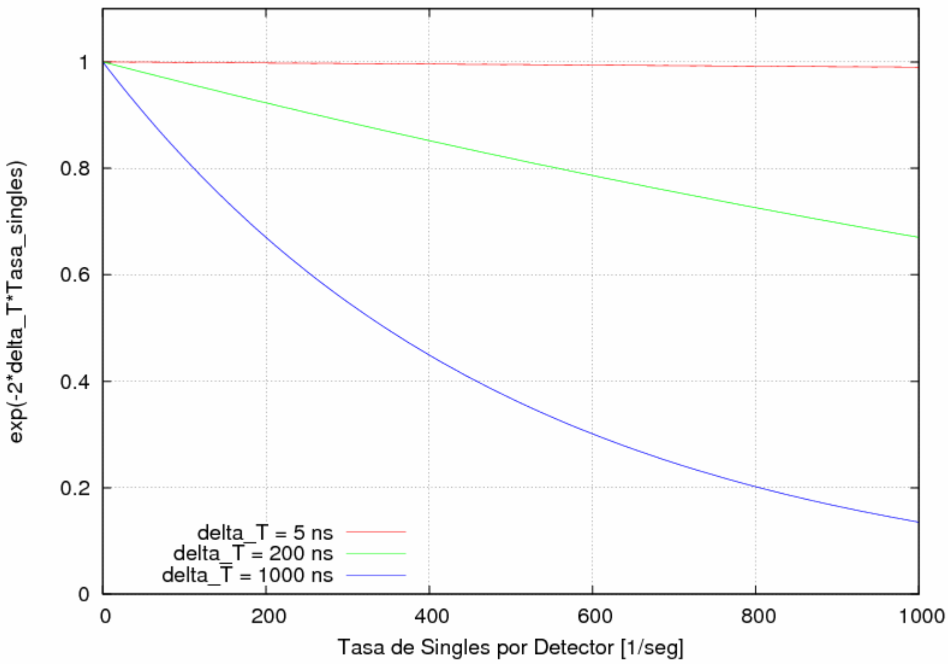


Figura 2: valor de exp(-sT) frente a la tasa de singles sin tiempo muerto medidos para diversos valore de T

Para el la tasa de singles con apilamiento tendremos la expresión

$$a = \int_0^{2T_{\text{int}}} s^2 e^{-Ts} dT = s\left(1 - e^{-2T_{\text{int}}s}\right)$$

