

CAOS CUÁNTICO Y FRACTALES

MEMORIA PRESENTADA PARA LA OBTENCIÓN DEL
DIPLOMA DE ESTUDIOS AVANZADOS.

Armando Relaño Pérez

Directores

D. José María Gómez Gómez
D. Joaquín Retamosa Granado

21 de junio de 2002

*... ya en un viejo cuento mío un abogado porteño
deploraba esa merma de la capacidad de admiración
que convierte a la gente en meros usuarios pasivos ...*

JULIO CORTÁZAR. Último Round.

Agradecimientos

La realización de una tesis doctoral no es tan sólo el modo de continuar aprendiendo, de conocer de verdad en qué consiste hacer ciencia, de imbuirse en el mundo de la investigación; es, sobre todo, un periodo de formación como persona, en el que al fin se deja atrás la dinámica de apuntes y exámenes para pasar a realizar una labor más creativa y personal. Y es fundamentalmente en estos casi dos años que transcurren desde la matrícula en los cursos de doctorado hasta la presentación de esta memoria cuando todo eso se manifiesta de una manera más directa; cuando se plasman las bases de lo que será la futura tesis y lo que pudiere venir a continuación. Por ello, el ambiente general de trabajo y, en especial, la relación con quienes se encargan de dirigirlo, es, seguramente, la parte más importante de todas las que intervienen en el proceso. Este epígrafe de agradecimientos no es, por lo tanto, una simple obligación dentro del protocolo habitual en este tipo de trabajos; es, al contrario, el lugar donde queda patente todo lo que confluye y todo lo que da lugar a esta memoria y a la futura tesis doctoral.

En primer lugar, quiero agradecer a los directores de este trabajo, José María Gómez y Joaquín Retamosa, todo lo que han hecho, no solamente en lo que se refiere a mi formación como futuro científico, sino también en todo lo que respecta a mi inclusión como persona dentro del grupo de investigación. A ese respecto quiero resaltar en especial toda la confianza que han depositado en mí desde el principio: esa confianza es la que me ha animado a seguir adelante en todo momento y la que ha hecho posible la obtención de todos los resultados que se presentan en esta memoria.

Prácticamente en los mismos términos quiero manifestar también mi agradecimiento a Eduardo Faleiro que, a pesar de no pertenecer nominalmente a este departamento, ha sido parte fundamental en estos casi dos años: a él le debo la primera idea que condujo al principal resultado que se presenta en esta memoria.

Otra persona que ha contribuido especialmente a la realización de este trabajo y a mi inclusión como miembro del grupo de investigación es Rafa. Él ha colaborado directamente en casi todo lo que he realizado en estos dos años y es aún, a pesar de haberse ya doctorado y estar ahora a unos cuantos kilómetros de aquí, parte importante de futuros proyectos y de ideas que todavía no se han llevado a la

práctica.

Además de todos los anteriores, han sido y son también parte fundamental en todo lo relacionado con esta memoria, sobre todo en la importante cuestión del ambiente de trabajo, el resto de los miembros del Grupo de Física Nuclear: José Manuel, que, a pesar de llevar una línea de investigación diferente, ha participado en algunas de nuestras discusiones y ha estado siempre dispuesto a solucionar cualquier problema, sobre todo esas pesadillas informáticas para las que no parecía haber despertador; Javi, compañero de despacho desde el primer día y el primero en concienciarme de mi nueva situación de becario-precario; César, también compañero de despacho, de cafés, de conversaciones y de algunas novedades propias de este periodo; Laura, un poco más recién llegada, pero igualmente partícipe del magnífico ambiente de trabajo; y Raquel, que, aunque habitante de las tierras del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, ha participado también en cafés, conversaciones y novedades.

Por último, quiero mencionar a todos los que han compartido el día a día conmigo durante estos casi dos años y que han puesto también su granito de arena para esta memoria; entre ellos quiero destacar a Saúl que, por su igual condición de becario-precario, ha mantenido conmigo interesantes discusiones que tal vez se plasmen algún día en una revolucionaria e interdisciplinar contribución a la física.

Índice General

| | |
|--|-----------|
| Cita | i |
| Agradecimientos | iii |
| Índice general | v |
| Índice de figuras | vii |
| Índice de tablas | ix |
| 1 Introducción. | 1 |
| 2 Fractales y multifractales. | 5 |
| 2.1 Introducción: azar benigno y azar salvaje. | 5 |
| 2.2 Dimensión fractal. | 10 |
| 2.3 Fractales y series temporales. | 16 |
| 2.3.1 Análisis de Hurst. | 16 |
| 2.3.2 Movimiento browniano fraccionario. | 18 |
| 2.3.3 La densidad espectral. | 20 |
| 2.3.4 El ruido $1/f$ | 27 |
| 2.4 Multifractales. | 31 |
| 2.4.1 Multifractales y series temporales. | 37 |
| 3 Caos cuántico. | 41 |
| 3.1 Conceptos básicos asociados al caos cuántico. | 41 |
| 3.1.1 Caos y mecánica clásica. | 41 |
| 3.1.2 Caos y mecánica cuántica. | 44 |
| 3.1.3 Caos y fluctuaciones en el espectro de energías. | 45 |
| 3.2 La teoría de las matrices aleatorias. | 47 |
| 3.2.1 Análisis espectrales. | 50 |
| 3.3 El procedimiento de reescalado. | 52 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Caos cuántico y fractales. | 57 |
| 4.1 | La secuencia de espaciamentos como una serie temporal. | 58 |
| 4.2 | Estudio de matrices GOE, GUE, GSE y GDE. | 60 |
| 4.2.1 | Cálculo de los autovalores. | 60 |
| 4.2.2 | Método de reescalado. | 62 |
| 4.2.3 | Estudio de la función δ_n | 62 |
| 4.3 | Estudio de un núcleo atómico: el ^{24}Mg | 66 |
| 4.3.1 | Cálculo del espectro: modelo de capas. | 66 |
| 4.3.2 | Método de reescalado. | 68 |
| 4.3.3 | Estudio de la función δ_n | 68 |
| 4.4 | Estudio del billar de Sinai. | 73 |
| 4.4.1 | Cálculo del espectro. | 74 |
| 4.4.2 | Método de reescalado. | 75 |
| 4.4.3 | Estudio de la función δ_n | 76 |
| 4.5 | Caos cuántico y ruido $1/f$. Análisis de los resultados. | 80 |
| 4.5.1 | Análisis multifractal de los espectros. | 81 |
| 4.5.2 | Comparación con otros sistemas. | 85 |
| 5 | Conclusiones. | 91 |
| A | Análisis de Fourier para procesos estocásticos. | 95 |
| A.1 | Aplicación al análisis de series temporales. | 98 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Secuencia de 4096 variables aleatorias independientes. | 8 |
| 2.2 | Secuencia temporal autosimilar. | 9 |
| 2.3 | <i>Power spectrum</i> de las señales anteriores | 10 |
| 2.4 | Curva de Koch. | 15 |
| 2.5 | Movimiento browniano fraccionario. | 21 |
| 2.6 | Señales con densidad espectral que se indica. | 24 |
| 2.7 | Análisis R/S para señales con <i>power spectrum</i> $P(\omega) \propto \omega^\alpha$ | 25 |
| 2.8 | Análisis R/S para señal con <i>power spectrum</i> $P(\omega) \propto \omega^{1.2}$ | 25 |
| 2.9 | Análisis <i>R/S</i> sobre azar salvaje. | 28 |
| 2.10 | Análisis de hurst para ruidos $1/f$ generados según (2.34). | 29 |
| 2.11 | Señales que verifican (2.31); escala doble logarítmica. | 30 |
| 2.12 | Señales que verifican (2.31); <i>SD</i> vs. $\log(n)$ | 30 |
| 2.13 | Proceso binomial multiplicativo. | 33 |
| 3.1 | Reescalado con polinomios de Chebyshev a orden k | 55 |
| 4.1 | Función δ_n para una matriz de cada colectividad | 63 |
| 4.2 | <i>Power spectrum</i> para las colectividades GDE, GOE, GUE y GSE. | 65 |
| 4.3 | Función δ_n para el ^{24}Mg | 70 |
| 4.4 | <i>Power spectrum</i> de la función δ_n para el ^{24}Mg | 71 |
| 4.5 | <i>Power spectrum</i> ^{24}Mg , subconjuntos $L = 256$ | 72 |
| 4.6 | <i>Power spectrum</i> ^{24}Mg , subconjuntos $L = 512$ | 73 |
| 4.7 | Representaciones del billar de Sinai: (a) Como el movimiento de una partícula en un toro con un disco reflectante. (b) Como el movimiento en un cuadrado unidad con condiciones de contorno periódicas y un disco reflectante en el centro; se muestran algunas trayectorias. (c) Como un movimiento libre entre discos reflectantes en puntos de una red cuadrada; se muestran órbitas cerradas (α) y abiertas (β). (d) Como un movimiento geodésico en un toro doble plegado a lo largo de una línea de curvatura gaussiana negativa e infinita. | 74 |
| 4.8 | Función δ_n para el billar de Sinai. | 77 |
| 4.9 | Densidad espectral de la función δ_n para el billar de Sinai. | 78 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.10 | <i>Power spectrum</i> del billar de Sinai; subconjuntos $L = 256$ | 79 |
| 4.11 | <i>Power spectrum</i> del billar de Sinai; subconjuntos $L = 512$ | 80 |
| 4.12 | Estimación del parámetro de Hurst para una matriz GOE. | 82 |
| 4.13 | Estimación del parámetro de Hurst para el espectro $J = 4$ del ^{24}Mg | 82 |
| 4.14 | Estimación del parámetro de hurst para el billar de Sinai con $R = 2$ | 83 |
| 4.15 | Espectro multifractal para una matriz GOE. | 84 |
| 4.16 | Espectro multifractal para el espectro $J = 4$ del ^{24}Mg | 84 |
| 4.17 | Espectro multifractal para el billar de Sinai con $R = 2$ | 84 |
| 4.18 | Señal intermitente. | 86 |
| 4.19 | <i>Power spectrum medio</i> para señal intermitente. | 87 |
| 4.20 | Estimación del parámetro de hurst para 100 matrices GOE. | 87 |
| 4.21 | Estimación del parámetro de hurst para 100 ruidos $1/f$ | 88 |
| 4.22 | Estimación del parámetro de hurst para 100 señales intermitentes. | 88 |
| 4.23 | Espectro multifractal para 100 matrices GOE. | 89 |
| 4.24 | Espectro multifractal para 100 ruidos $1/f$ | 89 |
| 4.25 | Espectro multifractal para 100 señales intermitentes. | 90 |
| A.1 | Secuencia temporal autosimilar. | 99 |

Índice de Tablas

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Valores del parámetro α para GDE, GOE, GUE y GSE. | 65 |
| 4.2 | Valores de J y dimensión de cada caja para el ^{24}Mg | 67 |
| 4.3 | Valores de α para los distintos J del ^{24}Mg | 69 |
| 4.4 | Valores de R y longitud de cada espectro en el billar de Sinai. | 76 |
| 4.5 | Valor del exponente α para cada R en el billar de Sinai. | 79 |
| 4.6 | Estimación del parámetro de Hurst. | 83 |
| 4.7 | Estimación del parámetro de Hurst. | 88 |

Capítulo 1

Introducción.

El estudio del caos en sistemas dinámicos clásicos es una disciplina muy bien asentada y muy útil de cara a describir y predecir fenómenos de toda clase, desde sistemas físicos relativamente sencillos hasta sistemas biológicos o incluso sociales de gran complejidad. Esta ubicuidad ha hecho que su estudio pueda abordarse de muy diversas formas, desde el formalismo matemático riguroso de gran complejidad hasta la visión cualitativa o semicuantitativa de los estudios relacionados con ciencias tradicionalmente tan poco matemáticas como la sociología. Desde ese punto de vista, la teoría fractal es algo así como un punto intermedio o un vínculo entre esas dos diferentes visiones: por un lado permite caracterizar la complejidad de una manera relativamente sencilla, haciendo referencia a objetos cotidianos o a formas geométricas de gran belleza visual; por otro, su base matemática es también compleja e interesante, hasta el punto de no existir hoy en día una definición precisa de lo que es un fractal.

La relación entre caos y fractales es muy interesante porque se ha mostrado muy fructífera a la hora de encontrar un orden en la complejidad; desde el estudio de la turbulencia en fluidos o plasmas, hasta la caracterización de las cascadas de rayos cósmicos que llegan a la Tierra, la teoría fractal sirve para sistematizar el estudio de señales muy complicadas, en las cuales no parece haber más que desorden, en función de unos pocos parámetros sencillos y significativos. Esto es así hasta tal punto que hoy en día es fácil encontrar referencias a la teoría del caos y a los fractales en disciplinas *de letras*. Por ejemplo, durante el tiempo que he estado trabajando en esta memoria pasó por mis manos un estudio que vinculaba la teoría del caos (efecto mariposa, sensibilidad a condiciones iniciales...) con el estilo narrativo de una novela¹.

¹La novela en cuestión es *La Ciudad Ausente*, del escritor contemporáneo argentino Ricardo Piglia. Desafortunadamente no parece posible encontrar una edición de la citada novela en este país, por lo que no he podido comprobar si esa *teoría* tiene algún tipo de fundamento o si es simplemente un juego literario adecuado nada más que para justificar una tesis.

El estudio del caos cuántico, disciplina en la que se centra este trabajo, no está, en cambio, tan bien asentado. Es cierto que a día de hoy hay muchos resultados que permiten llevar a cabo un estudio serio y sistemático, pero también lo es que hay al respecto una gran controversia y que muchos autores ni siquiera aceptan la existencia de algo a la manera del caos en mecánica cuántica. Su estudio, en cualquier caso, se lleva a cabo desde un punto de vista muy diferente al caos en mecánica clásica, a pesar de partir de él para definir lo que se ha dado en llamar *caos cuántico*. La herramienta principal para el estudio del caos cuántico es la teoría de matrices aleatorias, cuyo campo de acción abarca únicamente a la mecánica cuántica²; sus características fundamentales no tienen nada que ver, por lo tanto, con las que definen el caos clásico.

En este trabajo se analizan las propiedades básicas del caos cuántico desde un punto de vista novedoso basado en la teoría fractal y multifractal. Se busca así establecer algún tipo de vinculación entre la fenomenología de los sistemas caóticos clásicos y cuánticos, y, sobre todo, proponer algunas características definitorias de los sistemas cuánticos caóticos, independientes de la teoría de matrices aleatorias. Teniendo en cuenta este punto de vista, la memoria que presentamos está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presentan las nociones fundamentales del formalismo fractal y multifractal. La exposición se ha realizado procurando evitar un rigor matemático excesivo, el cual tiende a ofuscar la interpretación física, que es lo más interesante de cara al objetivo que se persigue en este trabajo. En este mismo capítulo, además, se presentan algunos resultados novedosos referentes al ruido $1/f$, que es básico para todo lo que viene a continuación.

En el capítulo 3 se introduce la terminología fundamental del caos cuántico, haciendo especial hincapié en los resultados más importantes y en su vinculación con el caos en mecánica clásica. Asimismo, se presentan algunos resultados novedosos referentes al método de reescalado, que es un paso previo básico para poder realizar tanto los estudios que se proponen en este trabajo como los que se realizan habitualmente en esta disciplina.

El capítulo 4 es el núcleo del trabajo; en él se exponen los resultados principales referentes a la descripción del caos cuántico según el formalismo fractal/multifractal. Estos resultados conciernen al análisis de tres tipos de sistemas según los procedimientos expuestos en el capítulo 2 y que son: hamiltonianos de la teoría de matrices aleatorias, el núcleo atómico ^{24}Mg y el billar de Sinai; la contribución más importante es la relación que se ha obtenido entre los espectros de energías de los citados sistemas y el ruido $1/f$. A raíz de este resultado, y dada la ubicuidad del ruido $1/f$ en la naturaleza, se comparan a continuación los espectros de estos tres sistemas con

²Se conocen sistemas sin relación alguna con la mecánica cuántica y que se describen bien mediante esta teoría, pero aún no se tiene muy claro por qué.

otras series temporales, utilizando para ello herramientas como el análisis de Hurst y el formalismo multifractal. La conclusión que se obtiene es que los espectros de tres sistemas cuánticos en estudio, aún correspondientes a tipos diferentes de dinámica, poseen las mismas propiedades estadísticas, que son diferentes a la de ciertos sistemas clásicos caóticos, como aquellos que presentan intermitencia.

En el capítulo 5 se resumen las conclusiones más importantes de los capítulos anteriores, poniendo especial énfasis en los resultados del capítulo 4.

Por último, se adjunta un apéndice en el que se presentan con cierto rigor las bases matemáticas de la herramienta fundamental utilizada en el estudio de los espectros: el análisis de Fourier. Este último capítulo se presenta separado del cuerpo del trabajo porque es un poco más técnico, y su lectura, si bien recomendable, no es fundamental para comprender el contenido del resto de la memoria.

Capítulo 2

Fractales y multifractales.

2.1 Introducción: azar benigno y azar salvaje.

Hoy en día a nadie le resulta extraño oír hablar de azar o de fluctuaciones en un proceso físico, químico, biológico, o incluso social o económico. La gran complejidad de muchos de ellos imposibilita una descripción detallada e individual para cada uno en concreto; en su lugar, suelen utilizarse descripciones estadísticas en las que se supone que los detalles particulares no tienen gran importancia. La base de el éxito de este tipo de modelos está en el gran avance de la teoría de la probabilidad durante el siglo XIX, y más concretamente en el desarrollo de la ley de los grandes números, que puede esquematizarse en la siguiente cita de Gnedenko y Kolmogoroff: *Todo el valor epistemológico de la teoría de probabilidades se basa en esto: los fenómenos aleatorios, considerados en su acción colectiva a gran escala, crean una regularidad no aleatoria.*

Un ejemplo de sistema en el que una descripción como ésta resulta muy fructífera es el filo de una navaja. A primera vista, si la navaja está bien afilada, su filo parece una superficie regular, lisa, sin defectos; la observación del filo con una lente de aumento permite, sin embargo, encontrar numerosas mellas e irregularidades distribuidas sin patrón aparente a lo largo de toda su extensión. Esta inopinada aparición de imperfecciones al aumentar la resolución o, más bien, su desaparición al observar a escalas más grandes, es una clara manifestación de cómo muchas veces las irregularidades desaparecen si se las mira con la resolución adecuada. El estudio de otras navajas similares (fabricadas en el mismo lugar, para que no puedan aparecer diferencias debidas a la calidad de la fábrica) deja patente, además, la naturaleza estadística o aleatoria de estas irregularidades: en todas ellas el filo aparece mellado de una forma similar, pero la distribución de las mellas es diferente en cada caso. La cita de Gnedenko y Kolmogorov resulta, por lo tanto, perfectamente aplicable a un objeto como éste: el filo de la navaja está mellado irregular y aleatoriamente,

pero todas esas imperfecciones se transmutan en regularidad si se renuncia a una observación muy detallada.

Ejemplos como el anterior (hay muchos: el ruido térmico en un altavoz, etc.) pueden hacer pensar que la teoría clásica de la probabilidad es suficiente para describir cualquier forma azar en la naturaleza. Sin embargo, existen otros sistemas en los cuales los preceptos anteriores no son aplicables; en ellos, las irregularidades no desaparecen al llevar a cabo una observación con menos detalle.

Considérese una costa arriscada o con una línea muy complicada; la costa de Noruega, con sus fiordos, es posiblemente el ejemplo más habitual. Supóngase que se quiere estudiar la forma de la citada línea de costa y que para ello se envía a un observador a recorrerla a pie. Si el observador es lo suficientemente avezado no ha de tardar en darse cuenta de que está ante una tarea muy complicada: en cada paso encuentra recovecos distribuidos sin patrón aparente que dificultan sobremanera una descripción en detalle. Ante tal situación, y conociendo el ejemplo de la navaja que se ha expuesto con anterioridad, puede parecer razonable renunciar a una descripción muy detallada en favor de un estudio más general, en el que se plasme la forma global de la costa apenas esbozando sus múltiples recovecos. Con ese fin se envía al observador a lo alto de un promontorio, pero, sorprendentemente, la línea de costa sigue pareciendo desde allí igual de complicada. A la vista de esta situación, se puede concluir que se está ante un objeto mucho más complejo que el filo de la navaja, por lo cual parece muy adecuado aumentar drásticamente la escala de resolución. Para ello, en vez de llevar a cabo el estudio desde tierra, se decide utilizar una fotografía desde satélite, pero, inopinadamente, las irregularidades y recovecos siguen teniendo en ella un aspecto muy similar: la complejidad del objeto parece más o menos la misma a diferentes escalas.

Este ejemplo muestra con nitidez que no siempre la aleatoriedad se transmuta en regularidad si se observa con una resolución adecuada. En una línea de costa, la irregularidad de los guijarros que conforman una roca se transforma en la irregularidad de las rocas que conforman un risco, mientras que la irregularidad de los distintos riscos se transmuta en la irregularidad de los acantilados, y así sucesivamente hasta componer una geometría extremadamente complicada. La aleatoriedad de objetos como éste es, por lo tanto, muy diferente a la que aparece, por ejemplo, en el filo de una navaja.

La característica fundamental de este segundo tipo de aleatoriedad es la *autosimilaridad*¹, es decir, el hecho de que su aspecto sea el mismo a diferentes escalas. El

¹En realidad, si se quiere ser riguroso, una línea de costa es *autoafín* y no *autosimilar*: el segundo de los términos se refiere a objetos cuya geometría es exactamente invariante bajo cambio de escala; si esa invariancia es tan sólo estadística (es decir, la semejanza bajo cambio de escala es tan sólo cualitativa), se dice que el objeto es *autoafín*. No obstante, a lo largo de todo este trabajo, y salvo en los puntos en los que establecer esta distinción sea absolutamente necesario para la comprensión del texto, se utilizará de una manera genérica el término *autosimilar* para designar ambos tipos de

filo de una navaja no es autosimilar porque cambia de irregular a suave al aumentar la escala; la costa de Noruega sí lo es porque la irregularidad se mantiene con el mismo cambio. Evidentemente, ningún objeto físico puede ser estrictamente autosimilar: siempre existe una escala límite inferior y otra superior (en una línea de costa pueden ser el átomo y la Tierra, respectivamente), pero, a efectos prácticos, un objeto puede considerarse autosimilar si su aspecto es el mismo en un buen número de escalas diferentes.

Las *escandalosas* propiedades de los objetos autosimilares llevaron a Benoît B. Mandelbrot a clasificarlos dentro de una nueva categoría de azar, que denominó *azar salvaje*, frente al *azar benigno* de los objetos que se ciñen al concepto clásico de azar [14]. Además, el propio Mandelbrot desarrolló una nueva rama de la matemática para describir este tipo de *monstruos* autosimilares: los fractales.

La presencia de objetos o fenómenos autosimilares en la naturaleza es prácticamente ubicua. Además de la autosimilaridad geométrica de las líneas de costa y otros objetos semejantes, existe otra autosimilaridad aún más sorprendente e intrigante: la autosimilaridad que aparece en los registros temporales de determinadas magnitudes. Uno de los ejemplos más clásicos, y, quizá, el más antiguo del que se tiene noticia, es el registro de las crecidas del Nilo: ya en la paradoja bíblica de José se pone de manifiesto que las pequeñas irregularidades en el caudal del Nilo no se lenifican en periodos largos de tiempo, sino que los promedios en periodos sucesivos de varios años pueden llegar a ser muy diferentes. Ejemplos como éste indican que la compleja dinámica que gobierna muchos fenómenos de la naturaleza no puede describirse únicamente mediante *azar benigno*, sino que es necesario incluir también en la descripción al *azar salvaje*. La existencia de este tipo de fenómenos pone de manifiesto que la importancia de los fractales no reside únicamente en su utilidad para describir objetos geométricos complicados: también son necesarios para comprender la dinámica de muchos sistemas complejos.

Para ilustrar estos conceptos se presentan a continuación dos ejemplos heurísticos de registros temporales.