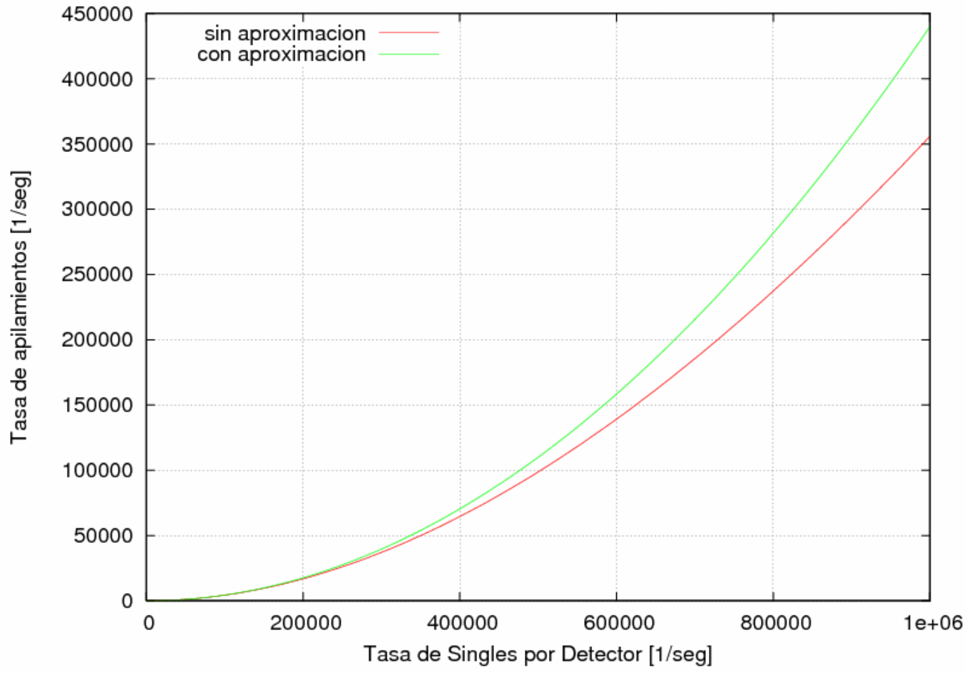


Figura 3: Estimación de la tasa de singles con apilamiento con y sin aproximación a uno de la exponencial para un tiempo de integración de 220 ns

El ratio entre la tasa con y sin aproximación se muestra en la figura 4 de manera que se ve el error de estimación que habría en el caso de usar la aproximación en la tasa de singles con apilamiento.

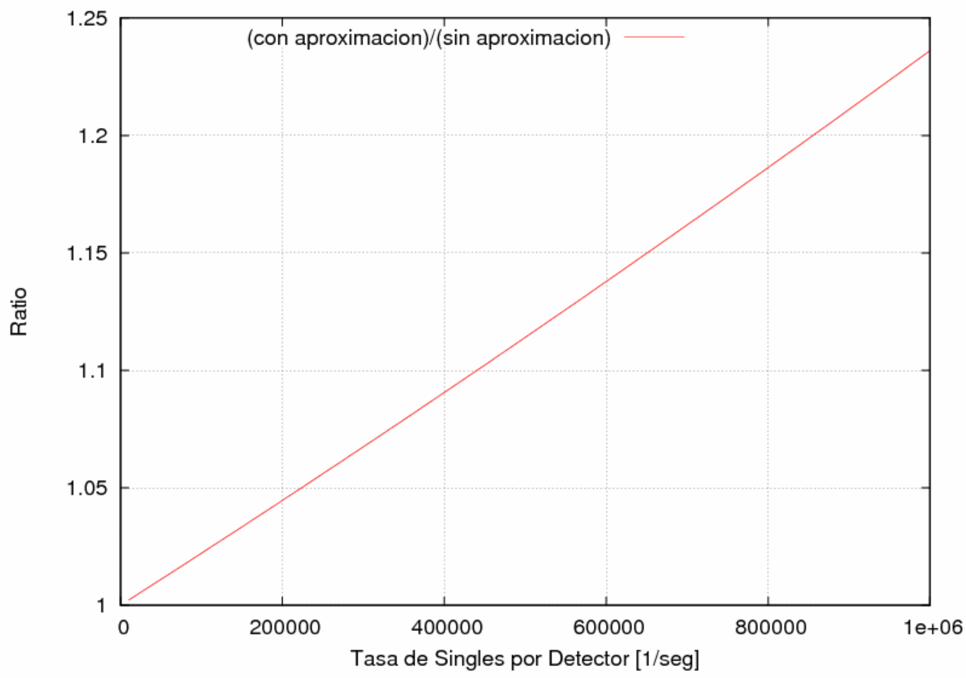


Figura 4: ratio entre la estimación de la tasa de singles con apilamiento con y sin aproximación a uno de la exponencial con un tiempo de integración de 220 ns.