En la figura 2.1 se muestra una señal temporal consistente en una secuencia de variables aleatorias gaussianas². En ella se aprecia bastante bien que todos los puntos se distribuyen de manera casi uniforme con respecto a la media, de modo que el aspecto global de la señal es suave, sin grandes picos ni desviaciones; el azar que interviene en esta construcción es *benigno*.

La figura 2.2 representa, en cambio, una señal cuya aleatoriedad corresponde

fenómenos.

²Generadas con una distribución Normal

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

con media $\mu = 0$ y dispersión $\sigma = 1$.

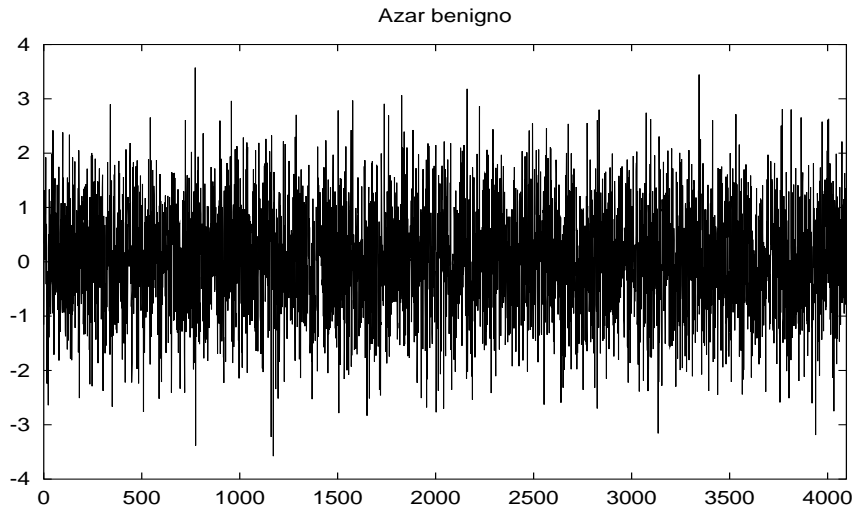


Figura 2.1: Secuencia de 4096 variables aleatorias independientes.

al paradigma del *azar salvaje*. Para construirla se han utilizado también variables aleatorias gaussianas generadas con la misma distribución de probabilidad que en el caso anterior, pero, para conseguir la complejidad que caracteriza al *azar salvaje* se ha operado con ellas según se describe a continuación:

1. Se considera un intervalo de longitud L (en este caso, al igual que en el anterior, $L = 4097$), sobre el que se va a dibujar la señal, y se trata como un vector de L componentes.
2. Se generan dos variables aleatorias gaussianas independientes y se asigna su valor, respectivamente, a la primera y a la última componente del vector.
3. A cada una del resto de las componentes del vector se le asigna el valor correspondiente a una interpolación lineal entre los extremos.
4. Se considera un nuevo vector de longitud L , se generan tres variables aleatorias independientes ($1 + 2^1$), se asigna su valor a las componentes primera, $(L - 1)/2 + 1$ y última.
5. Se realizan dos interpolaciones lineales entre las tres componentes anteriores y con los resultados se da valor al resto de las componentes.
6. Se considera otro vector L , se generan cinco variables aleatorias independientes ($1 + 2^2$) y se repite todo el proceso anterior asignando los valores de estas variables a las componentes primera, $(L - 1)/4 + 1$, $(L - 1)/2 + 1$, $3(L - 1)/4 + 1$ y última.

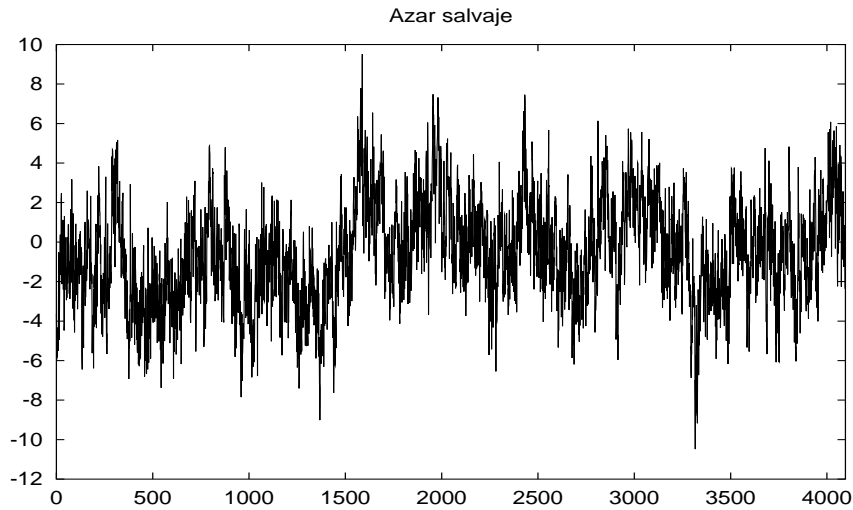


Figura 2.2: Secuencia temporal autosimilar.

7. Se repite el mismo proceso hasta generar L variables aleatorias independientes y asignar cada una de ellas a una componente del vector.
8. Se suman todos los vectores anteriores. El vector resultante es lo que se muestra en la figura 2.2, donde el eje x representa la componente del vector y el eje y el valor de dicha componente.

Este proceso es autosimilar en tanto en cuanto los detalles de la señal son estadísticamente iguales para cualquier resolución. Como se aprecia en la figura, el resultado es aquí tal que una visión global no suaviza las fluctuaciones, sino que las mantiene cualitativamente iguales; el azar involucrado es, por lo tanto, *salvaje*.

La comparación de las dos figuras permite apreciar que las fluctuaciones en el segundo caso son más irregulares, con desplazamientos más imprevisibles con respecto al valor medio; las conclusiones más interesantes se obtienen, empero, estudiando el comportamiento de estas señales en el espacio de frecuencias.

En la figura 2.3 se representa el *power spectrum* (o *densidad espectral*)³ de ambas señales⁴ En el caso correspondiente al *azar benigno*, la señal resultante en el espacio de frecuencias es globalmente plana (ignorando fluctuaciones), esto es, la intensidad de todas las frecuencias es aproximadamente la misma. En cambio, en el caso del *azar salvaje* aparece claramente una estructura: las frecuencias mayores son menos

³Más adelante se definirá en detalle esta magnitud; por el momento es suficiente saber que mide la intensidad con la que aparece cada frecuencia en la señal original.

⁴En ambos casos se ha tratado el resultado con el fin de disminuir las fluctuaciones estadísticas inherentes al tipo de representación utilizada; como en el caso anterior, los detalles son de momento innecesarios y serán estudiados más adelante.

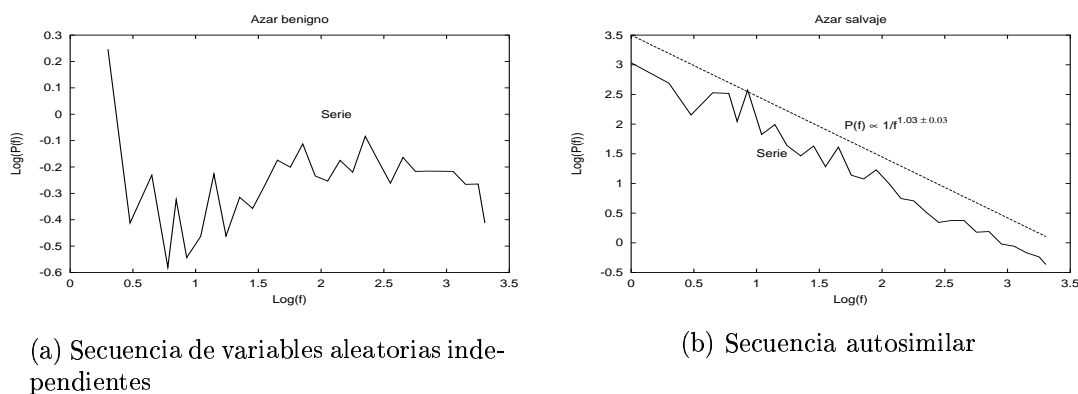


Figura 2.3: *Power spectrum* de las señales anteriores

intensas que las menores según una ley aproximadamente $I(f) \propto 1/f$. Las señales que se comportan de esta manera reciben el nombre de *ruido 1/f*, o *ruido rosa*, y aparecen en multitud de fenómenos naturales, tales como ruido electrónico, latidos cardíacos, rayos cósmicos, armonía...; el porqué de esta sorprendente ubicuidad es aún desconocido [26].

Dada su importancia, las señales autosimilares como el *ruido 1/f* se han estudiado desde muchos puntos de vista: se han propuesto desde procesos estocásticos, más o menos complicados, que dan lugar a señales con propiedades parecidas, hasta modelos de sistemas físicos con interacciones complejas cuyo estado de equilibrio queda caracterizado por este tipo de fluctuaciones (sistemas autoorganizados). En este trabajo se va a utilizar la diferencia entre *azar benigno* y *azar salvaje* para discernir entre espectros cuánticos correspondientes a sistemas con análogo clásico integrable y los mismos espectros correspondientes a sistemas cuánticos caóticos.

2.2 Dimensión fractal.

El ejemplo de la línea de costa expuesto en la sección anterior no solamente ilustra la existencia de fenómenos aleatorios que no pueden ser descritos mediante la teoría clásica de la probabilidad; además, pone de manifiesto que otros conceptos intuitivos utilizados habitualmente, como, por ejemplo, la longitud, tampoco son adecuados para describir determinado tipo de objetos.

Supóngase que, una vez descrita de forma global la línea de costa de la sección anterior, se quiere, además, medir su longitud. A la vista de las complicaciones que surgieron al llevar a cabo la primera tarea, parece una buena idea realizar una primera estimación utilizando diversas fotografías desde varios satélites y estaciones meteorológicas situados a diferente altitud, y considerando las irregularidades hasta

los límites que imponen la resolución de la fotografías; sorpresivamente, pero ya no tanto como al principio, se obtiene una longitud significativamente mayor según se incrementa la resolución. Con el fin de corroborar el resultado, se decide a continuación realizar mediciones sobre la propia superficie, utilizando varias reglas rígidas de diferente tamaño, que permiten tener en cuenta recovecos de diferente complejidad; al igual que antes, se obtiene que la longitud aumenta sucesivamente según se consideran en la medición irregularidades de escala más pequeña.

Este aparentemente extraño fenómeno es debido también a la autosimilaridad: al ser la magnitud de la complicación independiente de la escala, la estimación de la longitud aumenta al reducirse ésta, hasta el punto de hacerse infinita si la autosimilaridad es matemática, es decir, si no existe ninguna escala límite. Este resultado obliga a concluir que un objeto como una línea de costa complicada, o, de una forma más rigurosa, una curva autosimilar del mismo tipo⁵, no tiene longitud definida; se dice entonces que el objeto es un *fractal*.

El concepto de fractal puede definirse de una manera mucho más rigurosa a partir de propiedades topológicas generales, pero no existe aún una caracterización completa de los fractales en estos términos. Mandelbrot propuso la siguiente definición *tentativa* [33]:

Un fractal es, por definición, un conjunto para el cual la dimensión Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica.

Esta definición es bastante genérica y rigurosa, pero requiere a su vez una definición precisa de los términos *Conjunto*, *Dimensión Hausdorff-Besicovitch* (D) y *Dimensión topológica* (D_T) (que tiene siempre un valor entero); en general, resulta mucho más práctica una definición en términos de autosimilaridad, como la siguiente, también propuesta por Mandelbrot⁶ [34]:

Un fractal es una estructura formada por partes que de algún modo se asemejan a la totalidad.

Esta definición es mucho más intuitiva y entronca de modo natural con la exposición previa, pero no caracteriza de forma precisa qué se entiende por *dimensión fractal*; una buena forma de aclarar esta noción es mediante el siguiente argumento:

Considérese que se quiere medir de alguna manera el tamaño de un conjunto S de puntos en el espacio. Un modo razonable de hacerlo es, por ejemplo, colocando esferas de radio δ de tal modo que recubran todos los puntos del espacio a medir; el número mínimo de estas esferas puede tomarse entonces como una medida del tamaño del conjunto.

Supóngase que se quiere medir mediante este procedimiento el tamaño de una curva, es decir, su longitud. Si se sitúa una esfera de radio δ en un punto determinado

⁵En rigor, una línea recta, cuya longitud está perfectamente definida, es también autosimilar, ya que su geometría es también invariante bajo cambio de escala.

⁶El propio Mandelbrot se retractó de la definición anterior en beneficio de ésta

del espacio, todos los puntos situados a una distancia $r < \delta/2$ quedan recubiertos por la misma esfera; el número de esferas necesarias para recubrir todo el conjunto, $N(\delta)$, depende así del tamaño de la esfera $N(\delta) \propto L/\delta$, donde L es la longitud de la curva. Utilizando este resultado y trabajando con esferas suficientemente pequeñas puede obtenerse una medida muy precisa de la longitud de la curva, hasta el punto de considerar como valor exacto de la longitud:

$$L_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta. \quad (2.1)$$

Para determinar el área de una superficie puede procederse de una manera muy similar. El número de esferas necesarias para recubrir una superficie⁷ depende también del tamaño de la esfera de forma muy parecida al caso anterior, $N(\delta) \propto A/\delta^2$, donde A es el área de la superficie. Así, puede tomarse como valor exacto para el área:

$$A_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2. \quad (2.2)$$

Si se repite el mismo procedimiento con un volumen se obtienen resultados semejantes de forma que puede considerarse un volumen exacto:

$$V_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3. \quad (2.3)$$

Con estas tres expresiones es posible medir el tamaño de los objetos más comunes. Supóngase, no obstante, que se quiere caracterizar una superficie de área A_0 mediante una longitud. Si se utilizan las definiciones (2.1) y (2.2) es inmediato que:

$$A_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0\delta, \quad (2.4)$$

luego

$$L_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{A_0}{\delta}. \quad (2.5)$$

Al tomar este límite el resultado diverge, por lo cual se concluye que el tamaño de una superficie no puede medirse mediante una longitud.

Si en vez de con una longitud, se quiere caracterizar a la misma superficie con un volumen, se obtiene

$$V_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} A_0\delta, \quad (2.6)$$

⁷Una superficie cualquiera no puede recubrirse totalmente por esferas sin que se superpongan unas a otras; a lo sumo es posible recubrir una porción máxima que depende de la geometría de la superficie. Cuando se dice que las esferas recubren la superficie puede entenderse que se completa este recubrimiento máximo

que se anula en el límite $\delta \rightarrow 0$, por lo que tampoco es posible utilizar esta magnitud para medir una superficie.

Estos resultados permiten concluir que para caracterizar el tamaño de una superficie es necesario utilizar un área, lo cual parece evidente sin necesidad de recurrir a este tipo de argumentaciones un poco abstrusas. A raíz de ellos, no obstante, y en función de lo que se ha visto en secciones precedentes, surge de manera natural la siguiente pregunta, cuya respuesta ya no es tan trivial: ¿cómo se puede caracterizar una 'curva' tan complicada como una línea de costa, en la cual la longitud también diverge en el límite $\delta \rightarrow 0$? Una primera posibilidad podría consistir en tratar de utilizar un área, pero, si se repitiese la medición que se propuso al principio de esta sección utilizando esferas en vez de reglas, se obtendría un área decreciente según se aumenta el nivel de resolución hasta anularse para esferas infinitamente pequeñas. El hecho de que el área se anule en las mismas condiciones en las que la longitud diverge parece indicar que la forma correcta de determinar el tamaño de un objeto como este es mediante una magnitud intermedia a ambas. Una cantidad con estas características puede definirse según:

$$M_d = \gamma(d) \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta^d, \quad (2.7)$$

donde $\gamma(d)$ es un factor geométrico dependiente del objeto, y d puede tomar un valor cualquiera no necesariamente entero.

Utilizando esta medida, y por analogía con la ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3), se define la dimensión de Hausdorff-Besicovitch $d = D$ como el punto en el que M_d pasa de cero a infinito

$$M_d = \begin{cases} 0 & \text{si } d > D; \\ \infty & \text{si } d < D. \end{cases} \quad (2.8)$$

El valor de esta medida para $d = D$ suele ser finito, pero igualmente puede ser cero o infinito; la dimensión Hausdorff-Besicovitch viene determinada por el punto en el cual M_d pasa de cero a infinito, independiente del valor de esta magnitud en él.

Con esta última definición, la caracterización de un objeto complicado puede hacerse sin mayores problemas en el límite de esferas pequeñas mediante

$$N(\delta) \propto \frac{1}{\delta^D}, \quad (2.9)$$

de modo que es posible calcular D simplemente realizando mediciones para diferentes valores de δ y calculando la pendiente de $\log(N(\delta))$ en función de $\log(\delta)$. Este procedimiento puede aplicarse, por ejemplo, a la costa de Noruega para la cual se obtiene $D \approx 1.52$ [4].

Un buen ejemplo de 'curva' con dimensión fractal es la *curva de Koch*, representada en la figura 2.4 y que puede construirse llevando a cabo los siguientes pasos:

1. Se considera un intervalo generador (normalmente de longitud unidad) sobre el que se va a construir la curva.
2. Se divide el intervalo generador en tres segmentos iguales. El primer y último segmento se dejan como están; el central se sustituye por un triángulo equilátero según se muestra en la figura 2.4.
3. Cada uno de los cuatro segmentos resultantes se considera como nuevo intervalo generador.
4. Se repite el proceso infinitamente; por lo general, suele decirse que tras la i ésima iteración se ha construido la i ésima generación de la curva.

Según este proceso de construcción, es evidente que la longitud de cada generación es mayor que la de la anterior, de una forma muy similar a cómo la longitud de una línea de costa crece al aumentar la resolución⁸. La virtud de este ejemplo es que, al ser un objeto matemático y determinista (es decir, no aleatorio), es posible calcular su dimensión fractal de una manera sencilla.

Supóngase que se quiere medir la longitud de la citada curva y que para ello se recubre de esferas de radio $\delta = 3^{-n}$, donde n es un número natural. A la vista del proceso de construcción y de la figura, es inmediato que el mínimo número necesario de estas esferas para cubrir la curva por completo es $N(\delta) = 4^n$, ya que, al disminuir el radio de la esfera en un factor tres puede resolverse una generación más y, por lo tanto, detectar los nuevos segmentos que aparecen en cada una de ellas. Así pues, utilizando la ecuación (2.9),

$$4^n \propto 3^{nD}, \quad (2.10)$$

de donde se obtiene inmediatamente que

$$D \propto \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262. \quad (2.11)$$

Además de la *curva de Koch* existen otras muchas construcciones geométricas fractales cuya dimensión puede calcularse de forma más o menos sencilla, como el *triángulo de Sierpinsky*, la *curva de Mandelbrot-Given* o el *conjunto de Cantor*, cuya dimensión es menor que la unidad. Todos ellos son autosimilares y se pueden entender como una sucesión de generaciones, al igual que la *curva de Koch*.

⁸Cada generación de la curva puede considerarse como la visión aproximada de la curva real a una resolución finita: si se dispone de un instrumento óptico (el ojo, un microscopio, etc.) capaz de resolver hasta una longitud λ , sólo es posible observar con total detalle hasta la generación $n = -\frac{\log(\lambda)}{\log(3)}$; las estructuras que caracterizan a generaciones posteriores no pueden apreciarse y se toman como líneas rectas.

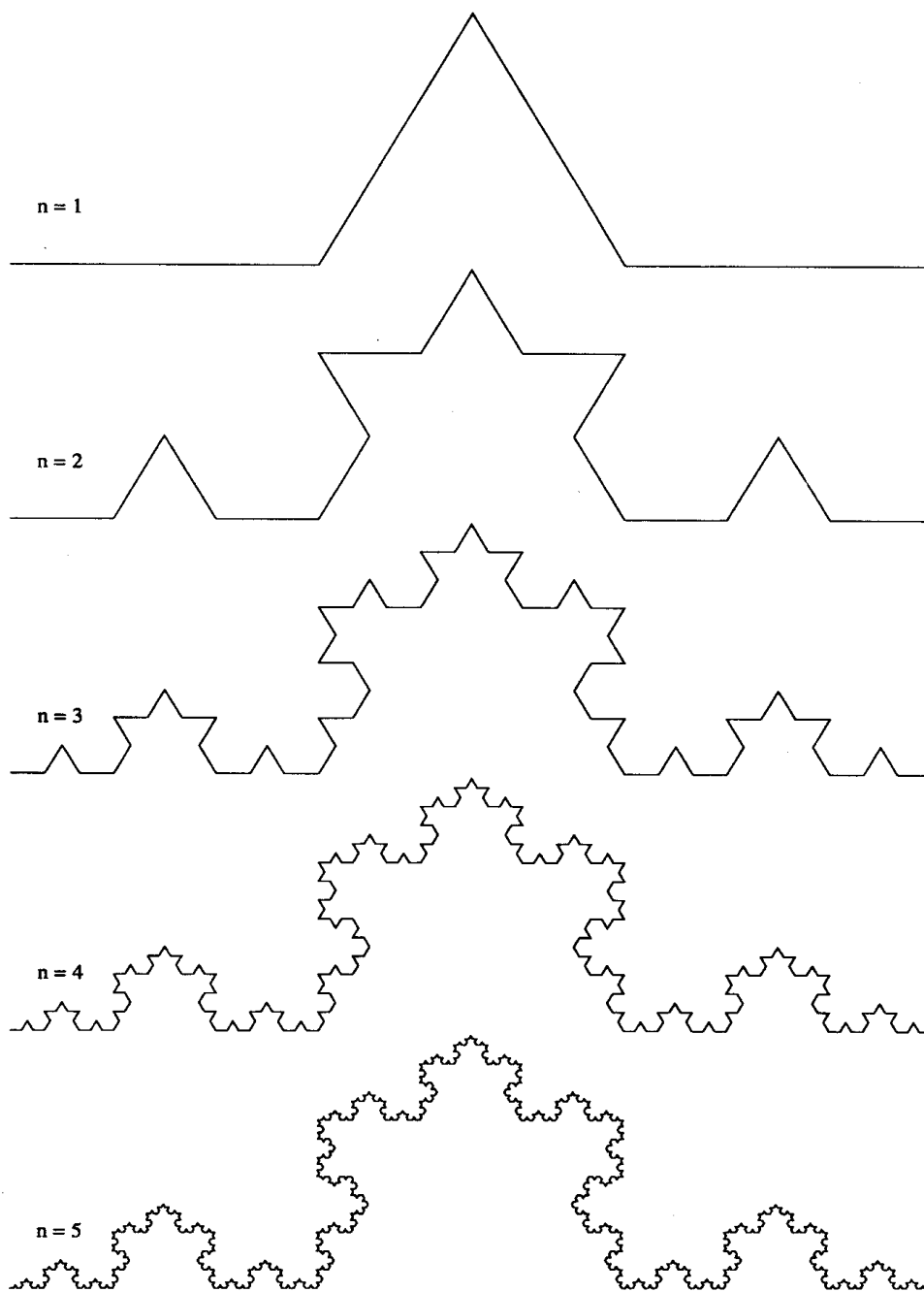


Figura 2.4: Curva de Koch.

2.3 Fractales y series temporales.

Una comparación directa entre el procedimiento que se ha utilizado para construir la *curva de Koch* y el que se utilizó en la primera sección para generar una serie temporal con *azar salvaje* muestra que ambos objetos son muy similares: dejando a un lado los detalles particulares, la única diferencia global entre ambos reside en que el primero es completamente determinista, mientras que el segundo incluye variables aleatorias. Esta diferencia, aunque pequeña, resulta fundamental ya que obliga a estudiar cada uno de estos objetos con una teoría distinta: los *fractales deterministas* para el primero, y los *fractales estocásticos* para el segundo. Como su nombre indica, la principal diferencia entre ambas teorías reside en que en el primer caso las propiedades de autosimilaridad se verifican exactamente, mientras que en el segundo sólo lo hacen de manera estadística; ambos casos, empero, están caracterizados por la autosimilaridad.

Considérese la *curva de Koch* como si fuese la gráfica de una función $f(t)$. Si se toma un factor de escala $\lambda = (1/3)^n$, la curva verifica la siguiente relación:

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t), \quad (2.12)$$

donde el exponente α vale la unidad. Esta propiedad, generalizada para cualquier valor del exponente α , caracteriza la autosimilaridad, ya que pone de manifiesto la invariancia bajo cambio de escala. Por ejemplo, se verifica para las leyes de potencias $f(t) = bt^\alpha$, que caracterizan los puntos críticos de las transiciones de fase de segundo orden, en los cuales las fluctuaciones del sistema se propagan por todo él sin que exista longitud característica alguna.

Si en lugar de una función determinista se tiene un proceso estocástico $\xi(t)$, la relación anterior no es válida, pero puede aplicarse una definición alternativa de autosimilaridad según:

$$\langle \xi(\lambda t) \rangle = \lambda^\alpha \langle \xi(t) \rangle \quad (2.13)$$

En este caso, se dice que el proceso $\xi(t)$ es autoafín, ya que la autosimilaridad sólo aparece de manera estadística.

2.3.1 Análisis de Hurst.

La definición anterior de autosimilaridad en términos estadísticos permite estudiar las propiedades fractales de un buen número de fenómenos naturales que se plasman en un registro temporal. Para poder realizar cálculos significativos conviene, no obstante, utilizar algunas expresiones alternativas más útiles a la hora de identificar la autosimilaridad a partir de los datos disponibles (por lo general, una serie discreta,

finita y no demasiado grande de valores de una determinada magnitud en función del tiempo).

Uno de los métodos alternativos más utilizados es el que propuso H. E. Hurst [35] para abordar el problema del almacenamiento de agua en un embalse: el *análisis R/S* (*rescaled range analysis*). Este método consiste en calcular la diferencia entre el máximo y el mínimo de una señal en un periodo τ y en estudiar la evolución de dicha cantidad en función del valor de τ . Para aplicarlo al problema del almacenamiento de agua en un embalse, Hurst calculó el flujo medio entrante a lo largo del periodo τ

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (2.14)$$

y estudió la variación del volumen total almacenado en el embalse si se consumía o liberaba ese mismo flujo:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t [\xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau] \quad (2.15)$$

Una vez calculada esta cantidad, definió el rango R como la diferencia entre su máximo y su mínimo en función del intervalo τ ; el valor de esta magnitud para un τ suficientemente grande puede tomarse como el tamaño óptimo del embalse

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (2.16)$$

Además de al problema del almacenamiento de agua, Hurst aplicó este tipo de análisis al estudio de otros muchos fenómenos naturales caracterizados por fluctuaciones. Para hacerlo de una manera más sistemática modificó el estadístico que había inventado definiendo la siguiente magnitud adimensional:

$$R/S(\tau) = \frac{R(\tau)}{S(\tau)}, \quad (2.17)$$

donde $S(\tau)$ es la desviación estándar

$$S(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} [\xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Al aplicar este nuevo estadístico a fenómenos muy variados, Hurst encontró que en la mayoría de ellos se verificaba la siguiente relación:

$$R/S(\tau) \propto \tau^H \quad (2.19)$$

y obtuvo en la mayoría de los casos $H \approx 0.7$ [35]. La conclusión que obtuvo es equivalente, por lo tanto, a decir que muchos fenómenos naturales están caracterizados por una cantidad que es autosimilar.

2.3.2 Movimiento browniano fraccionario.

El análisis propuesto por Hurst está directamente relacionado con el formalismo del movimiento browniano fraccionario. El origen de este formalismo, que en la actualidad se aplica a muchos sistemas, está en el movimiento de una partícula browniana, y, más en concreto, en el sencillo modelo que propuso Einstein para describirlo. En dicho modelo, la partícula browniana se mueve a saltos sobre una línea, de modo que en cada salto puede avanzar o retroceder una determinada longitud ξ ; a pesar de su sencillez, Einstein pudo describir con él las principales características del fenómeno de la difusión.

El formalismo actual del movimiento browniano se basa en generalizar el modelo propuesto por Einstein de forma que el valor del salto ξ viene determinado por una distribución de probabilidad de media nula. En estas condiciones, si se calcula la posición de la partícula en un tiempo t como la suma de todos los desplazamientos realizados por la partícula en ese tiempo

$$X(t) = \sum_{i=1}^t \xi_i \quad (2.20)$$

se obtiene que

$$\langle [X(t) - X(t_0)]^2 \rangle_C \propto |t - t_0|, \quad (2.21)$$

donde el subíndice C en el valor medio indica que éste se realiza sobre la colectividad, es decir, utilizando distintas realizaciones. Esta forma de calcular el valor medio, en lugar de realizar un promedio en t , permite verificar que la cantidad anterior no depende de los valores de t y t_0 , sino de la diferencia entre ellos.

La relación (2.21) pone de manifiesto la naturaleza autosimilar del movimiento browniano. Dicha autosimilaridad queda aún más patente si se estudia el desplazamiento medio de la partícula en un tiempo τ , que puede abordarse definiendo la siguiente magnitud

$$f(\tau) = \langle |X(t + \tau) - X(t)| \rangle, \quad (2.22)$$

cuyo valor es

$$f(\tau) \propto \tau^{1/2}. \quad (2.23)$$

A partir de este resultado, que se obtiene de manera inmediata del anterior, es evidente que

$$f(\lambda\tau) \propto \lambda^{1/2} f(\tau), \quad (2.24)$$

de forma que el movimiento browniano queda caracterizado por una función homogénea con exponente $\alpha = 1/2$.

Mandelbrot introdujo el concepto de movimiento browniano fraccionario extendiendo este resultado para un proceso $X_H(t)$ tal que [29]

$$f(\tau) \propto \tau^H, \quad (2.25)$$

donde H puede tomar cualquier valor $0 < H < 1$, de forma que el exponente de homogeneidad de la función es $\alpha = H$.

El movimiento browniano fraccionario es muy interesante por dos razones fundamentales. En primer lugar, de las expresiones anteriores se deduce fácilmente que si se efectúa sobre él el análisis de Hurst se obtiene [4]

$$R/S \propto \tau^H, \quad (2.26)$$

de modo que su parámetro característico coincide con el exponente de Hurst.

En segundo lugar, resulta muy sencillo explicar cualitativamente el comportamiento global de una partícula que se mueve según un movimiento browniano fraccionario. Si la trayectoria de la partícula es $X_H(t)$, puede definirse una función de correlación

$$C(t) = \frac{\langle -X_H(t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H(t)^2 \rangle} = 2(2^{2H-1} - 1) \quad (2.27)$$

que mide la relación entre la posición de la partícula en dos instantes separados por un intervalo $\tau = 2t$. Del resultado que se muestra en la ecuación anterior se deduce que la partícula puede comportarse globalmente de tres formas diferentes:

1. $H < 1/2$. En este caso, la función de correlación es negativa, de forma que una trayectoria creciente⁹ en el pasado produce una trayectoria decreciente en el futuro, y viceversa. De una forma cualitativa puede decirse que la partícula tiende a no alejarse mucho del desplazamiento medio, corrigiendo pequeñas desviaciones locales; se dice entonces que el movimiento es *antipersistente*.

⁹Dado que se está suponiendo que todos los procesos estocásticos involucrados son de media nula, una trayectoria creciente indica que la partícula tiende a moverse con saltos $\xi > 0$. En el caso más general, en el que no hay restricción alguna sobre el valor medio, este mismo comportamiento indica que la partícula tiende a moverse con saltos superiores al valor medio

2. $H = 1/2$. En este caso, que corresponde al movimiento browniano normal, la función de correlación es nula, de forma que no hay correlación entre la posición de la partícula en dos instantes diferentes: la partícula se mueve a saltos completamente aleatorios.
3. $H > 1/2$. En este caso, la función de correlación es positiva, de manera que si la trayectoria es creciente (o decreciente) en el pasado lo seguirá siendo también en el futuro. Al contrario que en el caso $H < 1/2$, esto da lugar a que la probabilidad de que la partícula se aleje del comportamiento medio sea bastante grande, ya que las pequeñas desviaciones locales no se corrigen sino que se incrementan; se dice, pues, que el movimiento es *persistente*.

Para ilustrar el concepto de movimiento browniano fraccionario hemos utilizado un algoritmo propuesto por Mandelbrot y Wallis [13] para generar un movimiento browniano fraccionario con H determinado. En la figura 2.5 se muestran tres series temporales con $H = 0.1$, $H = 0.5$ y $H = 0.9$, respectivamente; en ella se aprecian fundamentalmente dos fenómenos interesantes.

En primer lugar, las excursiones con respecto al origen son más largas y más amplias según aumenta el valor del parámetro de Hurst¹⁰. Para entender este comportamiento, una explicación basada en persistencia y antipersistencia es más que suficiente: la gran antipersistencia de $H = 0.1$ provoca que cualquier alejamiento del cero sea inmediatamente corregido, mientras que la gran persistencia de $H = 0.9$ produce exactamente lo contrario; la ausencia de correlación en $H = 0.5$ da lugar a un caso intermedio.

En segundo lugar, se observa que las fluctuaciones de la trayectoria con $H = 0.1$ son mucho más intensas que en el caso de $H = 0.9$. Al igual que en el caso anterior, esta particularidad se puede entender con facilidad en términos de persistencia y antipersistencia: las continuas correcciones de la trayectoria antipersistente producen que ésta sea muy picuda, mientras que la tendencia a la continuidad de la persistente da lugar a una mayor suavidad; de nuevo, la trayectoria con $H = 0.5$ supone un caso intermedio.

2.3.3 La densidad espectral.

La observación conjunta de las figuras 2.2 y 2.5 muestra que las series que se representan en ambos casos son muy similares. La primera de ellas se construyó utilizando un algoritmo heurístico que se supuso autosimilar; como en el momento de hacerlo sólo se pretendía introducir cualitativamente los conceptos que se han explicado en detalle en las secciones anteriores, esa suposición quedó sin verificar. Los resultados

¹⁰Nótese la diferencia de escala: es tan grande que si se representaran las tres trayectorias en la misma escala no podrían apreciarse los detalles de las fluctuaciones

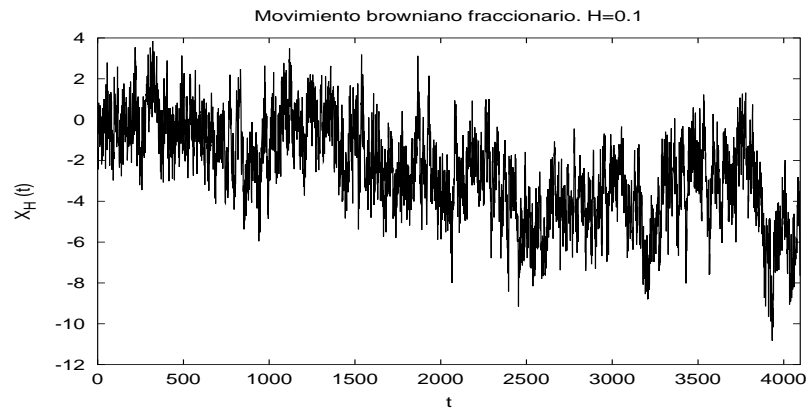
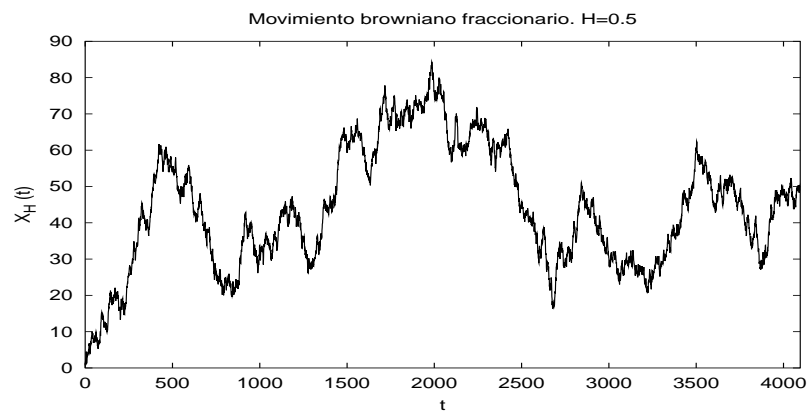
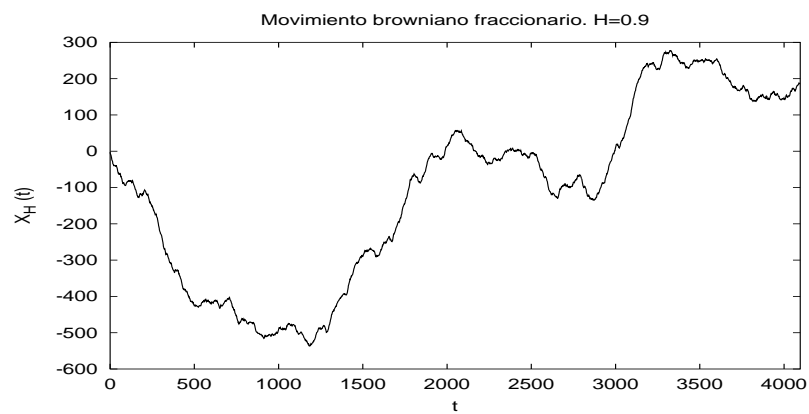
(a) Partícula con $H = 0.1$ (b) Partícula con $H = 0.5$ (c) Partícula con $H = 0.9$

Figura 2.5: Movimiento browniano fraccionario.

que se presentaron junto con la figura, de nuevo sin más pretensiones que motivar al lector, son suficientes, empero, para llevar a cabo esa verificación, aunque utilizando herramientas diferentes a las presentadas con anterioridad.

Hasta el momento se ha hecho hincapié en la autosimilaridad de las señales temporales tal y como se registran, es decir, como funciones dependientes del tiempo. Sin embargo, una señal temporal puede representarse también en el espacio de frecuencias; la relación entre ambas representaciones queda determinada por la transformada de fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}, \quad (2.28)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}. \quad (2.29)$$

En general, la función $\tilde{f}(\omega)$ es compleja, por lo que suele resultar mucho más útil la densidad espectral o *power spectrum*, definido según

$$P(\omega) = \left| \tilde{f}(\omega) \right|^2. \quad (2.30)$$

Utilizando esta magnitud, puede decirse que una señal temporal es autosimilar si verifica

$$P(\omega) \propto \omega^{-B}, \quad (2.31)$$

ya que de este modo queda garantizada la invarianza de la señal bajo cambio de escala en el espacio de frecuencias¹¹.

La presencia de autosimilaridad en el espectro de frecuencias está relacionada directamente con la noción de autosimilaridad presentada en la sección anterior. Matemáticamente, una función es autosimilar si sus incrementos

$$\Delta x(\tau) = x(t + \tau) - x(t) \quad (2.32)$$

satisfacen una relación de homogeneidad

$$\Delta x(\lambda\tau) = \lambda^H \Delta x(\tau). \quad (2.33)$$

Un simple corolario de esta última ecuación muestra que el la densidad espectral de una función autosimilar sigue una ley de potencias según la ecuación (2.31) con un exponente $B = 2H + 1$ [4]. La afirmación inversa, en cambio, no resulta ser totalmente cierta: existen evidencias numéricas que ponen de manifiesto que una ley de potencias en la densidad espectral no es suficiente para garantizar la

¹¹El signo negativo del exponente resulta muy adecuado según se verá a continuación.

autosimilaridad de la función [11]; a pesar de ello, suele ser muy habitual en la literatura la identificación de ambas características.

En la figura 2.6 se representan tres series temporales cuyas densidades espectrales verifican la ecuación (2.31) con exponentes $B = 1.2$, $B = 2.0$ y $B = 2.8$, los cuales, según la relación $\alpha = 2H + 1$, se corresponden con los movimientos brownianos fraccionarios representados en la figura 2.5. Para generarlas hemos utilizado el siguiente algoritmo, que da lugar a una serie temporal de longitud M con una densidad espectral dada por $P(\omega_k)$ [11]:

$$x_i = \sum_{k=1}^{M/2} \sqrt{P(\omega_k)\Delta\omega} \cos(\omega_k t_i + \phi_k), \quad (2.34)$$

donde las frecuencias $\omega_k = k\Delta\omega$ son múltiplos de la frecuencia fundamental $\Delta\omega = 2\pi/M$. Este algoritmo da lugar a una señal cuyas fluctuaciones viene determinadas por las $M/2$ fases ϕ_k ; en los tres casos que se representan en la figura 2.5 la secuencia $\{\phi_k\}$ se ha generado aleatoriamente con una distribución de probabilidad uniforme.

Para verificar la autosimilaridad de este tipo de señales (y, a su vez, la relación $B = 2H + 1$) hemos calculado el exponente de Hurst de las tres series representadas en la figura 2.6. En la figura 2.7 se representa en escala doble logarítmica la función R/S para las señales con $\alpha = 2.0$ y $\alpha = 2.8$. En ambos casos se verifica bastante bien la relación (2.26), aunque con pequeñas desviaciones que pueden ser debidas, entre otras cosas, a problemas de tamaño finito o a la imprecisión intrínseca del análisis R/S [12]; los resultados que se obtienen en el ajuste son, respectivamente, $H = 0.55$ y $H = 0.84$.

En la figura 2.8 se muestra el mismo cálculo para la señal con $B = 1.2$. En ella se aprecia como en este caso hay una desviación bastante considerable con respecto a la ley de potencias para valores de τ pequeños. Esta desviación aparece también, aunque en menor grado, en el caso con $B = 2.0$, por lo que podría pensarse que es debida, por ejemplo, al tamaño finito de la señal; el valor del exponente de hurst para τ grande, $H = 0.31$, muestra, sin embargo, una importante desviación con respecto a la ley $B = 2H + 1$.

A la vista de este último resultado queda patente la importancia de determinar el parámetro de Hurst de una manera fiable y precisa. A este respecto, el análisis R/S es una herramienta útil, pero que adolece de algunos defectos que se manifiestan especialmente a la hora de hacer cálculos precisos o de establecer diferencias entre señales con exponente H muy parecido [12]. El cálculo preciso del exponente de Hurst es más laborioso y requiere de unos procedimientos más sofisticados, muchos de los cuales son utilizados ya de manera habitual. Aún así, suele ser bastante normal encontrar errores y confusiones en la literatura, sobre todo en la interpretación de los resultados; el principal motivo de estas incorrecciones es la confusión entre *ruidos* y *movimientos*, esto es, entre procesos estocásticos estacionarios y otros que no lo

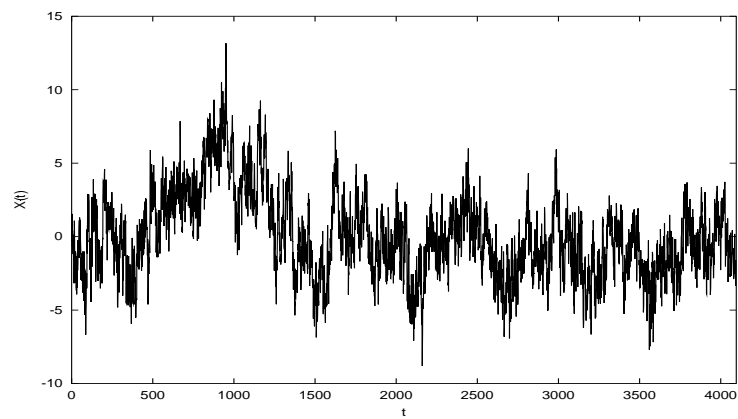
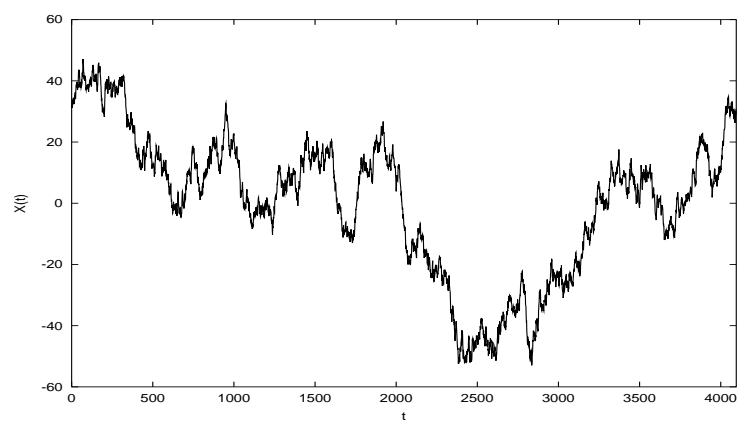
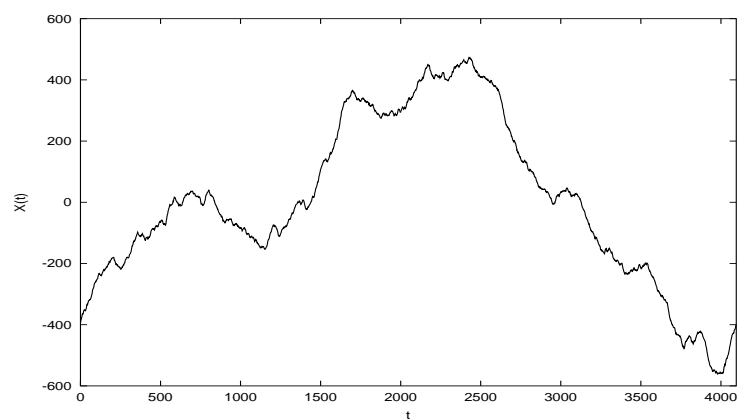
(a) Señal con exponente $B = 1.2$ (b) Señal con exponente $B = 2.0$ (c) Señal con exponente $B = 2.8$

Figura 2.6: Señales con densidad espectral que se indica.

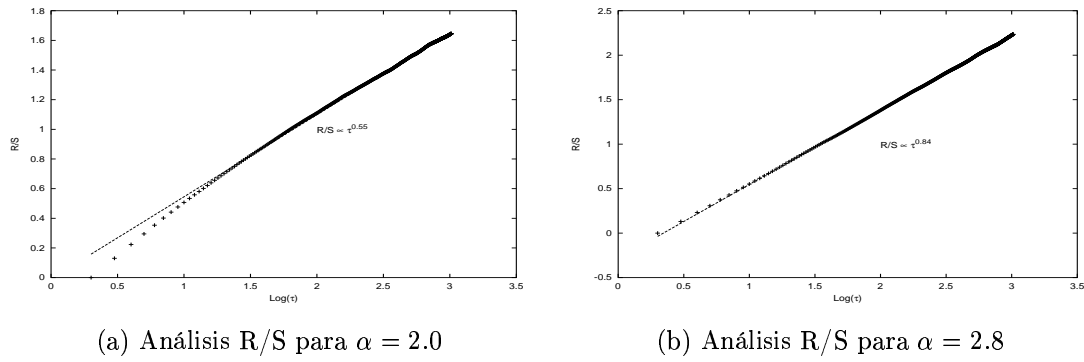


Figura 2.7: Análisis R/S para señales con *power spectrum* $P(\omega) \propto \omega^\alpha$

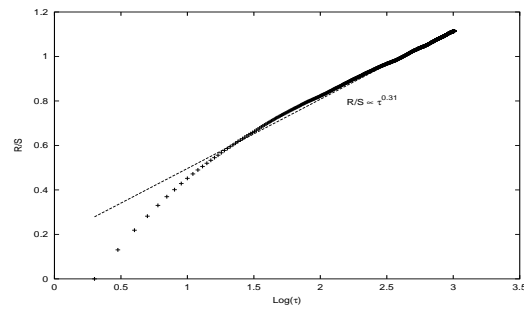


Figura 2.8: Análisis R/S para señal con *power spectrum* $P(\omega) \propto \omega^{1.2}$.

son. Este tipo de confusión proviene, entre otras cosas, de la terminología con la que se denomina normalmente a estas señales autosimilares, que no discierne entre unos y otros, y los engloba a todos bajo el término *ruidos*, con un apellido que depende del valor del exponente B :

- A las señales con $B = 0$ se les da el nombre de *ruidos blancos*, debido a que, al igual que la luz blanca, están compuestas por todas las frecuencias con igual proporción. Estas señales no son más que una secuencia de variables aleatorias independientes.
- Si $B = 1$, la señal suele denominarse *ruido rosa*, y constituye uno de los fenómenos más interesantes de la naturaleza.
- Cuando $B = 2$ suele decirse que se está ante un *ruido marrón*, por traducción del inglés *brown noise*, procedente a su vez del movimiento browniano, ya que el desplazamiento de una partícula browniana da lugar a este tipo de ruido.
- Por último, las señales con $B = 3$ reciben el nombre de *ruidos negros*.