Es importante aclarar en este punto que la tasa calculada es solo de singles que sufren apilamiento y no de coincidencias. Una coincidencia con apilamiento debe cumplir como ya hemos dicho que al menos uno de sus single haya sufrido apilamiento. La probabilidad de que ocurra esto para un par de detectores dados es

$$p_{ij} = p\left(apila_i \cup apila_j\right) = p\left(apila_i\right) + p\left(apila_j\right) - p\left(apila_i \cap apila_j\right) =$$

$$= \left(1 - e^{-2T_{\text{int}} s_i}\right) + \left(1 - e^{-2T_{\text{int}} s_j}\right) - \left(1 - e^{-2T_{\text{int}} s_i}\right)\left(1 - e^{-2T_{\text{int}} s_j}\right) = 1 - e^{-2T_{\text{int}}\left(s_i + s_j\right)}$$

donde la probabilidad de apilamiento en un detector viene definida como el cociente entre los singles con apilamiento y el total de singles

$$p\left(apila_i\right) = \frac{a_i}{r_i} = 1 - e^{-2T_{\text{int}} r_i}$$

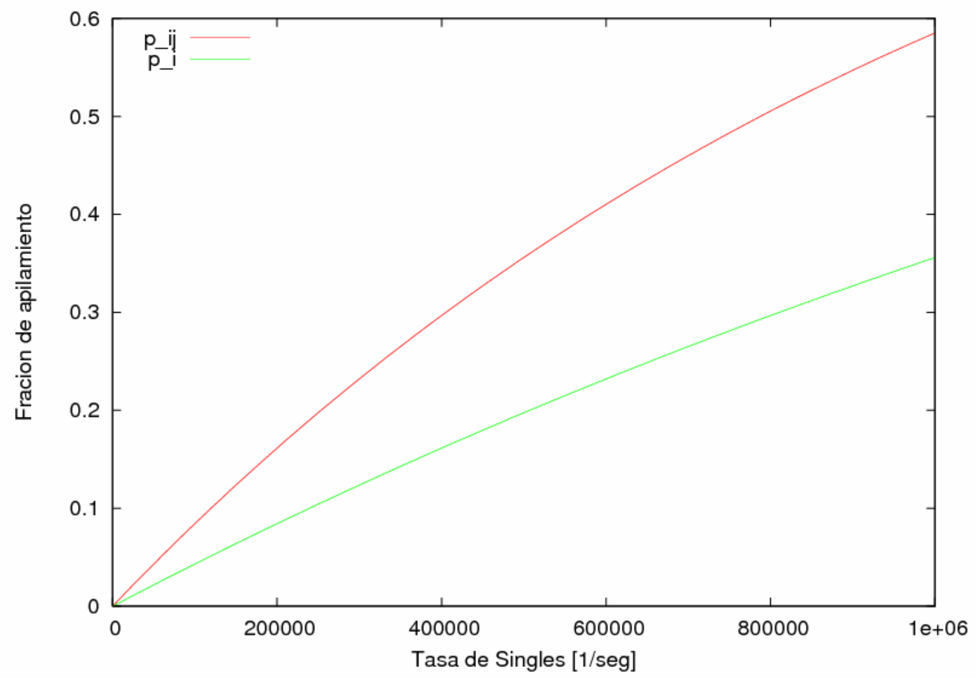


Figura 5: Tasa de singles y coincidencias con apilamiento frente a la tasa de singles para un tiempo de integración de 220 ns

En conclusión, si tenemos un cierto número de coincidencias y corregidas por tiempo muerto y con los randoms sustraidos entre dos detectores (c_{ij}), el número de ellas que están afectadas por apilamiento serán

$$c_{ij}^{apila} = c_{ij}\, p\left(apila_i \cup apila_j\right) = c_{ij}\left(1 - e^{-2T_{\text{int}}\left(s_i + s_j\right)}\right)$$

La expresión anterior nos da finalmente el número de coincidencias afectadas por apilamiento pero sin tener en cuenta en ningún momento la ventana de energía [E_{min}, E_{max}]. Por ejemplo, en el caso de las coincidencias aleatorias, la tasa de singles a utilizar debe ser contando únicamente los que se encuentran dentro de la ventana de energía utilizada en las coincidencias. En el caso del apilamiento la cosa se complica. La energía total dentro del intervalo de integración es la que debe en este caso estar dentro de la ventana de energía.

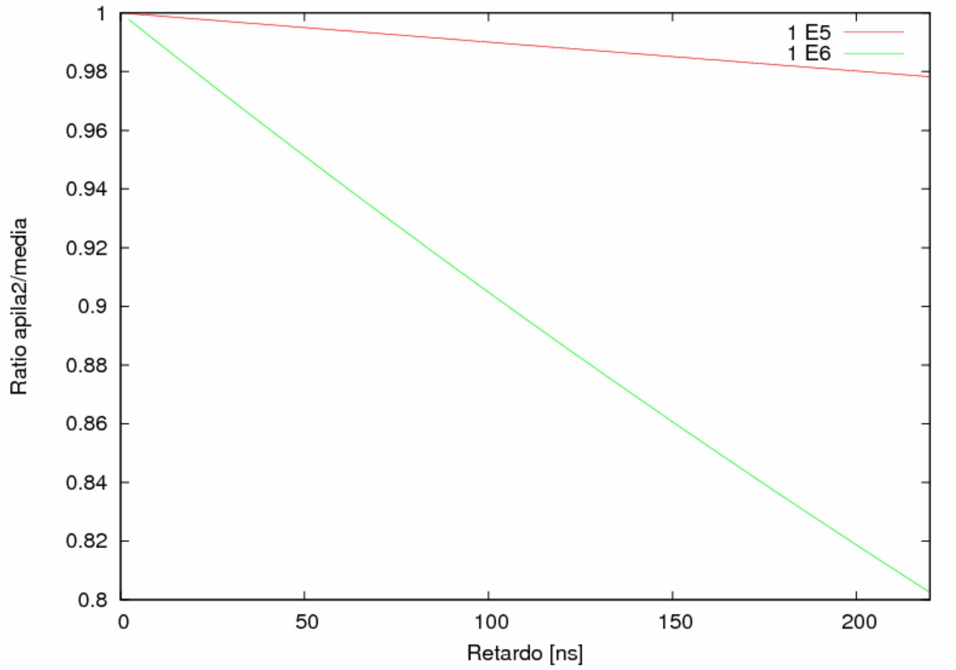


Figura 6: se muestra la fracción de singles con apilamiento que solo tiene dos pulsos apilados frente al retardo para diversas tasas de singles.

Supongamos que el apilamiento se produce entre dos pulsos (ver figura 6). El pulso que produce el disparo de coincidencia será integrado totalmente y el otro pulso parcialmente dependiendo de la separación temporal respecto al disparo. La distribución de probabilidad del primero será el espectro de energía normalizado de los singles detectados sin apilamiento