El hecho de que a estos cuatro tipos de señales se les denomine *ruidos* puede hacer pensar que son cuatro tipos diferentes de un mismo proceso global, cuando no es así. Por ejemplo, los *ruidos blancos* y los *ruidos marrones* no son independientes, antes bien, el segundo es la integral del primero; lo mismo ocurre con los *ruidos rosas* y los *ruidos negros*. Esta relación es la que hace que a los dos primeros se les denomine *ruidos* y a los dos segundos *movimientos*. La distinción entre ambos procesos no es tan sólo cualitativa, emanada, por ejemplo, del formalismo del movimiento browniano: la relación existente entre ambos hace que los primeros sean estacionarios y los segundos no, lo que justifica su distinta denominación¹².

Esta distinción entre *ruidos* y *movimientos* resulta crítica para el cálculo del exponente de Hurst, ya que la mayoría de los procedimientos disponibles son apropiados a los unos y no a los otros; la aplicación a ciegas de cualquiera de ellos puede dar lugar a resultados espurios y a una interpretación incorrecta de la física involucrada. El estudio de la densidad espectral permite evitar tales equívocos, ya que discierne de manera natural entre procesos estacionarios y no estacionarios: en el caso de que $-1 < B < 1$, el proceso es estacionario y constituye un *ruido*; si $1 < B < 3$, el proceso no es estacionario y constituye un *movimiento*. Entre ambos tipos de procesos queda el caso $B = 1$, que se sitúa, así, en un lugar privilegiado como límite de ambas categorías. El hecho, además, de que aparezcan anomalías cuando $B \rightarrow 1$ en el análisis R/S , tal y como se muestra en la figura 2.8, hace que el estudio de este tipo de señales adquiera un gran interés.

¹²Nótese que intuitivamente un *movimiento* es algo no estacionario, mientras que un *ruido* debería serlo siempre.

2.3.4 El ruido $1/f$.

Como ya se indicó en la introducción, la señal que se representa en la figura 2.2 verifica la relación (2.31)¹³ con un exponente $B \approx 1$, lo que pone de manifiesto la especial vinculación entre este tipo de señales y cierta forma de autosimilaridad. El hecho, además, de que el valor $B = 1$ constituya un límite entre dos tipos de procesos diferentes incrementa aún más el interés del *ruido rosa*, no sólo por su sorprendente ubicuidad [26], sino también por sus muy interesantes propiedades desde el punto de vista fractal.

Todas estas características hacen que este tipo de señales hayan sido muy estudiadas, tanto desde un punto de vista meramente descriptivo (esto es, identificando sistemas que presentan este tipo de señales), como de una forma más cuantitativa. En la actualidad existen muchos modelos que dan lugar a series de estas características, pero no existe ninguna teoría que pueda explicar su ubicuidad, como en el caso del movimiento browniano¹⁴; la mayoría de los autores, de hecho, parecen estar de acuerdo en que la diversidad de los fenómenos en los que aparece es tal que no puede haber una explicación única.

El interés del ruido $1/f$ como límite entre procesos estacionarios y no estacionarios se plasma de una manera especial en su comportamiento con respecto al análisis R/S o con cualquier otro procedimiento para estimar el exponente de Hurst. A la vista de la ecuación (2.26) y de la relación entre el exponente de Hurst y la densidad espectral parece bastante lógico que si $B = 1$ se cumpla $H = 0$. De verificarse esta relación quedaría resuelta la presunta ambigüedad del ruido $1/f$, ya que quedaría inmediatamente englobado dentro de los procesos estacionarios. Sin embargo, los cálculos que se presentan en este trabajo muestran que esto no parece ser así, al menos para las señales que se han considerado¹⁵.

En la figura 2.9 se muestra el resultado de efectuar en análisis R/S sobre la señal de la figura 2.2, que se puede considerar un ruido $1/f$ estricto con bastante aproximación. En la figura se presentan dos gráficas: una en escala doble logarítmica y otra en la que se representa el valor de $R/S(\tau)$ frente al logaritmo de τ ; a la vista de ambas parece bastante claro que

$$R/S(\tau) \propto \log \tau, \quad (2.35)$$

¹³Allí se denotó la densidad espectral como $P(f)$ en vez de $P(\omega)$; a lo largo del trabajo se utilizarán indistintamente ambas notaciones.

¹⁴Nótese que un ruido $1/f$ estricto, esto es, con $B = 1$, queda fuera tanto del movimiento browniano fraccionario como del análisis de Hurst, ya que ambos están contruidos para $1 < B < 3$, donde las desigualdades son estrictas.

¹⁵De alguna manera este resultado está relacionado con el que obtuvieron Greis et al. [11], aunque ellos se limitaban a comprobar computacionalmente que ruidos $1/f$ bastante genéricos no resultaban ser funciones homogéneas

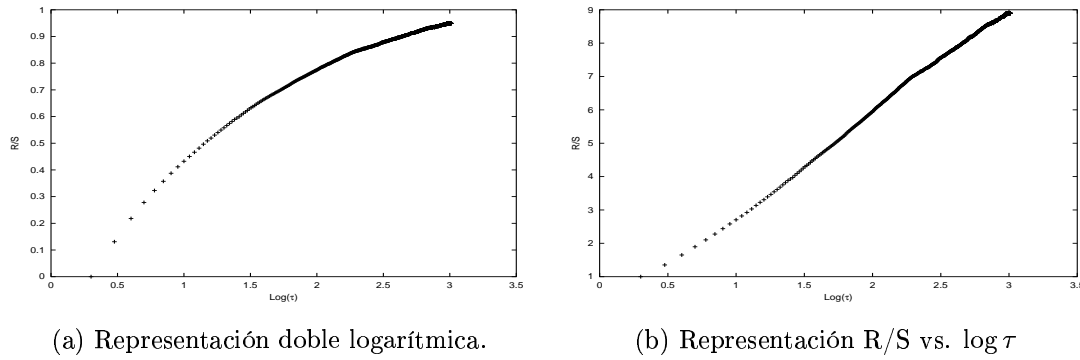


Figura 2.9: Análisis R/S sobre azar salvaje.

al menos aproximadamente.

El resultado de la ecuación (2.35) es muy interesante por varios motivos. En primer lugar, parece indicar que la señal no es estrictamente autosimilar, ya que no verifica $R/S(\lambda\tau) = \lambda^H R/S(\tau)$, a pesar del proceso mediante el cual ha sido generada. En segundo lugar, muestra que un ruido $1/f$ puede constituir una especie de caso intermedio entre las señales estacionarias y no estacionarias, en tanto en cuanto su rango crece con τ pero lo hace más lentamente que cualquier ley de potencias.

Para tratar de discernir si este comportamiento es exclusivo de este tipo de construcción, o si se aparece habitualmente en ruidos $1/f$, hemos generado una secuencia de $N = 131072$ valores¹⁶ mediante la ecuación (2.34) imponiendo que $P(f) \propto 1/f$ estrictamente, y hemos utilizado un procedimiento más sofisticado para estimar el parámetro de Hurst. Este procedimiento se describe en detalle en [12] y se puede esquematizar de la siguiente manera:

1. Se divide la señal en sectores no solapantes, se realiza una regresión lineal en cada sector y se subtrae el resultado a los puntos originales.
2. Se calcula la desviación estándar, SD , en cada ventana.
3. Se calcula el promedio a todas las ventanas de esta cantidad, \bar{SD} .
4. Se estima el valor de H mediante una regresión lineal $\log(\bar{SD})$ vs. $\log(n)$, donde n es el tamaño de la ventana.

¹⁶El procedimiento utilizado resulta tanto más fiable cuanto mayor es el número de puntos. Concretamente, si se quiere discernir entre dos señales tales que $\Delta H \leq 0.1$ con un nivel de confianza $p \geq 0.95$, es necesario que la longitud de la señal sea $N \geq 2^{15}$ [12].

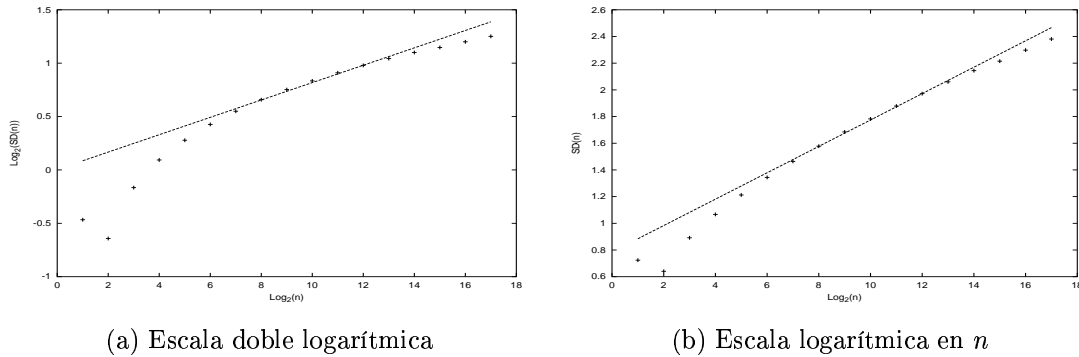


Figura 2.10: Análisis de hurst para ruidos $1/f$ generados según (2.34).

Los resultados de aplicar esta técnica se muestran en la figura 2.10, tanto en representación doble logarítmica como $SD(n)$ vs. $\log(n)$. La regresión lineal por mínimos cuadrados para ambos casos muestra que el crecimiento logarítmico parece una mejor descripción, aunque tampoco es posible extraer una conclusión definitiva.

En la figuras 2.11 y 2.12 se muestran los mismos cálculos para señales con $B = 0.8$, $B = 0.9$, $B = 1.0$, $B = 1.1$ y $B = 1.2$. En la figura 2.11 se aprecia como la señal va tendiendo hacia la estacionaridad según disminuye B : el caso $B = 1.2$ se aproxima razonablemente a una recta, mientras que el caso $B = 0.8$ parece saturar en un determinado valor¹⁷. El caso $B = 1.0$ parece presentar un comportamiento intermedio, aunque a la vista de la figura no es sencillo caracterizarlo.

La figura 2.12 permite arrojar algo de luz al asunto. En ella se aprecian tres comportamientos claramente diferenciados:

- Crecimiento más rápido que lineal, como en el caso $B = 1.2$. Al ser la escala $SD(n)$ vs. $\log(n)$, esto indica que la desviación estándar de la señal crece más deprisa que un logaritmo, lo cual, unido al resultado de la figura 2.11 permite postular un comportamiento $SD(n) \propto n^H$. El caso $B = 1.1$ también se comporta de esta manera, aunque algo menos nítidamente.
- Crecimiento inferior al lineal, llegando casi a saturar, como en el caso $B = 0.8$. El hecho de que se aprecie este mismo comportamiento en la figura 2.11 permite suponer que $SD(n) \approx cte$, es decir, que esta señal es estacionaria, al menos para valores grandes de n . Al igual que antes, este comportamiento se aprecia también en el caso $B = 0.9$ aunque con menor nitidez.
- Crecimiento intermedio entre los dos anteriores, aproximadamente lineal, lo

¹⁷En series de tamaño finito no es sencillo observar estacionaridad exacta [12].

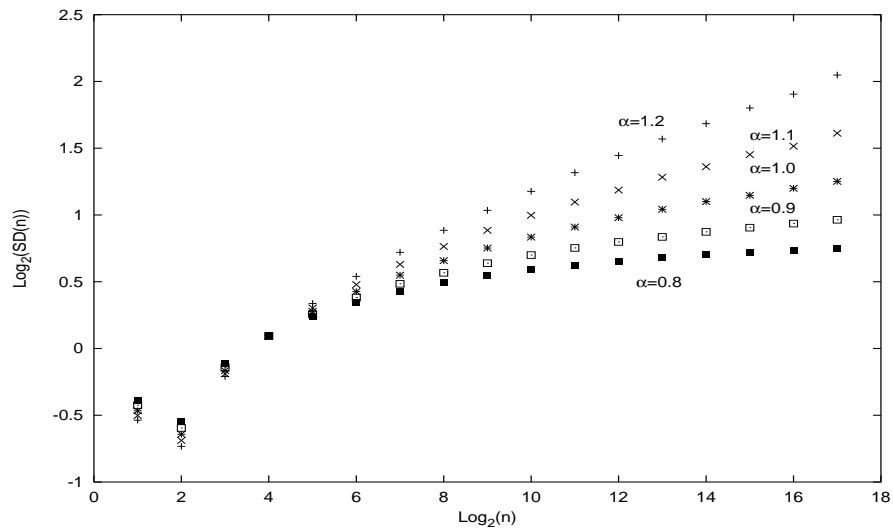


Figura 2.11: Señales que verifican (2.31); escala doble logarítmica.

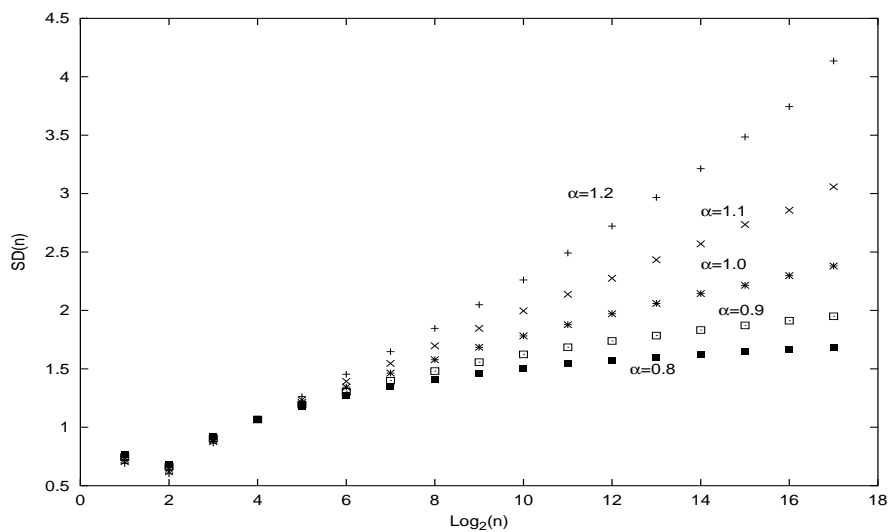


Figura 2.12: Señales que verifican (2.31); SD vs. $\log(n)$.

que se corresponde con $SD(n) \propto \log(n)$. Este comportamiento aparece cuando $B = 1.0$, y lo hace con bastante nitidez.

Estos resultados corroboran lo postulado con anterioridad: el ruido $1/f$, límite entre la estacionaridad y la no estacionaridad, parece tener un comportamiento logarítmico. Este comportamiento, aunque extraño, no deja de ser un límite lógico para el formalismo del movimiento browniano fraccionario: puede decirse que el ruido $1/f$ verifica $H = 0(\log)$ y que eso le distingue de otros procesos estacionarios con $H = 0$ ¹⁸.

2.4 Multifractales.

El comportamiento singular del ruido $1/f$ pone de manifiesto que no siempre es posible caracterizar un objeto aparentemente autosimilar con un solo exponente, como la dimensión fractal o el parámetro de Hurst. Una forma de generalizar esta descripción aún dentro de la teoría fractal es sustituyendo el exponente fractal por todo un *espectro* de exponentes; los objetos que se describen apropiadamente mediante esta generalización se denominan *multifractales*.

El formalismo fractal, expuesto en secciones anteriores, resulta muy adecuado para describir la geometría o las propiedades estadísticas de ciertas curvas o registros temporales. La generalización que aquí se presenta, el formalismo multifractal, puede aplicarse también para caracterizar el mismo tipo de objetos, como se verá más adelante en este trabajo; su objetivo principal es, sin embargo, la descripción detallada de sistemas un poco más complicados, tales como la distribución de un material sobre un soporte.

Considérese, a modo de ilustración, la distribución de un material sobre un soporte, en este caso el intervalo $[0, 1]$, generada según se describe a continuación:

1. Se divide el soporte inicial en dos subsegmentos iguales.
2. A la mitad izquierda del soporte se le asigna una cantidad $\mu_0 = p$ y a la mitad derecha otra cantidad $\mu_1 = 1 - p$.
3. Se divide cada subsegmento en dos parte iguales y se procede del mismo modo que antes. Tras esta iteración el soporte inicial queda dividido en cuatro segmentos que contienen, respectivamente, $\mu_0\mu_0$, $\mu_0\mu_1$, $\mu_1\mu_0$ y $\mu_1\mu_1$.
4. Se repite el proceso hasta el infinito.

¹⁸Esta identificación de un crecimiento logarítmico con una ley de potencias con exponente cero se realiza también en el estudio de transiciones de fase y puntos críticos, por ejemplo en el calor específico del modelo de Ising en dos dimensiones.

Al igual que ocurría con la *curva de Koch* o con el ejemplo de *azar salvaje* que se propuso en la introducción, el proceso de construcción de este objeto es iterativo y autosimilar, ya que todas las generaciones se obtienen de la anterior mediante el mismo procedimiento. Los dos ejemplos mencionados en primer lugar dan lugar a una curva o a un objeto de forma complicada, que puede describirse muy bien utilizando el formalismo fractal. En el caso que se presenta en esta sección el resultado es aún un poco más complejo, ya que en su descripción entran en juego tanto la geometría del soporte como la distribución de material sobre él. Una excelente manifestación de esta complejidad se encuentra si se estudia lo que sucede en cada generación:

- Tras la segunda generación, el soporte inicial queda dividido en cuatro subsegmentos, cada uno de los cuales contiene una cantidad μ_i de material. Según se hizo notar cuando se explicó el proceso de construcción, hay tres valores diferentes para la medida μ_i que son $\mu_A = \mu_0\mu_0$, que se corresponde con uno de los subsegmentos; $\mu_B = \mu_0\mu_1$, que se corresponde con dos de los subsegmentos; y $\mu_C = \mu_1\mu_1$, que, al igual que μ_A se corresponde con uno de los subsegmentos.
- Tras la tercera generación, el soporte inicial queda dividido en ocho subsegmentos cada uno de ellos caracterizado, al igual que antes, por una cantidad de material o medida μ_i . En este caso, los posibles valores de esta cantidad son cuatro: $\mu_A = \mu_0\mu_0\mu_0$, que se corresponde con uno de los subsegmentos; $\mu_B = \mu_1\mu_0\mu_0$, que se corresponde con tres de los subsegmentos; $\mu_C = \mu_1\mu_1\mu_0$, que se corresponde con otros tres de los subsegmentos; y, por último, $\mu_D = \mu_1\mu_1\mu_1$ que se corresponde con uno de los subsegmentos.
- En general, tras la n -ésima generación, el soporte inicial queda dividido en 2^n subsegmentos, cada uno con una medida μ_i . El número de medidas y su distribución dependen de la generación que se trate, pero siempre es posible establecer una clasificación como en los casos anteriores.
- En el límite $n \rightarrow \infty$, que, al igual que ocurría con la *curva de Koch*, es el que caracteriza el objeto, el soporte inicial se describe mediante un conjunto de puntos (esto es, subsegmentos infinitamente pequeños) cada uno de los cuales contiene una densidad de material $\rho(x)$ ¹⁹. A pesar de la diferencia cualitativa entre este estadio y los tres anteriores, sigue siendo posible mantener la misma descripción [4], de manera que el soporte inicial queda dividido en subconjuntos cada uno de los cuales caracterizado por un valor concreto de la densidad $\rho_i(x)$. Del análisis detallado de lo que sucede tras cada generación parece evidente que cada subconjunto $\rho(x)$ no está formado por un segmento de longitud finita, sino

¹⁹Nótese que al tomar el límite la secuencia de medidas $\{\mu_i\}$ se transforma en un continuo.

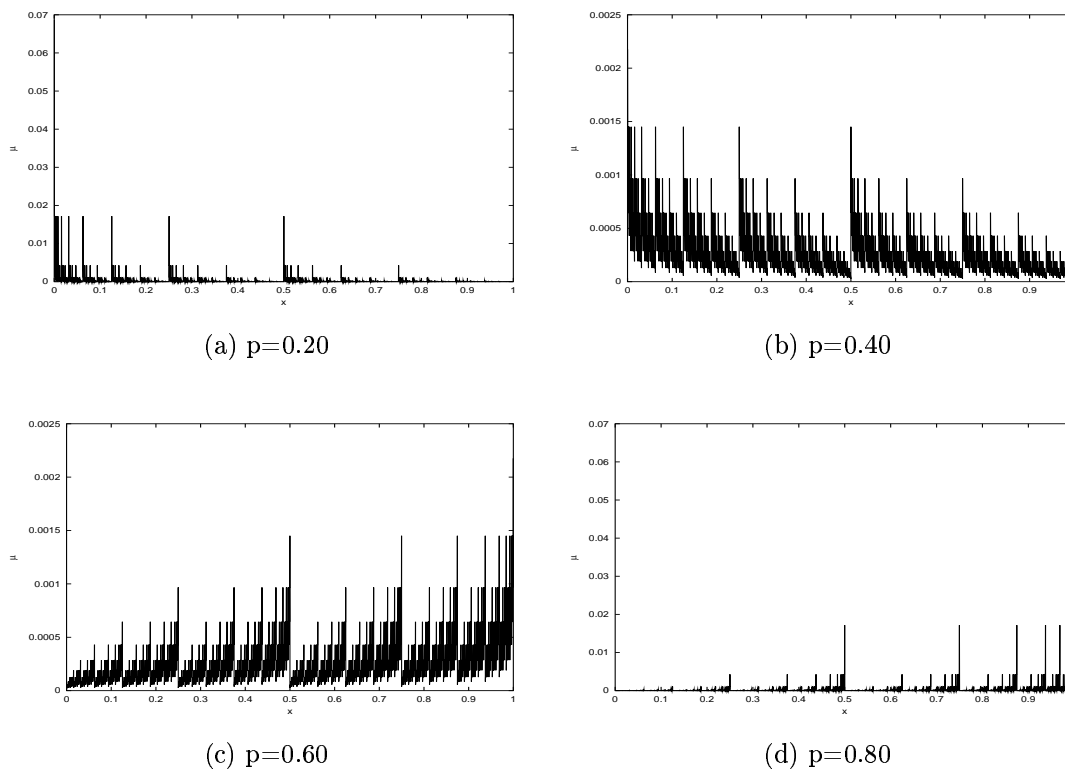


Figura 2.13: Proceso binomial multiplicativo.

por una serie de puntos inconexos. El resultado exacto es que cada subconjunto es un fractal de dimensión D_i menor que la unidad, al estilo del *Conjunto de Cantor*; al quedar el objeto caracterizado por diversos subconjuntos cada uno de ellos con una dimensión fractal diferente, se dice que es un *multifractal*.

En la figura 2.13 se representan cuatro procesos como el que se ha descrito con $p = 0.2$, $p = 0.4$, $p = 0.6$ y $p = 0.8$ respectivamente. En todos los casos se aprecia una cierta autosimilaridad, aunque no de una forma tan clara como en casos anteriores, ya que la altura media de los picos no es uniforme en todo el soporte. Esta no uniformidad es la principal manifestación de las propiedades explicadas con anterioridad y lo que provoca que estos objetos no puedan describirse con un único exponente fractal.

El ejemplo anterior pone claramente de manifiesto la necesidad que surge en algunas ocasiones de sustituir el exponente fractal por todo un espectro de exponentes. En dicho ejemplo, el objeto resultante en el límite $n \rightarrow \infty$ queda descrito mediante la caracterización de cada una de los subconjuntos que lo conforman, utilizando, por ejemplo, su dimensión fractal. El formalismo multifractal se encarga de formalizar

esta descripción en términos de una serie de funciones relativamente sencillas de calcular e interpretar, según se describe a continuación²⁰.

Considérese que se quiere estudiar una distribución de materia caracterizada por una densidad $\rho(x)$ y que se dispone para ello de un instrumento de medida cuya resolución máxima es una cierta magnitud δ . Dado que dicha resolución es finita, el resultado de la medición no puede ser nunca la propia densidad $\rho(x)$ sino una cierta aproximación:

$$\mu_t(\delta) = \int_t^{t+\delta} dx \rho(x), \quad (2.36)$$

de forma que el objeto queda descrito por una secuencia de medidas μ_t normalizada, por ejemplo, según:

$$\sum_{t=1}^{N(\delta)} \mu_t(\delta) = 1, \quad (2.37)$$

donde $N(\delta)$ es el número de medidas necesarias para cubrir todo el soporte a la resolución δ .

Con esta descripción, la magnitud $\mu_t(\delta)$ puede tratarse como la cantidad de materia μ_i de la que se habló al principio de la sección; la condición de normalización (2.37) procede de la normalización en la densidad:

$$\int dx \rho(x) = 1. \quad (2.38)$$

Según se ha visto en secciones precedentes, si la distribución de materia es auto-similar, la medida ha de quedar descrita mediante una función homogénea, es decir, ha de verificarse

$$\mu_t(\lambda\delta) \propto \lambda^\alpha \mu_t(\delta), \quad (2.39)$$

lo cual es posible si la medida escala con la resolución según una ley de potencias:

$$\mu_t(\delta) \propto \delta^\alpha. \quad (2.40)$$

Si se asume esta última relación, la medida total (que, dada la normalización que se está suponiendo, ha de ser igual a la unidad) puede calcularse

$$\mu = \sum_{t=1}^{N(\delta)} \delta^\alpha = N(\delta) \delta^\alpha. \quad (2.41)$$

²⁰En la exposición que sigue no se considera en ningún caso un gran rigor matemático; tan sólo se pretende dar una visión intuitiva no exenta de un mínimo de formalidad.

Por otro lado, si, por analogía con el ejemplo expuesto al principio de esta sección, se considera que la distribución de celdas con media no nula es un fractal, ha de verificarse, además, la relación (2.9), por lo que, atendiendo a la normalización $\mu = 1$, es inmediato que $\alpha = D$, donde D es la dimensión del soporte $N(\delta) \propto 1/\delta^D$. De ese modo, la distribución de materia queda perfectamente determinada por un único parámetro: la dimensión fractal del soporte, y el objeto no puede considerarse un *multifractal*.

La aparición de la multifractalidad se produce cuando se relaja un poco la condición de autosimilaridad (2.39). Con dicha condición se está imponiendo que toda la materia se distribuya de manera uniforme sobre todo el soporte, es decir, que todas las celdas con medida no nula contengan la misma cantidad de materia. Evidentemente, esto no se corresponde ni con lo que sucede en la naturaleza (por ejemplo en la distribución de un mineral sobre una roca compuesta), ni con el ejemplo que se propuso al comienzo de la sección. En este último caso se vio que el soporte total podía dividirse en varios subconjuntos, cada uno de los cuales caracterizado por una determinada medida o densidad; en términos de autosimilaridad, esa geometría puede describirse

$$\mu_t(\lambda\delta) = \lambda^{\alpha(t)} \mu_t(\delta), \quad (2.42)$$

lo que se verifica si

$$\mu_t(\delta) \propto \delta^{\alpha(t)}. \quad (2.43)$$

El hecho de que el exponente α no sea único para todo el soporte, sino que dependa del punto t , indica la existencia de varias regiones con diferente exponente de escalado, es decir, caracterizadas por una medida diferente. La medida total, en este caso, es igual a

$$\mu = \sum_{t=1}^{N(\delta)} \delta^{\alpha(t)} \quad (2.44)$$

de forma que ahora la suma ya no es tan sencilla como en los casos anteriores, debido a la dependencia en t del exponente en el sumatorio. Esta dependencia, no obstante, puede obviarse si se considera que con ella sólo se quiere hacer notar que en el soporte hay zonas con diferente escalado, por lo cual se puede escribir

$$\mu = \sum_{\alpha} N(\alpha, \delta) \delta^{\alpha}, \quad (2.45)$$

donde $N(\alpha, \delta)$ es el número de celdas que escalan con un exponente determinado α a una resolución δ . Si, además, se supone que cada una de estas regiones caracterizadas por un exponente α es un fractal, ha de verificarse

$$N(\alpha, \delta) \propto \delta^{-f(\alpha)}, \quad (2.46)$$

que no es más que la expresión (2.9) donde cada región tiene una dimensión $D_\alpha = f(\alpha)$. De este modo, la geometría del objeto queda caracterizada no por un exponente D , sino por todo un espectro de exponentes $f(\alpha)$ ²¹.

A pesar de su claridad conceptual, la función $f(\alpha)$ no resulta muy útil a la hora de hacer cálculos. Para ese fin, es mucho más adecuado describir un objeto multifractal a la manera de la física estadística, esto es, mediante una función de partición

$$Z(q, \alpha) = \sum_{t=1}^{N(\delta)} [\mu_t(\delta)]^q \quad (2.47)$$

que depende del exponente de escalado de cada región, α , y del momento q . Utilizando los resultados anteriores, esta función de partición puede escribirse:

$$Z(q, \alpha) = \sum_{\alpha} N(\alpha, \delta) \delta^{q\alpha} = \sum_{\alpha} \delta^{q\alpha - f(\alpha)}. \quad (2.48)$$

Esta suma puede calcularse con facilidad si se toma el límite de máxima resolución, que es como en realidad queda caracterizado el objeto en estudio. En dicho límite se verifica

$$Z(q, \alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d\alpha \delta^{q\alpha - f(\alpha)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d\alpha \frac{1}{\delta^{f(\alpha) - q\alpha}}, \quad (2.49)$$

de manera que el integrando es singular si $f(\alpha) - q\alpha > 0$. Así pues, la integral está dominada por el valor de α que maximiza a dicha expresión, de modo que si

$$\tau(q) = \max_{\alpha} \{f(\alpha) - q\alpha\}, \quad (2.50)$$

la función de partición se puede escribir

$$Z(q, \alpha) \propto \delta^{-\tau(q)}, \quad (2.51)$$

de forma que el objeto queda ahora caracterizado por la *secuencia de exponentes de masa*, $\tau(q)$. Esta función puede calcularse de una forma muy sencilla

$$\tau(q) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log Z(q, \alpha)}{\log \delta}, \quad (2.52)$$

²¹Nótese que esta descripción es una generalización del formalismo fractal en tanto en cuanto un fractal simple queda caracterizado por $f(\alpha) = D$, donde D es su dimensión, si $\alpha = D$, y $f(\alpha) = 0$ para $\alpha \neq D$

por lo que resulta mucho más práctica que el espectro de singularidades $f(\alpha)$. Por ejemplo, para el proceso binomial multiplicativo es muy fácil obtener

$$\tau(q) = \frac{\log [p^q + (1-p)^q]}{\log 2}. \quad (2.53)$$

La *secuencia de exponentes de masa*, $\tau(q)$, resulta, no obstante, más complicada de entender desde un punto de vista conceptual; genéricamente, puede decirse que los momentos q altos están relacionados con las regiones en las que la medida es grande y viceversa, de manera que la forma de la función $\tau(q)$ da una idea general de la distribución de materia. De todos modos, dicha función está relacionada con el *espectro de singularidades*, $f(\alpha)$, mediante una transformada de Legendre

$$\tau(q) = f[\alpha(q)] - q\alpha(q) \quad (2.54)$$

$$\alpha(q) = -\frac{d}{dq}\tau(q) \quad (2.55)$$

por lo que, una vez obtenida la primera puede calcularse inmediatamente la segunda e interpretar más claramente el resultado.

2.4.1 Multifractales y series temporales.

Según se acaba de explicar, el formalismo multifractal está especialmente indicado para estudiar la distribución de una cierta magnitud sobre un soporte. No obstante, al igual que ocurría con el formalismo (mono)fractal, éste también puede utilizarse para fenómenos naturales caracterizados por un registro temporal; de hecho, la existencia de señales como el ruido $1/f$, para las cuales la descripción mediante el parámetro de Hurst no parece suficiente, anima a generalizar el citado formalismo al estudio de dichas señales.

Una forma muy habitual de caracterizar señales temporales es mediante el estudio de sus momentos

$$\Delta(\tau, q) = \langle |x(t+\tau) - x(t)|^q \rangle, \quad (2.56)$$

de una manera semejante a cómo se estudia la medida $\mu_t(\delta)$ ²². La manera más habitual de hacerlo es buscando una cierta autosimilaridad

$$\Delta(\tau, q) \propto \tau^{qs(q)}, \quad (2.57)$$

²²Nótese que una señal temporal puede presentar tanto valores positivos como negativos, por lo que la presencia de los valores absolutos es necesaria para poder encontrar propiedades de escalamiento como las enunciadas en la sección anterior.

de modo que si $\zeta(q) = H \forall q$ la señal es (mono)fractal y, por lo tanto, caracterizable por el exponente de Hurst H .

Otra forma de abordar el estudio, que es la que se va a utilizar en este trabajo, consiste en transformar la señal original de modo que pueda tratarse de la misma manera que las que se analizaban en la sección anterior. Para poder proceder de ese modo es necesario que se cumplan los siguientes puntos:

1. Que la señal $x(t)$ sea tal que $x(t) \geq 0 \forall t$; de ese modo se puede identificar cada $x(t)$ con una medida μ_t de máxima resolución.
2. Que se cumpla

$$\int dt x(t) = 1, \quad (2.58)$$

de forma que la señal esté normalizada

$$\mu = \sum_t \mu_t = 1. \quad (2.59)$$

En principio, como se puede apreciar, por ejemplo, en la figura 2.2, una señal temporal no tiene por qué cumplir ninguno de estos requisitos. Sin embargo, siempre puede construirse una nueva señal $y(t)$ semejante a la primera y de acuerdo con ambas exigencias procediendo del siguiente modo:

1. Se genera una nueva señal $\tilde{x}(t)$ a partir de la primera mediante

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \sigma, \quad (2.60)$$

con $\sigma \leq \min [x(t)]$. Dicha señal es siempre positiva.

2. Se normaliza la señal anterior

$$y(t) = \frac{\tilde{x}(t)}{\mu}, \quad (2.61)$$

donde

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \quad (2.62)$$

y donde N es el número de puntos de la señal original.

La señal resultante $y(t)$ se diferencia de la original $x(t)$ en ciertas propiedades, como el valor medio y un factor de escala global en las fluctuaciones. Sus correlaciones a largo alcance, que son las que caracterizan en última instancia la naturaleza del proceso, permanecen, sin embargo, inalteradas, por lo que cualquier conclusión que se obtuviere a ese respecto con la función $y(t)$ sería perfectamente aplicable al proceso original $x(t)$.

Capítulo 3

Caos cuántico.

3.1 Conceptos básicos asociados al caos cuántico.

El caos cuántico es una disciplina de muy reciente creación y objeto aún de diversas controversias; desde su propio nombre (otros, como caología cuántica, han sido propuestos en su lugar), hasta la mera posibilidad de que exista algo semejante al caos en mecánica cuántica, son muchos los asuntos que quedan aún por resolver. No obstante, durante los últimos veinticinco años¹ se han producido suficientes avances como para que el estudio del caos en sistemas cuánticos tenga la base suficiente para constituir una disciplina de gran interés y aplicabilidad, desde la estructura nuclear hasta la física mesoscópica o de la materia condensada.

3.1.1 Caos y mecánica clásica.

La mecánica clásica es determinista: las leyes de Newton son tales que, conocida la posición y la velocidad de una partícula en un instante determinado, es posible conocer la evolución de la citada partícula en cualquier instante futuro. Este punto de vista era predominante en el siglo XIX, cuando la interpretación mecanicista de la realidad dominaba sobre cualquier otra. Laplace, uno de los grandes desarrolladores de la mecánica, expresó en 1814 este punto de vista con la siguiente cita: *Una inteligencia que conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen,... podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más pequeño; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes a sus ojos.*

A pesar del optimismo existente, la utopía de esta inteligencia mecanicista, que

¹Puede tomarse como fecha de partida el año 1977, en el cual M. V. Berry publicó su estudio semiclásico de sistemas clásicamente integrables.

no es otra que el sueño por del conocimiento omnímodo, no pudo resistir los avances que se sucedieron en la física durante los años siguientes. Ya en la segunda mitad del siglo XIX se conocía la existencia de sistemas muy complejos, con muchos grados de libertad, cuya descripción detallada se tenía por imposible y cuyo estudio se abordaba por medio de técnicas probabilísticas. Estos sistemas, no obstante, no se consideraban entonces como un desafío serio a la visión mecanicista de la realidad; la necesidad de describirlos mediante teorías probabilísticas no se creía sino la expresión de una ignorancia vencible en principio.

Este efugio del mecanicismo no fue suficiente, sin embargo, para anteponerse a la nueva física del siglo XX. En primer lugar se produjo el nacimiento de la mecánica cuántica, que involucra una descripción intrínsecamente probabilística de la realidad. A esta revolución, los partidarios del mecanicismo reaccionaron de varias formas: unos arguyeron que para la inmensa mayoría de los sistemas macroscópicos los efectos cuánticos no son importantes, por lo que, desde un punto de vista práctico, el determinismo y la idea de la total predicibilidad podían seguir manteniéndose; otros, no contentos con este nuevo subterfugio, afirmaron entonces (y siguen afirmando hoy) que la mecánica cuántica es una teoría incompleta y que han de existir leyes deterministas que subyacen a ella².

A pesar de esta contumaz resistencia, que parecía poder seguir manteniéndose eternamente, el golpe final al mecanicismo llegó al fin durante la segunda mitad del siglo XX, y llegó inopinadamente desde la propia mecánica newtoniana, cuando se descubrió la existencia del caos determinista. Desde ese momento quedó patente que la impredicibilidad clásica no aparece únicamente en sistemas de muchos grados de libertad, como consecuencia de la ingente dificultad de establecer en detalle la situación de todas las componentes de un sistema complejo, sino que puede aparecer también en sistemas muy sencillos, con muy pocos grados de libertad. La razón de esta aparente paradoja, en la que la complejidad parece emerger sin motivo alguno de la sencillez, está en la no linealidad de las ecuaciones de la dinámica clásica, que da lugar a una fenomenología rica, compleja y caótica, hasta el punto de imposibilitar la predicción a medio y largo plazo.

El caos determinista ha pasado hoy en día de ser un fenómeno incomprensible a ser un fenómeno cuyos fundamentos y propiedades se conocen bastante bien. A pesar de ello resulta aún bastante complicado establecer una definición clara y precisa de lo que es el caos. Por lo general, suele decirse que el caos aparece cuando se presentan unas características definitorias, que se pueden resumir en las siguientes:

1. Las leyes de evolución del sistema son deterministas.
2. El sistema presenta un comportamiento aperiódico; su densidad espectral no

²Este punto de vista queda muy bien expresado con la célebre frase de Einstein: *Dios no juega a los dados*.

está compuesta por un conjunto discreto de frecuencias, sino que es un continuo.

3. Existe una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales del sistema: una pequeña diferencia en el estado inicial del sistema produce una separación exponencial de las trayectorias. Esta separación se mide mediante el exponente de Lyapunov, que se define

$$\lambda(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{d(\vec{x}_0, t)}{d(\vec{x}_0, 0)}, \quad (3.1)$$

donde $d(\vec{x}_0, t)$ es la separación entre dos trayectorias cuyas condiciones iniciales están en un entorno de \vec{x}_0 en un tiempo t . Esta gran sensibilidad a las condiciones iniciales produce que los errores intrínsecos a cualquier medición crezcan exponencialmente y que al cabo de un tiempo sea imposible discernir entre las distintas trayectorias del sistema.

4. El sistema está confinado. Al ser el espacio de fases finito, al cabo de un cierto tiempo dos trayectorias separadas vuelven a estar muy cerca la una de la otra; la separación medida por los exponentes de Lyapunov es tan solo local. Esta propiedad se conoce con el nombre de *mixing*.

El caos determinista es ubicuo en la naturaleza: puede aparecer tanto en sistemas sencillos (con muy pocos grados de libertad), como en sistemas de muchos cuerpos; tanto en sistemas disipativos, como en sistemas hamiltonianos. Desde el punto de vista de la conexión con la mecánica cuántica son estos últimos los realmente importantes; resulta de gran interés, en consecuencia, conocer cómo se manifiesta el caos en ellos.

El caos hamiltoniano está caracterizado por el teorema KAM. Sin entrar en grandes detalles, este teorema viene a explicar qué le sucede a un sistema cuando deja de ser integrable. Para comprenderlo, lo más sencillo es estudiar un hamiltoniano con un parámetro libre que determina su integrabilidad, por ejemplo

$$H = H_0 + \epsilon H_1 \quad (3.2)$$

donde H_0 es integrable, H_1 no lo es, y ϵ es un número. En este ejemplo, si $\epsilon = 0$ el sistema es integrable, sus trayectorias son periódicas y la existencia de tantas constantes de movimiento como grados de libertad, n , obliga a que todas ellas estén sobre un toro $2n$ -dimensional. En el caso contrario hay menos constantes de movimiento que grados de libertad, y las trayectorias no tienen por qué estar confinadas en estructuras tan sencillas. Un estudio detallado muestra que, según ϵ se va haciendo más grande, todos los toros se van destruyendo hasta que llegado un momento las trayectorias quedan distribuidas por todo el espacio de fases.

Esta aparición paulatina del caos permite establecer una gradación o jerarquía en éste: los sistemas hamiltonianos caóticos se pueden dividir en *sistemas ergódicos*, *sistemas mixing* y *sistemas K*, cada uno de los cuales presenta un nivel de caos mayor que el anterior; el caos en los sistemas hamiltonianos queda, así, muy bien caracterizado.

3.1.2 Caos y mecánica cuántica.

A la vista de las propiedades que caracterizan el caos en mecánica clásica parece bastante improbable que se dé algo parecido en mecánica cuántica. En primer lugar, la ecuación de Schrödinger es lineal, por lo que no ha lugar para la rica y compleja fenomenología asociada a la no linealidad de las ecuaciones de la mecánica clásica. En segundo lugar, el principio de incertidumbre imposibilita la definición de trayectorias precisas a la manera de la mecánica clásica, por lo que la descripción del caos en términos de trayectorias, condiciones iniciales y exponentes de Lyapunov tampoco es posible. Sin embargo, el principio de correspondencia establece un vínculo entre ambas mecánicas cuando las escalas longitudinales son mayores que la longitud de onda de de Broglie: la mecánica clásica dimana de la cuántica en estas condiciones; el caos determinista, por lo tanto, debe emanar también de ella.

Esta aparente paradoja es la que hace que la definición y el estudio del caos cuántico sean aún objeto de controversia. En realidad, lo que ocurre es que no existen todavía criterios precisos para definir el caos en sistemas cuánticos tal y como se hace en los clásicos, lo que da lugar a la existencia de múltiples formas de abordar el problema.

Una posibilidad para el estudio del caos en sistemas cuánticos consiste en sustituir las trayectorias clásicas por la evolución temporal de la función de onda cuántica, que sí queda unívocamente determinada por la ecuación de Schrödinger. La linealidad de esta ecuación implica, sin embargo, que dicha evolución es unitaria, por lo que, dos condiciones iniciales diferentes $|\phi(0)\rangle$ y $|\psi(0)\rangle$ no se separan exponencialmente, sino que se verifica

$$|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\phi(0)|\psi(0)\rangle|^2. \quad (3.3)$$

La idea que subyace a la separación exponencial de las trayectorias, esto es, la sensibilidad extrema a pequeños cambios, puede también formularse no en función del estado inicial de la función de onda, sino mediante el estudio de lo que le sucede al sistema si se introducen pequeñas perturbaciones en el hamiltoniano [37]. En este sentido se han encontrado recientemente algunas relaciones entre el ritmo de decoherencia de un sistema cuántico y el exponente de Lyapunov de su análogo clásico [38]. No obstante, hasta el momento sólo se han conseguido resultados parciales en algunos sistemas concretos: no existe aún una teoría que describa cómo se

manifiestan las pequeñas perturbaciones en el hamiltoniano de una manera genérica; la definición del caos cuántico en estos términos, por lo tanto, no es todavía posible.

Una alternativa más práctica y más fructífera consiste en estudiar la mecánica cuántica de sistemas clásicamente caóticos. Este es el punto de vista que se considera principalmente en la actualidad y el que llevó a M. V. Berry a proponer el término *caología cuántica* (*quantum chaology*) [39], ya que con él no se pretende encontrar una definición cuántica del caos, sino estudiar el caos desde el punto de vista cuántico.

El principal método de estudio de la mecánica cuántica de los sistemas clásicamente caóticos es la aproximación semiclásica. La característica fundamental de esta aproximación es que, según advirtió ya Einstein en 1917 [17], la cuantización semiclásica estándar no tiene sentido para sistemas no integrables. En la actualidad, este problema se resuelve mediante el uso de la fórmula de la traza de Gutzwiller [16], que permite calcular un observable puramente cuántico, la densidad de niveles, a partir de las órbitas periódicas del sistema clásico. La citada fórmula descompone la densidad en una parte suave y una parte fluctuante

$$\rho_{sc}(E) = \bar{\rho}(E) + \rho_{fl}(E), \quad (3.4)$$

donde el subíndice *sc* indica densidad semiclásica. La parte suave se puede calcular en la aproximación de Thomas-Fermi, mientras que la parte fluctuante se obtiene a partir de la acción clásica de las órbitas y de sus propiedades de estabilidad; es esta parte fluctuante la que resulta fundamental a la hora de caracterizar el caos cuántico.

3.1.3 Caos y fluctuaciones en el espectro de energías.

La descomposición de la densidad de estados en una parte suave y en otra fluctuante, según la fórmula de la traza de Gutzwiller, es lo que ha permitido encontrar una magnitud puramente cuántica general adecuada para discernir entre un sistema regular y otro caótico: las fluctuaciones del espectro de energías. Actualmente, el estudio de las propiedades estadísticas de las citadas fluctuaciones es la herramienta principal a la hora de determinar el nivel de caos de un sistema cuántico³. Este estudio, no obstante, presenta algunas dificultades. Una de ellas, quizá la más importante, es que para que los resultados sean significativos, es decir, para que permitan comparar sistemas con distinta dinámica, es necesario separar por completo la parte fluctuante de la parte suave de la densidad, que caracteriza al sistema en concreto. La herramienta más usual a la hora de abordar esta tarea es el proceso de *unfolding* o *reescalado*, que se lleva utilizando desde que Berry lo propuso para obtener propiedades universales en las fluctuaciones de los sistemas clásicamente

³Existen otras, como la localización dinámica de las funciones de onda; en este trabajo no se tendrán en cuenta.

integrables [7]. Dicho método no es, no obstante, ni mucho menos perfecto⁴, y se estudiará en detalle más adelante; por el momento, y para todos los resultados que se presentan en esta sección, se supondrá que dicho procedimiento se ha llevado a cabo adecuadamente.

La caracterización del caos cuántico mediante el estudio de las fluctuaciones en el espectro de energías se ha desarrollado fundamentalmente durante los últimos treinta años. Las principales contribuciones a esta disciplina son tres: la conjetura de Percival, en 1973 [18], el trabajo de Berry, en 1977 [7], y la conjetura de Bohigas, Giannoni y Schmit, en 1984 [8]; sus aspectos más importantes se describen a continuación:

La conjetura de Percival parte directamente de la fórmula de la traza de Gutzwiller y dice lo siguiente: existen dos tipos de espectro de energías para un sistema con más de un grado de libertad. Si el sistema análogo clásico es integrable, los niveles del espectro no están correlacionados, de forma que al variar un parámetro libre del sistema los niveles pueden cruzarse. En cambio, si el análogo clásico es caótico aparece una cierta correlación entre los niveles que impide los citados cruces; se dice entonces que el sistema presenta repulsión entre niveles y que su espectro es *rígido*.