$$S(E)=\frac{espectro(E)}{\int_0^{E_{\max}} spectro(E)}$$

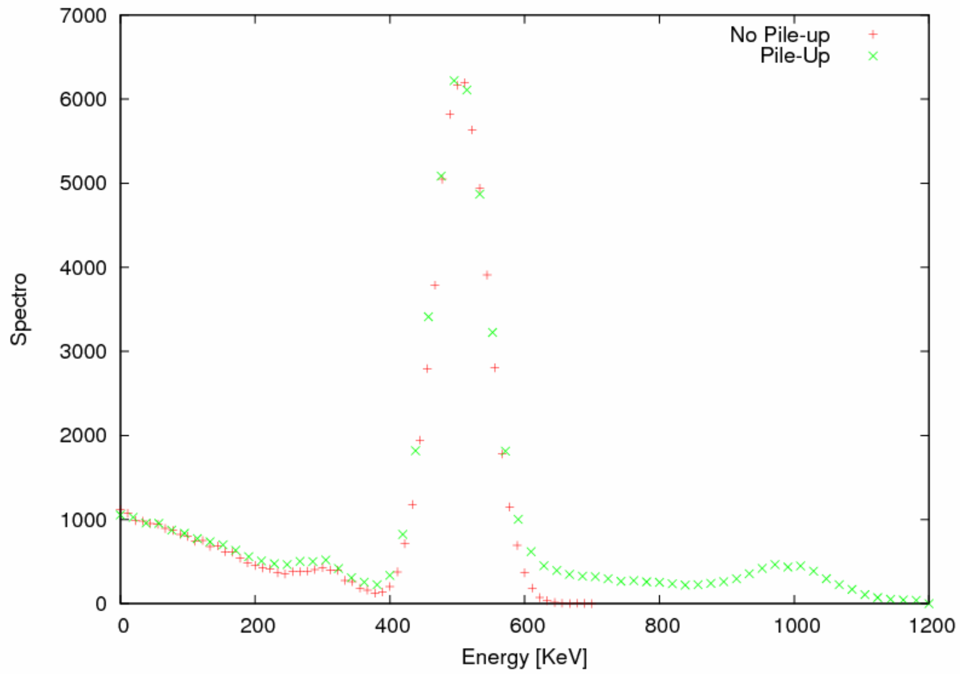


Figura 7: espectro de energía de los singles de coincidencias para un cilindro de 0,9 cm de diámetro en rPET simulado para baja (10^5 Bq) y alta ($4{\cdot}10^7$ Bq) actividad.

En el segundo caso, una vez que el single es de apilamiento, la distribución de retardos respecto al disparo es equiprobable. La ecuación del pulso registrado se expresa comúnmente como

$$Pulso(t) = \frac{e^{-t/\tau_{Fall}} - e^{-t/\tau_{Rise}}}{\tau_{Fall} - \tau_{Rise}}$$

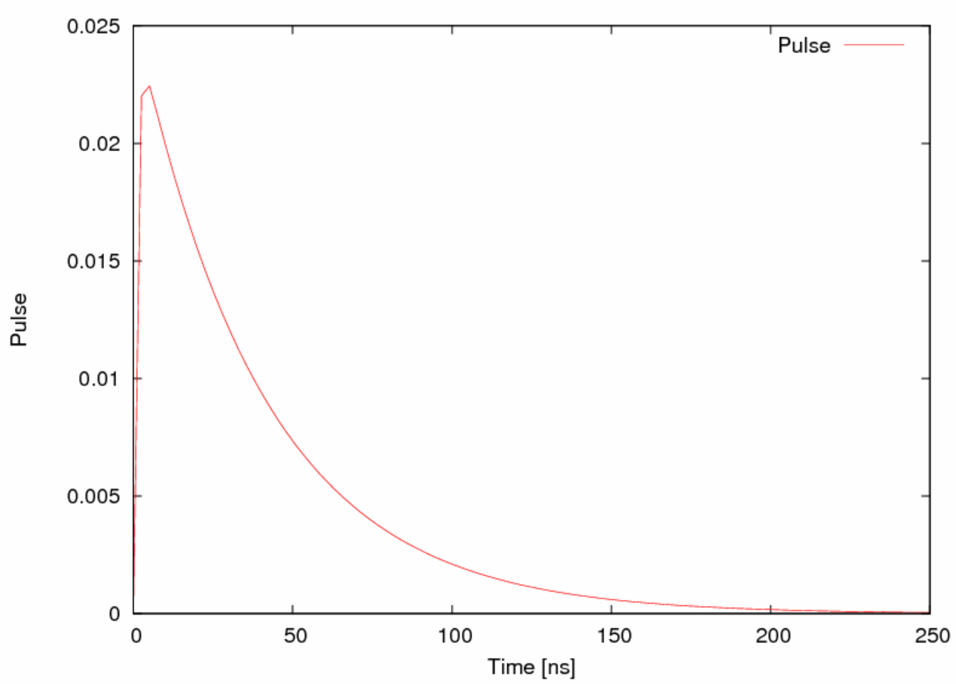


Figura 8: Pulso que se produce en el detector a la llegada de un fotón que deposita energía. T_{rise}=1 ns, T_{fall} = 40 sn

Para saber la fracción de energía integrada para cada retardo (T_0) tenemos la siguiente función.