Esta conjetura parece en principio suficiente para discernir entre un sistema cuántico regular y otro caótico por la presencia de correlaciones en el espectro de energías; no especifica, sin embargo, si las correlaciones características de los sistemas caóticos tienen propiedades universales o si es su mera presencia la que basta para identificarlos. Los trabajos posteriores de Berry y Bohigas *et al.* sirvieron para dilucidar esta cuestión.

M. V. Berry estudió mediante la aproximación semiclásica sistemas genéricos clásicamente integrables, con el fin de corroborar o falsar la conjetura de Percival. De su estudio se extraen dos conclusiones fundamentales, que corroboran parcialmente la citada conjetura:

1. La secuencia de espaciamentos de un espectro, esto es, la secuencia de distancias entre un nivel y el siguiente:

$$s_i = E_{i+1} - E_i \quad (3.5)$$

sigue una distribución de Poisson

$$P(s) = \exp(-s). \quad (3.6)$$

2. No existe correlación alguna entre los niveles del espectro en los sistemas integrables: la densidad espectral de la secuencia de espaciamentos es constante

⁴En realidad no puede existir ningún método infalible para separar la parte suave de la parte fluctuante. Más adelante se propondrán algunos criterios para optimar dicha separación.

(salvo fluctuaciones), es decir, dicha secuencia se comporta como un ruido blanco.

El estudio de Berry se realizó únicamente para el límite semiclásico, pero sus conclusiones se han mostrado igualmente aplicables en sistemas puramente cuánticos. Existen algunas excepciones puntuales, como el oscilador armónico⁵; el resultado es suficientemente general, no obstante, como para que pueda ser utilizado como criterio para identificar aquellos sistemas cuánticos que pueden considerarse no caóticos.

La caracterización de las fluctuaciones de los sistemas cuánticos con análogo clásico caótico llegó siete años más tarde, cuando Bohigas, Giannoni y Schmidt propusieron su famosa conjetura (conocida como conjetura BGS), en la que relacionaban el caos cuántico con la presencia de un determinado tipo de correlaciones, concretamente las predichas por la teoría de matrices aleatorias. Éste puede considerarse, quizá, el resultado más importante en caos cuántico; con él no solamente se corrobora la conjetura de Percival, sino que, además, se determina el tipo de correlaciones que caracterizan a los sistemas caóticos cuánticos.

Hoy en día existen muchos resultados experimentales que corroboran la conjetura BGS, aunque hasta el momento no se ha conseguido encontrar ninguna demostración satisfactoria; todos lo que se ha intentado al respecto se basa en algún tipo de aproximación semiclásica cuando $\hbar \rightarrow 0$. Existen también, empero, algunos contraejemplos más generales que en el caso del trabajo de Berry, por lo que, a pesar de su utilidad, este resultado genera más controversia que el anterior. En cualquier caso, por el momento se sigue considerando esta conjetura como un punto de referencia.

3.2 La teoría de las matrices aleatorias.

A la vista de la conjetura BGS, es evidente que la teoría de las matrices aleatorias cobra vital importancia en el estudio del caos cuántico. Su origen, sin embargo, es anterior al nacimiento de esta disciplina como tal y, por supuesto, su objetivo era completamente diferente; lo que se pretendía con ella no era más que sistematizar el estudio de sistemas cuánticos muy complejos, como los núcleos atómicos pesados.

Considérese un experimento de dispersión con un núcleo pesado como blanco. Las colisiones que involucran la captura del proyectil, por ejemplo un neutrón, están caracterizadas por un espectro de resonancias muy complicado, en el que se manifiesta la estructura de los niveles de más baja excitación del núcleo blanco. Para entender qué es lo que sucede es necesario conocer cómo es este espectro de

⁵Resultados que hemos obtenido muy recientemente muestran que es posible encontrar un hamiltoniano integrable que dé lugar a un espectro cualquiera. Una pequeña perturbación sobre dicho hamiltoniano produce, empero, que el espectro pase a comportarse según predice Berry.

resonancias; en muchas ocasiones, sin embargo, el conocimiento exacto de un espectro determinado, que puede conseguirse mediante modelo teórico muy complicado y con el uso de largos programas de ordenador, no resulta ni útil ni interesante para comprender la física involucrada.

El problema de la descripción de este tipo de procesos es muy semejante al de describir un sistema con muchos grados de libertad mediante la física clásica. Ya en el siglo XIX quedó patente que una descripción muy detallada, capaz de predecir el movimiento exacto de cada uno de los componentes del sistema, no resultaba nada adecuada; en su lugar, un modelo mucho más sencillo, capaz de caracterizar probabilísticamente el sistema en función de unas pocas variables (temperatura, presión...), resultaba mucho más práctico para entender e incluso predecir el comportamiento del sistema. Esta especie de revolución ideológica llevó a la creación de la mecánica estadística, que es hoy en día fundamental para comprender el comportamiento de los sistemas complejos; con la teoría de las matrices aleatorias se pretendía establecer algo semejante para con los núcleos atómicos.

Como se acaba de indicar, la mecánica estadística se caracteriza por su renuncia a un conocimiento exacto del sistema asumiendo equiprobables infinidad de configuraciones diferentes. En su analogía formal con ella, la teoría de las matrices aleatorias se construye de una manera muy semejante; en concreto, dado el desconocimiento de los detalles de la interacción entre nucleones, se asume que todas las leyes de interacción son equiprobables. Esta asunción imposibilita, evidentemente, la descripción en detalle del espectro de un núcleo concreto, pero resulta muy fructífera a la hora de caracterizar la complejidad de los espectros de este tipo de núcleos en general mediante tan sólo unos pocos parámetros.

Las similitudes entre la mecánica estadística y la teoría de matrices aleatorias no se limitan únicamente a la forma genérica de su formulación. Al igual que en mecánica estadística existen varias colectividades, según el sistema esté aislado o intercambie energía o materia con el exterior, en la teoría de las matrices aleatorias se definen principalmente tres colectividades diferentes⁶, según las simetrías generales del sistema. Los elementos de cada colectividad son hamiltonianos matriciales, cuyos elementos son variables aleatorias sin más restricciones que las necesarias para garantizar conservación de las simetrías. Las colectividades principales son las siguientes:

1. Colectividad GOE (*Gaussian, Orthogonal Ensemble*), aplicable a sistemas con simetría bajo inversión temporal cuya interacción es independiente del espín. Está representada por matrices invariantes bajo transformaciones ortogonales cuyos elementos están generados mediante una distribución de probabilidad gaussiana; son matrices reales y simétricas.

⁶Existen más colectividades que las que se mencionan en este trabajo, como por ejemplo las *COE*, *CUE* y *CSE*, pero su utilización es mucho más marginal.

2. Colectividad GUE (*Gaussian, Unitary Ensemble*), aplicable a sistemas que no presentan simetría bajo inversión temporal y cuya interacción es también independiente del espín. Está representada por matrices invariantes bajo transformaciones unitarias cuyos elementos están generados mediante una distribución de probabilidad gaussiana; son matrices complejas y hermíticas.
3. Colectividad GSE (*Gaussian, Symplectic Ensemble*), aplicable a sistemas con espín 1/2 y simetría bajo inversión temporal. Está representada por matrices invariantes bajo transformaciones simplécticas cuyos elementos están generados mediante una distribución de probabilidad gaussiana; son matrices hermíticas constituidas por cuaterniones, que pueden construirse mediante matrices complejas de dimensión doble que la del sistema.

Las propiedades matemáticas de estas colectividades son muy parecidas en los tres casos. En general, para que se cumplan las invariancias y las simetrías es necesario que la distribución de probabilidad de los elementos de las matrices que las representan verifique:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = C \exp [-BTr(H) - ATr(H^2)], \quad (3.7)$$

donde la constante B puede tomarse cero sin pérdida de generalidad, y la constante C queda fijada por normalización. De este modo, las expresiones de la distribución de probabilidad quedan:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp \left\{ -A \sum_{n,m} H_{nm}^2 \right\} \quad (3.8)$$

para el GOE,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp \left\{ -A \sum_{n,m} [(H_R)_{nm}^2 + (H_I)_{nm}^2] \right\} \quad (3.9)$$

donde H_R y H_I son la parte real y la parte imaginaria del hamiltoniano respectivamente, para el GUE, y

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp \left\{ -A \sum_{n,m} [(H_0)_{nm}^2 + (H_1)_{nm}^2 + (H_2)_{nm}^2 + (H_3)_{nm}^2] \right\} \quad (3.10)$$

donde H_0, H_1, H_2 y H_3 son las componentes cuaterniónicas, para el GSE⁷.

Estas tres distribuciones de probabilidad dan lugar a un espectro de autoenergías que se caracteriza por la presencia de correlaciones entre los distintos niveles (esto es, cada nivel de energía no puede generarse mediante una variable aleatoria independiente). La distribución de probabilidad de dicho espectro puede escribirse de una forma compacta para las tres colectividades:

$$P(E_1, \dots, E_N) \propto \prod_{n>m} (E_n - E_m)^\nu \exp\left(-A \sum_n E_n^2\right), \quad (3.11)$$

donde el exponente ν vale 1 para GOE, 2 para GUE y 4 para GSE. Este exponente está relacionado directamente con la repulsión entre niveles que se mencionaba en la sección anterior⁸; se volverá sobre esto un poco más adelante.

La distribución de probabilidad para los autovalores da lugar a espectros de niveles cuya densidad puede describirse mediante una parte suave más una parte fluctuante. De la ecuación (3.11) se deduce inmediatamente que en la parte fluctuante ha de haber correlaciones no nulas; la parte suave viene determinada por

$$\rho(E) = \begin{cases} \frac{2A}{\pi\nu} \sqrt{\frac{\nu N}{A} - E^2} & |E| \leq \sqrt{\frac{\nu N}{A}}; \\ 0 & |E| \geq \sqrt{\frac{\nu N}{A}}, \end{cases} \quad (3.12)$$

donde N es la dimensión del sistema [2].

Esta forma de la densidad es característica de la teoría de matrices aleatorias y no se da en sistemas físicos reales; es la parte fluctuante la que según la conjetura BGS describe adecuadamente las propiedades fundamentales de los espectros de los sistemas cuánticos caóticos.

3.2.1 Análisis espectrales.

La presencia de un término suave y otro fluctuante en la densidad de estados de las tres colectividades de la RMT es lo que hace posible que esta teoría describa con propiedad los espectros de sistemas cuánticos caóticos. Para poder comparar los resultados que proporciona esta teoría con datos experimentales o modelos teóricos de sistemas cuánticos complejos es necesario definir algunos parámetros estadísticos que midan ciertas propiedades globales de los espectros; éstos deben servir, además, para caracterizar la complejidad de un espectro con unas pocas cantidades, a la manera de la temperatura o la presión en mecánica estadística. Siguiendo la

⁷Más adelante se describen con más detalle estas distribuciones de probabilidad.

⁸En la propia ecuación (3.11) se pone de manifiesto que el término $(E_n - E_m)^\nu$ implica que la probabilidad de que dos niveles tengan la misma energía es nula, lo cual puede entenderse directamente como una repulsión.

terminología propuesta por Metha [2], un estadístico espectral se define como un número W tal que puede calcularse directamente a partir del espectro de niveles y cuya media y varianza son conocidas mediante un modelo teórico. Existen muchos estadísticos que verifican estas propiedades; los más conocidos y utilizados son la $P(s)$ y la Δ_3 .

La $P(s)$, o distribución de espaciamentos entre próximos vecinos, mide las correlaciones de corto alcance. Este estadístico no es más que la distribución de probabilidad de los espaciamentos, que se definen según la ecuación (3.5). Según se vio con anterioridad, la $P(s)$ es una distribución de Poisson para un sistema regular. En el caso de las colectividades de matrices aleatorias, su cálculo, aunque posible, es bastante complicado; suele considerarse por ello una aproximación válida para matrices con $N = 2$ que funciona bastante bien para una dimensión N genérica. Los resultados de esta aproximación para cada una de las colectividades son:

$$P(s) = \frac{\pi}{2}s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) \quad (3.13)$$

para el GOE,

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2}s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi}s^2\right) \quad (3.14)$$

para el GUE, y

$$P(s) = \frac{2^{18}}{3^6\pi^3}s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi}s^2\right) \quad (3.15)$$

para el GSE.

Lo más interesante de estas tres expresiones es que la repulsión entre niveles aparece de una forma muy semejante a cómo aparecía en la ecuación (3.11); este estadístico resulta, por lo tanto, muy adecuado para detectar y cuantificar la presencia de repulsión en un espectro.

La Δ_3 es el estadístico más habitual para medir las correlaciones de largo alcance. Se define a partir de la densidad de niveles acumulada⁹ de la siguiente forma:

$$\Delta_3(a, L) = \frac{1}{L} \min_{A,B} \int_a^{a+L} [N(E) - AE - B]^2 dE, \quad (3.16)$$

de manera que es función de dos parámetros: una magnitud L , que es la distancia entre los dos niveles entre los cuales se quiere determinar la correlación, y un número a , que identifica la posición de esos dos niveles en el espectro. En la práctica, el valor del citado parámetro a carece de importancia, ya que, al estar el espectro

⁹En la siguiente sección, al comentar el proceso de reescalado, se definirá con rigor esta magnitud.

reescalado, sus propiedades estadísticas no han de depender de la zona de estudio. Para determinar las correlaciones suele utilizarse, en consecuencia, un promedio $\Delta_3(L)$ calculado en intervalos $[0, L]$, $[L/2, 3L/2]$, $[L, 2L]$ [8].

Esta magnitud, cuya definición es un tanto abstrusa, es bastante útil a la hora de determinar las correlaciones de largo alcance. Para un espectro regular, su valor es:

$$\Delta_3(L) = \frac{L}{15} \quad (3.17)$$

en todo el espectro; para las colectividades de matrices aleatorias vale, en cambio

$$\Delta_3(L) \sim \frac{1}{\pi^2} \log L \quad (3.18)$$

para L grande, donde la constante de proporcionalidad depende de la colectividad que se esté considerando. El hecho de que el crecimiento con L sea más lento para las colectividades de matrices aleatorias que para los sistemas regulares es debido a la correlación que introduce la repulsión de niveles; con esta magnitud se pone de manifiesto que dicha correlación actúa organizando el espectro, de forma que la distancia entre los niveles es más uniforme. Esta propiedad, característica de los espectros RMT (y de los sistemas cuánticos caóticos, según la conjetura BGS) se denomina *rigidez espectral*; en ocasiones se dice también que el espectro tiene una cierta estructura *cuasicristalina*.

3.3 El procedimiento de reescalado.

Como ya se comentó en su momento, para poder comparar las propiedades estadísticas de espectros correspondientes a sistemas físicos distintos, es necesario descomponer la densidad de estados en una parte suave y una parte fluctuante; sólo la segunda de ellas permite establecer tal comparación. El procedimiento habitual para realizar esta tarea recibe el nombre de *unfolding* o *reescalado*¹⁰ y no es, ni mucho menos, trivial. De hecho, este procedimiento está íntimamente relacionado con la remoción de tendencias estacionales en el análisis de series temporales, que causa habitualmente verdaderos quebraderos de cabeza dado que no existe ningún criterio unívoco para discernir entre tendencia y fluctuaciones.

El procedimiento de reescalado consiste fundamentalmente en utilizar la densidad acumulada media de niveles

¹⁰En general suele utilizarse siempre el término inglés que, traducido literalmente, viene a significar algo así como “desdoblamiento”. Hemos preferido, no obstante, el término “reescalado” porque creemos que es más indicativo de lo que significa dicho procedimiento.

$$\bar{N}(E) = \int_{E_0}^E dx \bar{\rho}(x) \quad (3.19)$$

donde con E_0 se representa el estado fundamental, para definir una nuevas energías reescaladas

$$\epsilon_i = \bar{N}(E_i) \quad (3.20)$$

donde E_i es el i ésimo nivel del espectro original que se corresponde, en consecuencia, con el ϵ_i , el i ésimo nivel del espectro reescalado. Este espectro reescalado tiene densidad $\rho(\epsilon)$ uniforme y, por lo tanto, densidad acumulada lineal¹¹.

El principal problema a la hora de realizar este procedimiento está en determinar la densidad de niveles¹². En el caso de la teoría de las matrices aleatorias este problema no existe, dado que se conoce con exactitud la parte suave de la densidad; algo muy parecido sucede en otros sistemas como billares cuánticos o algunos núcleos atómicos. En otros casos, sin embargo, no hay nada semejante a una fórmula teórica, por lo que la parte suave de la densidad tiene que ser determinada directamente a partir del espectro. Los métodos que se utilizan habitualmente en estas situaciones pueden dividirse en dos grandes grupos: los métodos locales y los métodos globales.

Los métodos locales se caracterizan por determinar la densidad de forma local en un entorno de cada nivel. El más simple de ellos es el denominado *reescalado local*. En él se supone que la densidad es constante en un entorno pequeño de un determinado nivel y se calcula según:

$$\bar{\rho}(E_i) = \frac{2v}{E_{i-v} - E_{i+v}} \quad (3.21)$$

donde v indica que hay v niveles a cada lado de E_i [40]. Un método local más sofisticado es el de ensanchamiento gaussiano, que consiste fundamentalmente en sustituir la densidad de niveles $\rho(E) = \sum_i \delta(E - E_i)$ por una suma de gaussianas [41].

Estos dos métodos, y cualesquiera otros con las mismas características, dan lugar a resultados espurios que ofuscan la interpretación física hasta el punto de producir importantes confusiones [6, 42]. La razón fundamental reside en que con ellos se introduce una longitud característica (v en el caso del reescalado local; la varianza de las gaussianas, en el de ensanchamiento gaussiano) en un problema que carece de ella, por lo que cualquier estudio que involucre correlaciones puede dar lugar a resultados espurios.

¹¹Nótese que la magnitud $\Delta_3(L)$, definida según la ecuación (3.16) para medir la intensidad de las fluctuaciones del espectro reescalado, hace uso de esta propiedad.

¹²En la práctica suele determinarse directamente la densidad acumulada; las dificultades que se mencionan son las mismas en este caso.

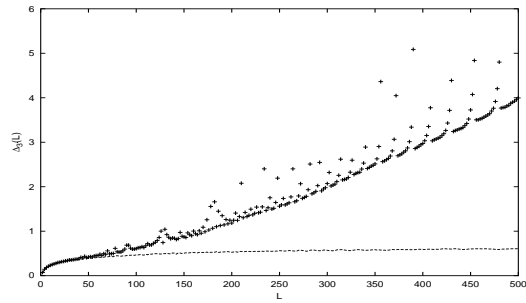
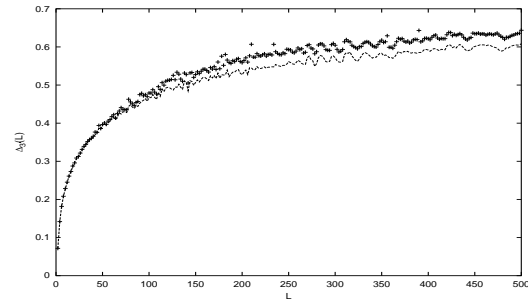
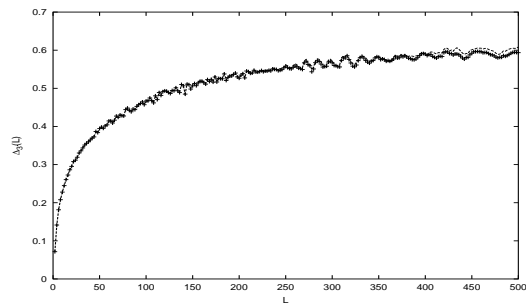
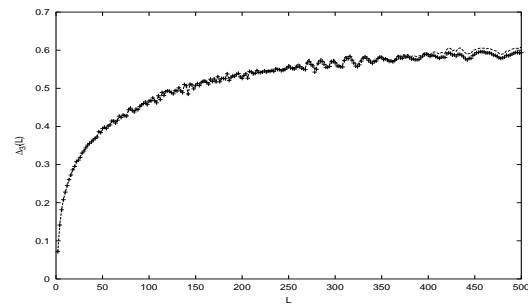
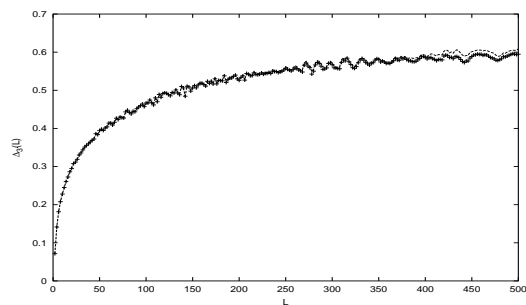
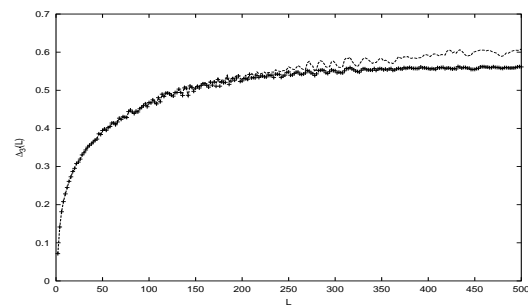
Los métodos globales se caracterizan por utilizar todo el espectro para calcular la parte suave de la densidad. Por lo general, dicho cálculo suele realizarse mediante el ajuste de la densidad acumulada de niveles a una función. En algunos casos, como los núcleos atómicos, existe una base teórica que permite escoger una forma general para dicha función de forma que el cálculo se limita a ajustar un pequeño grupo de parámetros libres; en otras ocasiones no se dispone de ninguna información, por lo que el cálculo puede realizarse utilizando un conjunto de funciones ortonormales.

En general, los métodos globales funcionan mucho mejor que los locales y dan lugar a buenos resultados. No obstante, su utilización tampoco es trivial, ya que, sobre todo en los casos en los que la densidad se ajusta sin información previa, hay que tener mucho cuidado con las funciones que se utilizan para realizar el ajuste. En concreto, hay que tener especial cuidado en el número de parámetros que se dejan libres en el ajuste: un exceso puede dar lugar a que la función reproduzca fluctuaciones del sistema; un defecto se manifiesta en que se toman por fluctuaciones cosas que no lo son.

En la figura 3.1 se representa la magnitud $\Delta_3(L)$ para una matriz GOE con dimension $N = 4000$ utilizando distintos métodos de reescalado. En todas las gráficas, la línea continua representa el resultado de utilizar la fórmula exacta de la densidad, mientras que los puntos son el resultado de utilizar un conjunto de polinomios de Chebyshev del orden que se especifica.

En la citada figura se aprecia perfectamente como un orden demasiado bajo (esto es, un número de parámetros libres insuficiente) se manifiesta con un crecimiento excesivo de la Δ_3 (principalmente caso $k = 4$; en el caso $k = 8$ también aparece este crecimiento, pero es muy pequeño). Esto es debido a que variaciones suaves de la densidad se toman como fluctuaciones y, en consecuencia, éstas se convierten en mucho mayores de lo que son. Del mismo modo, un orden demasiado alto (sobre todo el caso $k = 40$) da lugar a un aplanamiento de la misma función; lo que sucede en este caso es que el excesivo número de parámetros libres permite no sólo ajustar la parte suave de la densidad, sino también ciertas fluctuaciones. Esto se manifiesta en un aplanamiento de la Δ_3 porque las fluctuaciones que se consiguen ajustar son las de periodo más largo; las de periodo más corto dan lugar a variaciones demasiado bruscas y sólo podrían ajustarse utilizando polinomios de Chebyshev de un orden aún más elevado.

A raíz de estos resultados, la conclusión que se obtiene es que el reescalado ha de hacerse con un número ni muy grande ni muy pequeño de parámetros libres. Para asegurarse de que la elección es correcta puede realizarse algo parecido a lo que se ha mostrado aquí para el caso GOE: puede calcularse la Δ_3 realizando el reescalado a distintos órdenes y escogerse como óptimo uno intermedio entre los que dan lugar a un crecimiento desmesurado y los que producen un aplanamiento. Es bastante aconsejable, también, repetir los cálculos con órdenes parecidos al escogido y verificar que los resultados son independientes de la elección.

(a) $k=4$ (b) $k=8$ (c) $k=12$ (d) $k=16$ (e) $k=20$ (f) $k=40$ Figura 3.1: Reescalado con polinomios de Chebyshev a orden k .

Capítulo 4

Caos cuántico y fractales.

En el capítulo anterior se mostró cómo la teoría de las matrices aleatorias, diseñada en un principio para estudiar los espectros de ciertos sistemas cuánticos de muchos cuerpos, describe con propiedad, además, otros sistemas mucho más simples cuyo análogo clásico es caótico. De algún modo esto es algo muy semejante a lo que ocurre con la impredecibilidad en física clásica: no sólo los sistemas muy complejos resultan ser caóticos e impredecibles, como parece natural; también hay muchos sistemas sencillos, cuya dinámica involucra muy pocas variables, que presentan propiedades muy parecidas.

La sorprendente aplicabilidad de la teoría de las matrices aleatorias para sistemas cuánticos cuyo hamiltoniano dista mucho de las hipótesis sobre las que se construye la citada teoría es ya suficiente para preguntarse qué está sucediendo. A esta pregunta podría responderse diciendo que, en cualquier caso, la dinámica involucrada es muy compleja, por lo que tampoco es de extrañar que un hamiltoniano muy complicado resulte útil para describirla. Pero resultados más recientes, que demuestran que dicha teoría también es útil para describir sistemas tan alejados de la mecánica cuántica como el flujo de tráfico [27], incitan a seguir manteniendo la pregunta.

En este capítulo se trata de arrojar un poco de luz sobre esta cuestión estudiando tanto espectros GOE, GUE y GSE, como procedentes de sistemas cuánticos caóticos (en concreto, de un núcleo atómico, sistema cuántico complejo de muchos cuerpos sin análogo clásico, y de un billar de Sinai, sistema sencillo cuyo análogo clásico es caótico), utilizando para ello parte de las técnicas descritas en el segundo capítulo. Tras este estudio se concluye que las fluctuaciones a las que da lugar la teoría de las matrices aleatorias, así como las que presentan los sistemas cuánticos caóticos, no son en absoluto particulares, sino que aparecen en otros muchos fenómenos de la naturaleza. Es importante, empero, resaltar que no queremos con ello establecer similitudes entre la dinámica de los distintos sistemas que presentan este tipo de fluctuaciones; en todo caso pretendemos proponer un nuevo mecanismo físico (la repulsión de niveles) que da lugar al tipo de fluctuaciones quizá más ubicuo en la

naturaleza: el ruido $1/f$.

4.1 La secuencia de espaciamentos como una serie temporal.

Las técnicas que se expusieron en el capítulo 2 están orientadas a estudiar señales que constituyen el registro temporal de una determinada magnitud. La posibilidad de aplicarlas a un espectro cuántico pasa, por lo tanto, por asimilar éste, de algún modo, a una serie temporal. En este trabajo hemos utilizado la secuencia de espaciamentos ya reescalados para llevar a cabo dicha asimilación. Hemos partido para ello de la definición

$$s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i \quad (4.1)$$

y hemos considerado el índice i , que determina la posición del espaciamento en el espectro, como un índice temporal. De esta manera, la secuencia $\{s_i\}$ puede tratarse como cualquier registro temporal procedente de una simulación o de un experimento; las peculiaridades que dimanen de considerar ordenada temporalmente una secuencia que no lo está serán comentadas con más detalle un poco más adelante.

Al igual que ocurre con la densidad de estados, la secuencia de espaciamentos puede descomponerse en una parte suave y en otra fluctuante:

$$s_i = \langle s \rangle + \delta s_i. \quad (4.2)$$

Debido al reescalado, la parte suave de esta señal es idéntica para cualquier sistema, y verifica $\langle s \rangle = 1$; el interés principal está, en consecuencia, en la parte fluctuante. El objetivo de este trabajo es caracterizar dicha parte fluctuante en función de modelos sencillos, como el movimiento browniano fraccionario, y establecer, en función de dichos modelos, una distinción entre los espectros regulares y los espectros caóticos.

En el caso de los sistemas regulares, existe ya una caracterización como la comentada, aunque no suele ser habitual presentarla en esos términos. Según el resultado de Berry, un espectro regular está caracterizado por un espectro de niveles no correlacionados; las fluctuaciones de la secuencia de espaciamentos δs_i son, por lo tanto, un ruido blanco.

Los espectros de sistemas caóticos, sin embargo, sólo están caracterizados a partir de la teoría de las matrices aleatorias, que, en principio, no parece tener ninguna semejanza con los modelos presentados en el capítulo 2. Resulta muy interesante, por lo tanto, averiguar si las correlaciones que los caracterizan dan lugar a algún tipo de ruido coloreado en δs_i , o si presentan cualquier otra característica.

Para responder a esta cuestión, en este trabajo se ha optado por trabajar con la señal integrada. Se ha definido para ello la siguiente magnitud:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n s_i - n \langle s \rangle = \sum_{i=1}^n \delta s_i, \quad (4.3)$$

cuya interpretación física es bastante sencilla: dado que la secuencia de espaciamentos es tal que

$$\sum_{i=1}^N s_i = \epsilon_N - \epsilon_0, \quad (4.4)$$

donde ϵ_0 corresponde al estado fundamental, la función δ_n representa la desviación del n -ésimo nivel con respecto a su posición media.

Esta función δ_n aparece con anterioridad en la literatura aunque desde un punto de vista un poco diferente. Bohigas *et al.* [31] estimaron el comportamiento de $\langle \delta_n^2 \rangle$ para valores grandes de n y concluyeron, partiendo de algunas hipótesis, que $\langle \delta_n^2 \rangle \sim \log n$ para sistemas GOE y GUE. En este trabajo se ha ido un poco más allá y se ha extendido el citado resultado para otros sistemas físicos.

En los trabajos de Bohigas, así como en los de otros autores que también han utilizado esta magnitud, la función δ_n no era tratada como una serie temporal, sino en pie de igualdad con otros estadísticos espectrales clásicos como, por ejemplo, la función Δ_3 . La analogía que se realiza en este trabajo es, por lo tanto, original y merece unos breves comentarios.

La primera diferencia fundamental con la teoría clásica de procesos estocásticos es que $s_i \geq 0 \forall i$, lo cual hace que la distribución de probabilidad de las fluctuaciones δs_i no sea simétrica. Para un sistema regular, por ejemplo, dado que $P(s) = \exp(-s)$, es inmediato que $P(\delta s) = \exp(-s) - 1$, en vez de la distribución de probabilidad gaussiana típica de un movimiento browniano tradicional. Esto, no obstante, no supone un gran inconveniente, ya que las propiedades de correlación a largo alcance no dependen de la forma de esta distribución; concretamente, la densidad espectral para una secuencia de variables aleatorias independientes es $P(f) \propto 1/f^2$, independientemente de su distribución de probabilidad.

La otra particularidad que emerge de esta interpretación de la función δ_n como una serie temporal se debe a que la secuencia de espaciamentos de un espectro no posee una ordenación temporal natural. En el caso de un sistema caótico, por ejemplo, la presencia de repulsión hace que la posición de cada nivel dependa de todos los que hay a su alrededor; en la secuencia $\{s_i\}$, por lo tanto, cada valor s_i está influido no solamente por su pasado $s_j \forall j < i$, sino también por su futuro. Este inconveniente parece bastante más serio que el anterior, ya que parece implicar algo así como una violación de causalidad; lo que importa, no obstante, no es la interpretación filosófica de lo que significa la secuencia de espaciamentos como serie temporal, sino los resultados que con dicha consideración se obtienen. De todos modos, existen estudios de sistemas ordenados temporalmente para los cuales

una influencia tanto del pasado como del futuro resulta fundamental; curiosamente, algunos de esos sistemas quedan muy bien descritos por la teoría de las matrices aleatorias [27].

4.2 Estudio de matrices GOE, GUE, GSE y GDE.

En esta sección se aplica el punto de vista recién expuesto al estudio de espectros correspondientes a cada una de las colectividades de la teoría de las matrices aleatorias. Se incluye, además, una cuarta colectividad, que da lugar a espectros regulares. Dicha colectividad está compuesta por matrices diagonales cuyos elementos son variables aleatorias independientes reales; su nombre, GDE (de *Gaussian diagonal ensemble*), se ha elegido por similitud con el de las otras tres colectividades.

4.2.1 Cálculo de los autovalores.

Para poder llevar a cabo los análisis propuestos lo primero que hay que hacer es generar los autovalores o niveles de energía del espectro. Según se vio en el capítulo 3, la fórmula (3.11) da una expresión cerrada para la distribución de probabilidad a utilizar que parece permitir, en un principio, calcular dicha secuencia. Sin embargo, el hecho de que con ella cada nivel no pueda generarse independientemente de los demás es un inconveniente lo suficientemente grave como para que sea preferible utilizar algún otro procedimiento.

Una buena alternativa pasa por utilizar las relaciones (3.8), (3.9) y (3.10), que permiten generar cada elemento del hamiltoniano de manera independiente, y luego diagonalizar la matriz resultante. Para hacerlo es necesario desarrollar las citadas expresiones con el fin de que esa independencia entre los distintos elementos del hamiltoniano se manifieste explícitamente. En el caso del GOE, por ejemplo (las otras dos pueden desarrollarse de la misma manera), la distribución de probabilidad para el GOE puede escribirse:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \prod_n \exp(-AH_{nn}^2) \prod_{n \neq m} \exp(-AH_{mn}^2), \quad (4.5)$$

de forma que esa independencia se manifiesta ya explícitamente.

Por otro lado, como, según la simetría del hamiltoniano, la matriz ha de ser simétrica, no pueden generarse independientemente todos los elementos no diagonales del hamiltoniano, antes bien, sólo hay que generar bien el triángulo superior, bien el triángulo inferior. Esto puede realizarse a partir de la expresión anterior considerando que

$$\prod_{m \neq n} \exp(-AH_{nm}^2) = \left[\prod_{n < m} \exp(-AH_{nm}^2) \right]^2 = \prod_{n < m} \exp(-2AH_{nm}^2), \quad (4.6)$$

de forma que una matriz GOE puede construirse generando los elementos diagonales independientemente con una distribución de probabilidad

$$P(H) = C \exp(-AH^2), \quad (4.7)$$

y los no diagonales con

$$P(H) = C \exp(-2AH^2), \quad (4.8)$$

donde, en ambos casos, la constante C se determina por normalización.

En el caso de matrices GUE, el procedimiento es prácticamente el mismo, con la salvedad de que las partes real e imaginaria de cada elemento del hamiltoniano se generan también de manera independiente; la condición de hermiticidad se impone utilizando la misma relación entre los elementos diagonales y los no diagonales que en el GOE e imponiendo que los primeros sean reales.

El caso del GSE es un poco más complicado al ser cada elemento del hamiltoniano un cuaternión. Esta particularidad puede solventarse, empero, con facilidad considerando cada componente independiente como una matrix 2x2,

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} (H_0)_{ij} + i(H_3)_{ij} & (H_1)_{ij} + i(H_2)_{ij} \\ (-H_1)_{ij} + i(H_2)_{ij} & (H_0)_{ij} - i(H_3)_{ij} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

calculando cada componente cuaterniónica independientemente respetando las simetrías del problema, que se manifiestan de la siguiente forma,

$$(H_0)_{mn} = (H_0)_{nm}, \quad (4.10)$$

$$(H_1)_{mn} = -(H_1)_{nm}, \quad (4.11)$$

$$(H_2)_{mn} = -(H_2)_{nm}, \quad (4.12)$$

$$(H_3)_{mn} = -(H_3)_{nm}, \quad (4.13)$$

e imponiendo la misma relación entre la distribución de probabilidad para elementos diagonales y no diagonales que en los casos anteriores. Nótese que las relaciones anteriores implican que los elementos de la diagonal se reducen a números reales¹.

La colectividad GDE, al estar compuesta por matrices diagonales, se genera de manera trivial.

¹Con esta representación es evidente que un sistema de dimensión N se caracteriza por una matriz de dimensión $2N$. El número de autovalores, empero, sigue siendo N ya que las simetrías impuestas producen que cada uno de ellos tenga degeneración dos.

4.2.2 Método de reescalado.

Una vez generado el espectro de energías, el siguiente paso para estudiar sus fluctuaciones es llevar a cabo el procedimiento de reescalado. En el caso de la RMT, según se vio en el capítulo tres, existe una fórmula cerrada para la densidad de estados (3.12), por lo que dicho procedimiento puede realizarse de una manera trivial. Con el fin de optimarlo, resulta recomendable, además, tomar

$$A = \nu/2, \quad (4.14)$$

de forma que, para las tres colectividades, la densidad de energías queda:

$$\rho(E) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{2N - E^2} & |E| \leq \sqrt{2N}, \\ 0 & |E| \geq \sqrt{2N}. \end{cases} \quad (4.15)$$

En todos los casos que se presentan en esta memoria el reescalado se ha realizado ajustando la densidad acumulada, que se obtiene trivialmente de la expresión anterior.

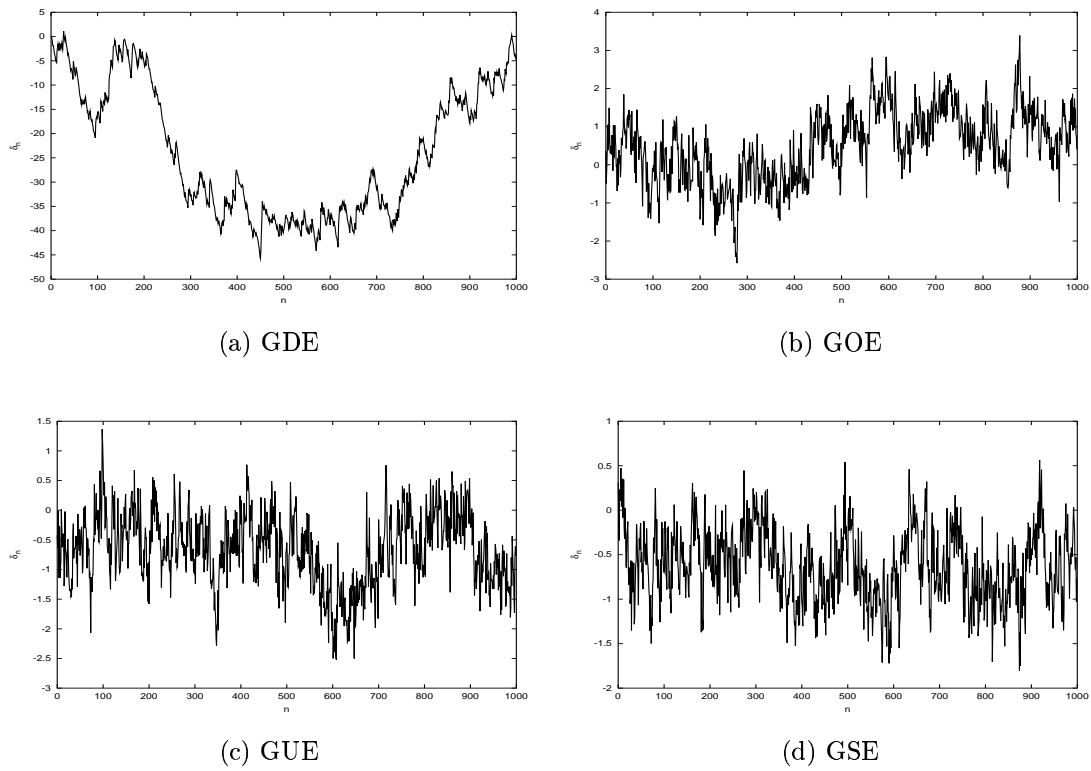
4.2.3 Estudio de la función δ_n .

Una vez calculado y reescalado el espectro de energías, el cálculo de la función δ_n es trivial. En la figura 4.1 se muestra dicha función para una matriz de cada una de las cuatro colectividades en estudio. En ella se aprecia que en los tres casos correspondientes a la teoría de matrices aleatorias el resultado es muy semejante y diferente a la colectividad GDE. Como única diferencia importante hay que resaltar, en todo caso, que en las tres matrices RMT se aprecia una disminución de la amplitud de las fluctuaciones según aumenta la repulsión; su estructura, esto es, sus correlaciones de medio y largo alcance parece, no obstante, la misma para las tres simetrías.

Por otro lado, si se compara la forma de la señal para los casos correspondientes a la RMT con, por ejemplo, la figura 2.2, se aprecian muchas similitudes, al menos cualitativas; a simple vista parece que las fluctuaciones que caracterizan los espectros de dichas colectividades presentan *azar salvaje*. La señal correspondiente a la matriz GDE se parece mucho más a un movimiento browniano estándar, es decir, a la integral de una señal con *azar benigno*, lo cual es consistente con el trabajo de Berry [7].

Para tratar de discernir si existen en realidad verdaderas similitudes entre la RMT y el *azar salvaje*, o si se trata simplemente de una impresión, hemos calculado la densidad espectral correspondiente a cada una de las colectividades. Para hacerlo, y con el fin de mejorar los resultados, hemos procedido del siguiente modo:

1. Generación de 30 matrices diferentes para cada colectividad y cálculo de sus espectros reescalados.

Figura 4.1: Función δ_n para una matriz de cada colectividad

2. Cálculo de la función δ_n para cada una de los espectros.
3. Cálculo de la densidad espectral mediante un algoritmo de FFT para cada uno de ellos.
4. Obtención de una densidad espectral media representante de cada colectividad mediante el cálculo de la media de las 30 densidades espectrales de las 30 matrices de cada colectividad.

Las razones de utilizar este procedimiento, en vez de calcular directamente la densidad espectral de cada una de las señales representadas en la figura 4.1, son principalmente dos. En primer lugar, se obtiene así un resultado más representativo de la colectividad y no de un miembro de ésta en concreto. En segundo lugar, la densidad espectral presenta fluctuaciones estadísticas muy grandes si se representa en escala logarítmica, por lo que suele ser necesario tratarlo de alguna manera para disminuirlas² [30]; la obtención de una secuencia media según se ha descrito disminuye de manera natural esas fluctuaciones de forma que no se requiere ningún cálculo adicional.

Los resultados obtenidos se representan en la figura 4.2 en escala doble logarítmica. Como era de esperar, la colectividad GDE se ajusta muy bien mediante una función del tipo $P(f) \propto 1/f^2$. En los otros tres casos parece que la similitud con el *azar salvaje* se mantiene; los tres quedan muy bien descritos por una ley de potencias $P(f) \propto 1/f^B$ con $B \approx 1$.

Las líneas rectas que se representan en la figura se corresponden con el ajuste de cada densidad espectral a una función $P(f) \propto 1/f^B$. Para realizar dicho ajuste se han ignorado en los cuatro casos las frecuencias más altas, ya que en todos ellos se aprecia un aplanamiento que puede ser debido a la naturaleza finita o discreta de los sistemas³. En concreto, todos los ajustes se han realizado para frecuencias menores que $\log k = 2.2$; los resultados de dicho ajuste se presentan en la tabla 4.1.

Los valores obtenidos para α ponen de manifiesto que las fluctuaciones de los espectros de hamiltonianos RMT son un ruido $1/f$ casi perfecto; a pesar de las pequeñas desviaciones⁴ de $B = 1$, es prácticamente imposible encontrar en la literatura señales que, de un modo u otro, produzcan un ruido $1/f$ tan perfecto.

²Uno de esos tratamientos se ha utilizado, por ejemplo, en la figura 2.3; en el apéndice se describen con más detalle estos procedimientos.

³Formalmente, si se considera un ruido browniano como la integral de un ruido blanco, la densidad espectral del primero es $P(f) \propto 1/f^2$ sólo en el límite continuo. En un caso discreto, la densidad espectral sólo sigue esa ley de potencias de forma aproximada.

⁴La pequeña desviación que aparece en el GOE puede deberse a dos causas: (a) un efecto de tamaño finito, que se manifiesta con más intensidad que en el GUE y GSE al ser la repulsión menos intensa, o (b) la propia intensidad de la repulsión; de momento no poseemos evidencias que nos permitan decantarnos por una de las dos posibilidades.

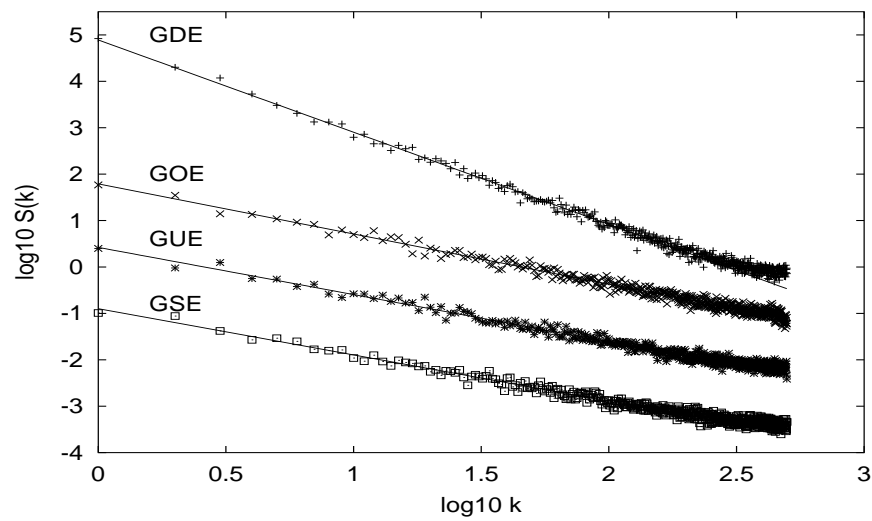


Figura 4.2: *Power spectrum* para las colectividades GDE, GOE, GUE y GSE.

| Colectividad | α |
|--------------|-------------------|
| GDE | 1.987 ± 0.016 |
| GOE | 1.080 ± 0.015 |
| GUE | 1.017 ± 0.015 |
| GSE | 0.995 ± 0.015 |

Tabla 4.1: Valores del parámetro α para GDE, GOE, GUE y GSE.

La quizá sorprendente aparición de este ruido $1/f$ puede comprenderse en términos sencillos mediante el formalismo del movimiento browniano fraccionario⁵. Si se considera como buena aproximación que las tres colectividades tienen $B = 1$, puede tomarse el espectro de niveles como un sistema en el que el parámetro de Hurst verifica $H = 0(\log)$, es decir, como un límite de antipersistencia. Desde ese punto de vista, la repulsión entre niveles se manifiesta en una especie de *organización* del espectro, que hace que cada nivel se desvíe lo menos posible de su posición media; el hecho de que el espectro sea *rígido* o *cuasicristalino* se entiende así de una manera natural.

4.3 Estudio de un núcleo atómico: el ^{24}Mg .

A pesar de reproducir muy adecuadamente muchos resultados teóricos y experimentales, la teoría de matrices aleatorias no es más que un modelo; los resultados obtenidos sobre ella deben tomarse, por lo tanto, con cierta precaución. En esta sección y en la siguiente estudiamos dos sistemas físicos muy característicos del caos cuántico con el fin de verificar si los resultados de la sección anterior son exclusivos de las colectividades RMT o de verdad son característicos de los sistemas cuánticos caóticos. El ^{24}Mg , concretamente, es un buen representante del caos cuántico en sistemas de muchos cuerpos.

4.3.1 Cálculo del espectro: modelo de capas.

El núcleo atómico es el sistema que motivó el desarrollo de la teoría de matrices aleatorias y, en consecuencia, el primero al que se le aplicó dicha teoría, con resultados muy significativos. La utilización de datos experimentales para comparar las propiedades estadísticas de los espectros con las predicciones de la RMT resulta, empero, una labor muy complicada; en general, sólo cerca del umbral de emisión espontánea de neutrones existen suficientes niveles experimentales para que sea posible obtener buenos resultados⁶ [22].