$$F(T_0) = \int_{\max(T_0,0)}^{T_0+T_{\text{int}}} Pulso(t)\,dt = \left[\frac{\tau_{Rise}e^{-t/\tau_{Rise}} - \tau_{Fall}e^{-t/\tau_{Fall}}}{\tau_{Fall} - \tau_{Rise}}\right]_{\max(T_0,0)}^{T_0+T_{\text{int}}}$$

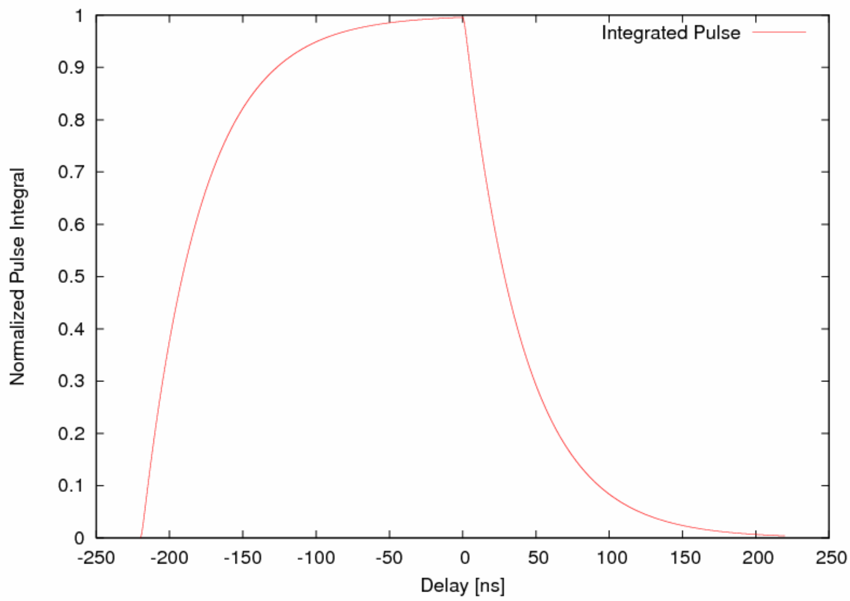


Figura 9: Fracción de energía que se integra del segundo fotón retardado frente al valor del retardo

Si ahora queremos saber para una determinada energía depositada en el detector por el fotón apilado, qué fracción de ellos quedarán fuera de la ventana de energía

$$\frac{\int_{\frac{E_{\min}}{E}<F(T_0)<\frac{E_{\max}}{E}} E\cdot F(T_0)dT_0}{\int_{-T_{\text{int}}}^{T_{\text{int}}} E\cdot F(T_0)dT_0}$$

Para la coincidencia debemos mezclar la información que tenemos de los dos fotones y hacer que cumplan la ventana de energía de manera simultanea. Para ello tenemos en cuenta todas las posibles energías que sumadas quedan dentro de la ventana resultado la siguiente expresión para la probabilidad total de que la energía de un single que tenga apilamiento este dentro de la ventana de energía.

$$p_{dentro}=\int_0^{E_{\max}} S(E')\left[\int_{E_{\min}-E'}^{E_{\max}-E'} S(E)\left(\frac{\int_{\frac{E_{\min}-E'}{E}<F(T_0)<\frac{E_{\max}-E'}{E}} E\cdot F(T_0)dT_0}{\int_{-T_{\text{int}}}^{T_{\text{int}}} E\cdot F(T_0)dT_0}\right)dE\right]dE'$$

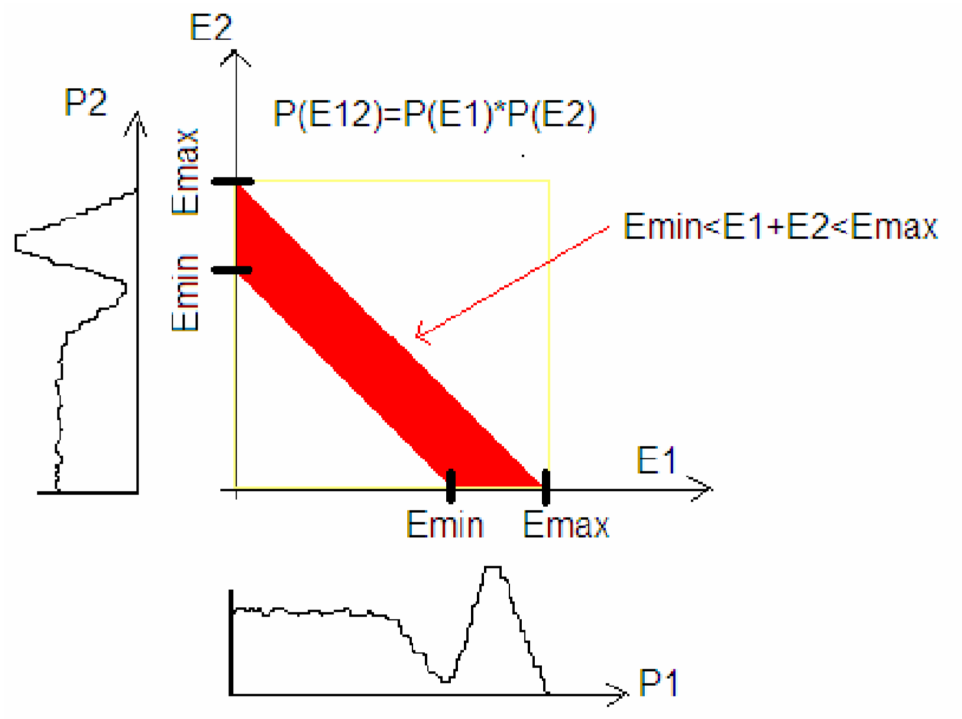


Figura 10: explicación visual de la condición que deben cumplir los dos fotones apilados para estar dentro de la ventana de energía.

La probabilidad de apilamiento dentro de la ventana queda

$$p\left(apila_i\right)_{dentro}=\frac{a_i}{r_i}p_{dentro}=\left(1-e^{-2T_{\text{int}}r_i}\right)p_{dentro}$$

y la probabilidad de coincidencias entre dos detectores con apilamiento dentro de la ventana

$$p_{ij\_dentro}$$

$$p_{ij\_dentro}=p\left(apila_{i\_dentro}\cup apila_{j\_dentro}\right)=p\left(apila_i\right)_{dentro}+p\left(apila_j\right)_{dentro}-$$

$$-p\left(apila_{i\_dentro}\cap apila_{j\_dentro}\right)=$$

$$=\left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_i}\right)p_{i\_dentro}+\left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_j}\right)p_{j\_dentro}-\left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_i}\right)\left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_j}\right)p_{i\_dentro}p_{j\_dentro}$$

con lo que el número de coincidencias con apilamiento dentro de la ventana

$$c_{ij}^{apila\_dentro}=c_{ij}p_{ij\_dentro}$$

El número de coincidencias que se han perdido por apilamiento será

$$c_{ij}^{apila\_fuera}=c_{ij}p_{ij\_fuera}$$

<u>donde</u>

$$p_{ij\_fuera} = p\left(apila_{i\_fuera} \cup apila_{j\_fuera}\right) = p\left(apila_i\right)_{fuera} + p\left(apila_j\right)_{fuera} -$$

$$-p\left(apila_{i\_fuera} \cap apila_{j\_fuera}\right) =$$

$$= \left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_i}\right)\left(1-p_{i\_dentro}\right) + \left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_j}\right)\left(1-p_{j\_dentro}\right) -$$

$$\left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_i}\right)\left(1-e^{-2T_{\text{int}}s_j}\right)\left(1-p_{i\_dentro}\right)\left(1-p_{j\_dentro}\right)$$