El estudio de otras regiones del espectro, como, por ejemplo, la región del estado fundamental, se aborda en general mediante la utilización de modelos teóricos, que

⁵El resultado de Bohigas et al., $\langle \delta_n^2 \rangle \propto \log n$ parece invalidar esta interpretación, ya que ésta implica $\langle \delta_n^2 \rangle \propto n^H$. No obstante, el límite $H \rightarrow 0$, que es el que caracteriza un ruido $1/f$, es a su vez un límite externo al propio formalismo. Un crecimiento logarítmico es inferior a cualquier ley de potencias y, por lo tanto, puede considerarse como un límite de manera natural, máxime considerando los resultados que se presentaron en el capítulo dos.

⁶El estudio de las correlaciones de largo alcance mediante, por ejemplo, la Δ_3 necesita de una secuencia larga de niveles consecutivos con los mismos valores para el espín y la paridad.

| J | DIM |
|----|------|
| 0 | 325 |
| 1 | 779 |
| 2 | 1206 |
| 3 | 1304 |
| 4 | 1311 |
| 5 | 1070 |
| 6 | 835 |
| 7 | 531 |
| 8 | 329 |
| 9 | 154 |
| 10 | 70 |

Tabla 4.2: Valores de J y dimensión de cada caja para el ^{24}Mg .

suplen en buena medida la ausencia de datos experimentales⁷. Entre ellos, el modelo de capas es la teoría más completa que existe, por lo que éste se ha convertido en la actualidad en la herramienta fundamental para el estudio del caos cuántico en este tipo de sistemas.

En este trabajo hemos utilizado una interacción realista basada en el modelo de capas para estudiar el espectro del ^{24}Mg . Esta interacción se ha construido utilizando un corazón de ^{16}O (8 protones y 8 neutrones) y considerando que el resto de los nucleones se mueven en las capas $0d_{5/2}$, $1s_{1/2}$ y $0d_{3/2}$, es decir, en la capa sd . En ella hay una parte de campo medio, caracterizada por las energías de partícula independiente $\epsilon_{0d_{5/2}}$, $\epsilon_{1s_{1/2}}$ y $\epsilon_{0d_{3/2}}$, ajustadas a partir de datos experimentales de la capa sd , y una interacción a dos cuerpos de Wildhental, conocida como interacción W o USD , y que incluye una dependencia en el número másico de la forma $(\frac{18}{A})^{0.3}$.

El cálculo del espectro se ha llevado a cabo mediante la diagonalización de la matriz hamiltoniana, que se ha construido utilizando la base del campo medio. La utilización de una interacción que incluye una parte a dos cuerpos sobre una base de campo medio da lugar a una matriz diagonal por cajas, cada una de las cuales está caracterizada por un valor del momento angular J y del isospín. En el caso del ^{24}Mg , los valores de J y la dimensión de cada una de las cajas se adjuntan en la tabla 4.2.

La elección de este núcleo para el estudio de la función δ_n se debe a la existencia de trabajos previos que indican que los núcleos de la capa sd presentan un comportamiento muy caótico, independientemente del rango de energías que se considere [24, 23]. En vista de lo cuál, el ^{24}Mg puede ser considerado un buen representante

⁷Existen algunos resultados experimentales para el ^{26}Al y el ^{116}Sn , pero en ambos casos utilizando un número de niveles tal vez insuficiente.

de sistemas cuánticos caóticos de muchos cuerpos; el estudio de su espectro mediante las mismas técnicas que en la sección anterior proporcionará, en consecuencia, información fundamental para confirmar las conclusiones obtenidas con la RMT.

4.3.2 Método de reescalado.

En general, la densidad de niveles en los núcleos crece rápidamente con la energía de una manera conocida en muy buena aproximación [19]. En el caso de las matrices hamiltonianas del modelo de capas, sin embargo, su dimensión finita influye en la densidad de estados de modo que ésta no crece indefinidamente, sino que presenta un valor máximo y comienza a decrecer a continuación [42].

El peculiar comportamiento de la densidad de estados en las matrices del modelo de capas obliga a que el reescalado tenga que hacerse en estos sistemas de una forma aproximada, ajustando la densidad de energías mediante un conjunto de funciones adecuado. En algunos trabajos recientes se proponen diversas funciones para optimar el reescalado mediante este procedimiento. Zuker [20], por ejemplo, propone una binomial generalizada como verdadera densidad media para las matrices hamiltonianas con interacciones a dos cuerpos. Dicha función queda completamente determinada por tres parámetros libres que se ajustan según el espectro concreto que se quiera reescalar. Otra posibilidad consiste en utilizar una gaussiana corregida en los bordes mediante una expansión Edgeworth en términos de los cumulantes [21]. El número de parámetros libres en este último caso es dos, más uno por cada cumulante que se utilice para la corrección; la expansión hasta el tercer cumulante produce un resultado muy semejante a la binomial generalizada de Zuker.

A pesar de la existencia de estas funciones optimadas, en este trabajo hemos preferido realizar el reescalado ajustando la densidad acumulada mediante polinomios ortonormales de Chebyshev. El resultado presentado en la figura 3.1 nos ha hecho escoger un orden $k = 10$ en el desarrollo en estos polinomios; no hemos ido más allá debido a la pequeña dimensión de algunas de las matrices. Para asegurarnos, no obstante, de la validez del método empleado, hemos comparado este procedimiento de reescalado con una expansión de Edgeworth hasta cuarto y sexto cumulantes, así como con órdenes de Chebyshev próximos; los resultados obtenidos mediante los distintos procedimientos son indistinguibles.

4.3.3 Estudio de la función δ_n .

Para analizar las fluctuaciones del espectro del ^{24}Mg hemos estudiado, en primer lugar, cada submatriz J por separado. En la figura 4.3 se representa la función δ_n para los casos $J = 0, \dots, 7$; no hemos realizado el cálculo para valores superiores del momento angular al ser las dimensiones de las matrices correspondientes muy pequeñas. En la citada figura se observa que la función δ_n es muy similar para todos

| J | α |
|-----|-----------------|
| 0 | 1.14 ± 0.16 |
| 1 | 1.18 ± 0.10 |
| 2 | 1.08 ± 0.08 |
| 3 | 1.12 ± 0.08 |
| 4 | 0.97 ± 0.06 |
| 5 | 1.09 ± 0.06 |
| 6 | 0.91 ± 0.13 |
| 7 | 1.00 ± 0.17 |

Tabla 4.3: Valores de α para los distintos J del ^{24}Mg .

los valores de J y muy semejante, a la vez, a la obtenida con la teoría de matrices aleatorias.

Hemos calculado, a continuación, la densidad espectral para cada una de las señales representadas. Al contrario de lo que sucedía en el caso de la RMT, solamente existe una señal para cada valor de J , por lo que no es posible obtener una media que suavice el resultado. Para disminuir la amplitud de las fluctuaciones hemos realizado, en consecuencia, un tratamiento como el que se describe en el apéndice, utilizando para ello un bin de $\log(k) = 0.1$ en todos los casos. El resultado obtenido se muestra en la figura 4.4. Con el fin de clarificar la gráfica (en los casos más pequeños hay pocos puntos) hemos unido con una línea recta los puntos obtenidos; la línea punteada, al igual que en el caso de la RMT, representa el mejor ajuste a una ley de potencias $P(f) \propto 1/f^B$.

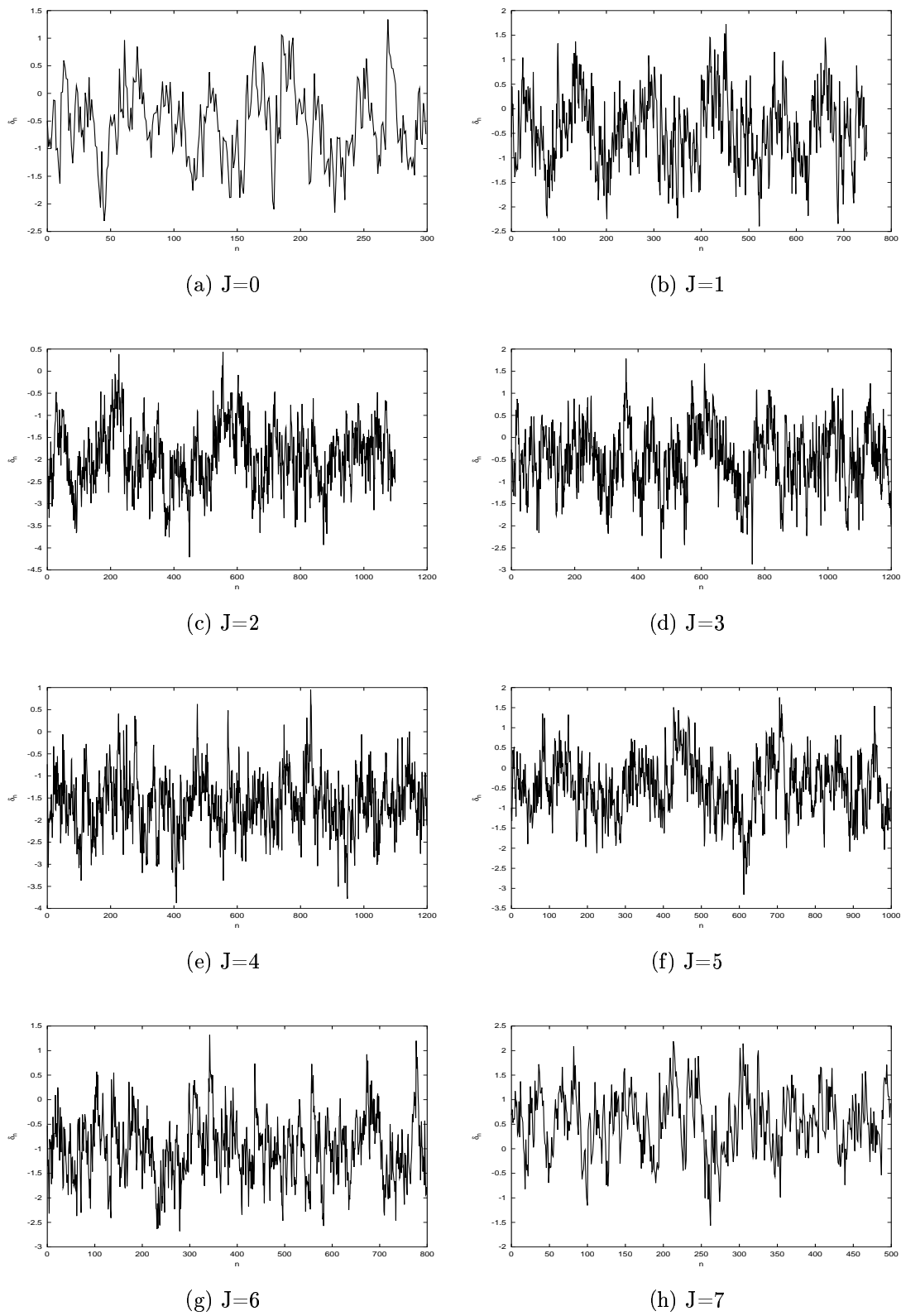
Los resultados para los distintos valores de J son, en general, mucho menos limpios que los obtenidos con la RMT. No obstante, en la figura 4.4 se observa con nitidez razonable que en todos los casos la descripción de la densidad espectral mediante una ley de potencias es bastante aproximada.

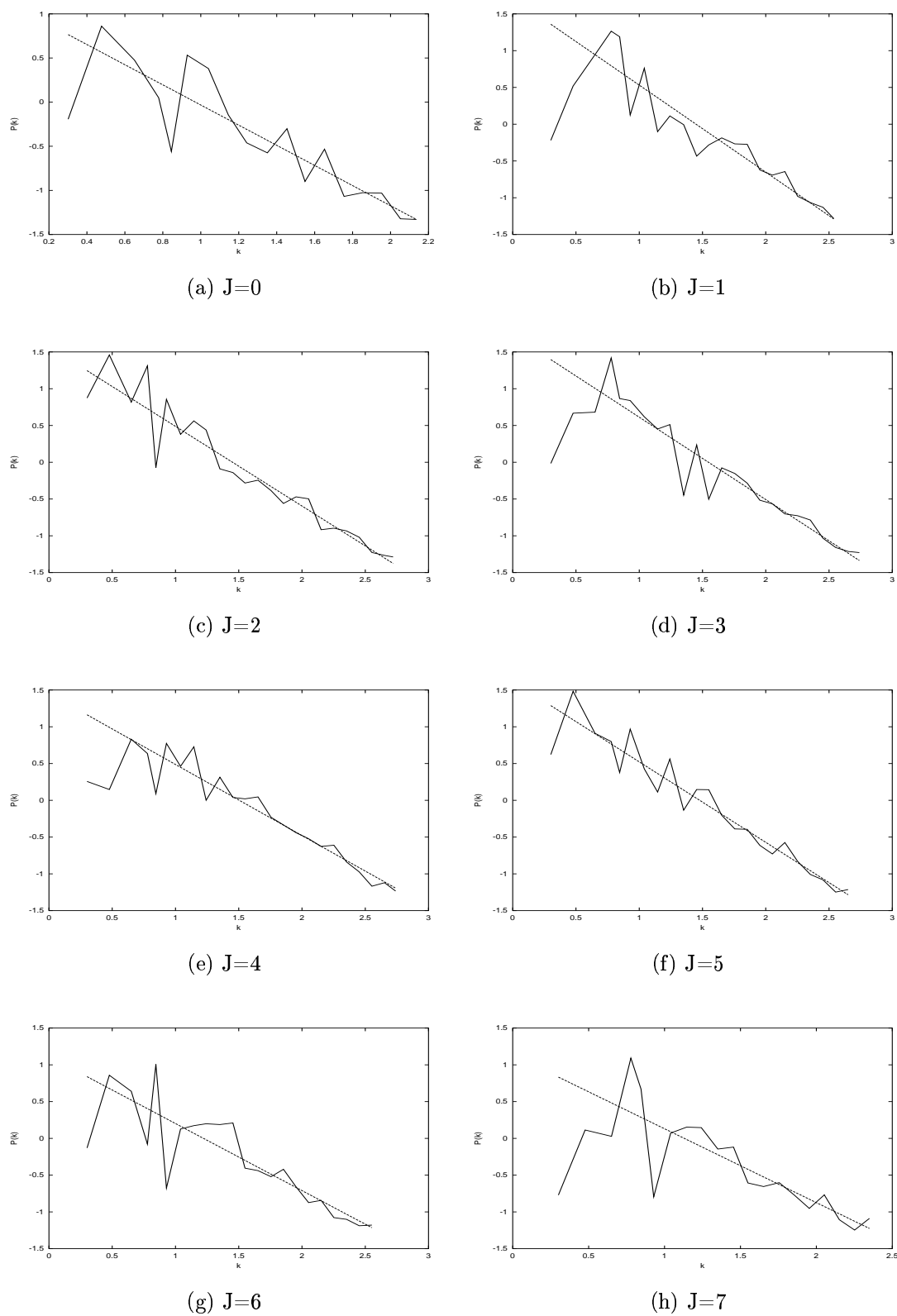
Los valores de B para el ajuste anterior se adjuntan en la tabla 4.3. Los resultados que se han obtenido pueden considerarse en perfecto acuerdo con un ruido $1/f$; una media ponderada en función del tamaño de la matriz da lugar a $B = 1.06 \pm 0.09$

El cálculo de la media ponderada permite obtener un valor de B que caracteriza el ^{24}Mg de una manera global, pero puede parecer, quizá, un poco artificioso. Con el fin de obtener un resultado más significativo hemos realizado un nuevo cálculo incluyendo a la vez todos los valores de J y construyendo así una colectividad al estilo de la RMT. Para no mezclar espectros de diferente tamaño, lo que imposibilitaría calcular un valor medio en el espectro de frecuencias hemos procedido de la siguiente manera:

1. Elección de un determinado tamaño para la señal, concretamente⁸ $L = 256$ y

⁸La elección de potencias de dos se ha realizado para optimar el cálculo de la transformada de

Figura 4.3: Función δ_n para el ^{24}Mg

Figura 4.4: *Power spectrum* de la función δ_n para el ^{24}Mg

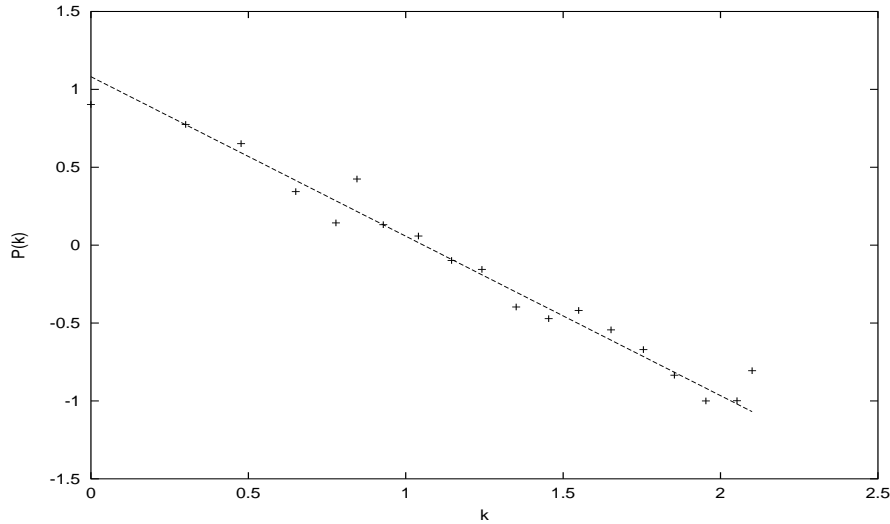


Figura 4.5: *Power spectrum* ^{24}Mg , subconjuntos $L = 256$.

$L = 512$.

2. División de todos los espectros con J definido en conjuntos de L niveles.
3. Reescalado y cálculo de la función δ_n y su *power spectrum* para cada uno de los conjuntos.
4. Obtención de una densidad espectral media a partir de todos ellos.

En las figuras 4.5 y 4.6 se representan los resultados obtenidos para $L = 256$ y $L = 512$ respectivamente. En ambos casos se ha realizado un suavizado con un bin de $\log k = 0.1$, a pesar de ser el resultado un promedio sobre una colectividad a la manera de la RMT; hemos procedido así para poder comparar los resultados para los dos valores de L (evidentemente, $L = 256$ permite obtener un número mucho mayor de conjuntos, por lo que su densidad espectral es más limpia que la de $L = 512$; con el suavizado se elimina esta diferencia).

En ambas figuras se observa un comportamiento $P(f) \propto 1/f^B$ mucho más limpio que en los casos de J independiente. Los resultados que se obtienen son:

$$B_{256} = 1.02 \pm 0.06$$

$$B_{512} = 1.08 \pm 0.04$$

fourier mediante un algoritmo FFT.

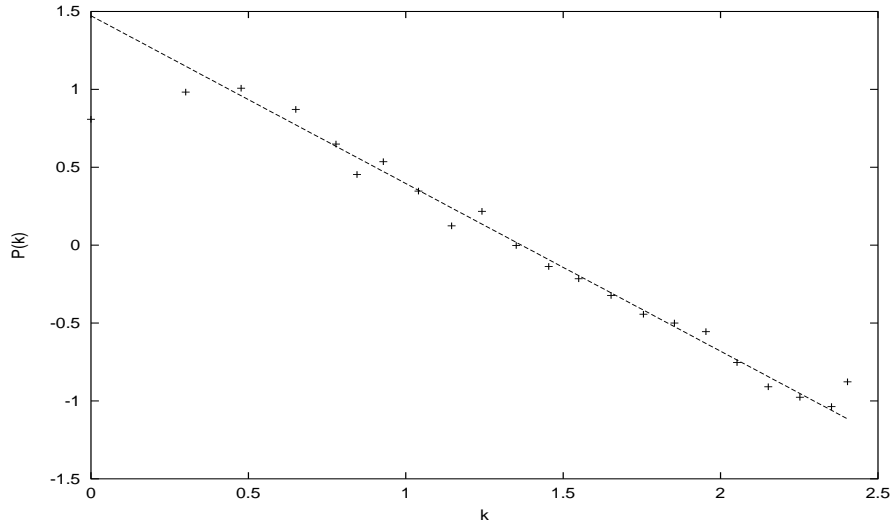


Figura 4.6: *Power spectrum* ^{24}Mg , subconjuntos $L = 512$.

que están, en ambos casos, muy próximos a $B \approx 1$. Este resultado es compatible con el que se obtuvo con la teoría de matrices aleatorias y permite corroborar las conclusiones que se extrajeron de él.

4.4 Estudio del billar de Sinai.

Los resultados obtenidos con el ^{24}Mg y con la teoría de matrices aleatorias permiten postular una relación directa entre el ruido $1/f$ y las fluctuaciones características de los sistemas cuánticos caóticos. Estos dos ejemplos, no obstante, pueden considerarse representantes del mismo tipo de dinámica: el ^{24}Mg es un sistema complejo de muchos cuerpos sin análogo clásico, y los hamiltonianos RMT están contruidos en base a una interacción también muy compleja. El resultado más importante en caos cuántico, la conjetura BGS, muestra, sin embargo, que el caos también aparece en sistemas cuánticos sencillos, por lo que, antes de obtener una conclusión definitiva, es fundamental estudiar el comportamiento de la función δ_n en algunos de estos sistemas. Para llevar a cabo esta tarea, en esta sección se estudia cuánticamente el billar de Sinai, que puede considerarse como el paradigma de sistema cuántico caótico: es el que utilizaron Bohigas *et al.* para formular la conjetura BGS [8].

El billar de Sinai consiste básicamente en una partícula que se mueve en un plano entre discos reflectantes de radio R centrados en puntos de una red de lado unidad, aunque puede representarse también de otras muchas formas; en la figura 4.7 se muestran algunas de ellas. Este billar es un sistema sencillo (con muy pocos grados de libertad) y clásicamente ergódico; representa, por lo tanto, el caos cuántico en

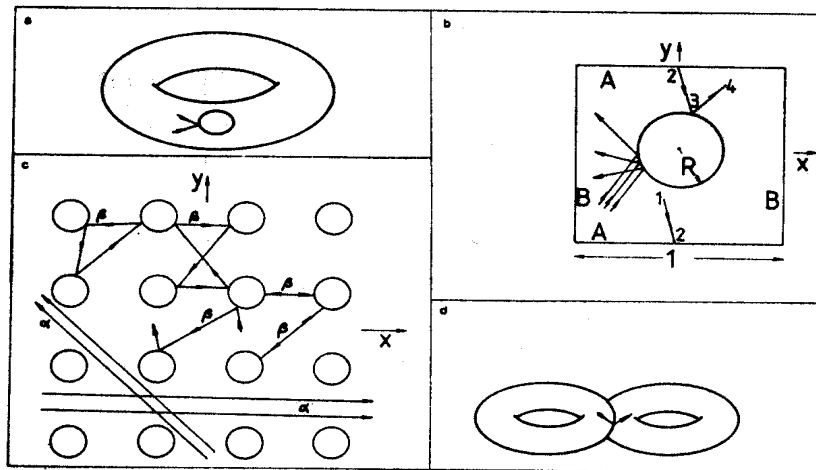


Figura 4.7: Representaciones del billar de Sinai: (a) Como el movimiento de una partícula en un toro con un disco reflectante. (b) Como el movimiento en un cuadrado unidad con condiciones de contorno periódicas y un disco reflectante en el centro; se muestran algunas trayectorias. (c) Como un movimiento libre entre discos reflectantes en puntos de una red cuadrada; se muestran órbitas cerradas (α) y abiertas (β). (d) Como un movimiento geodésico en un toro doble plegado a lo largo de una línea de curvatura gaussiana negativa e infinita.

sistemas simples frente al caos cuántico en sistemas complejos del ^{24}Mg .

4.4.1 Cálculo del espectro.

El cálculo del espectro del billar de Sinai puede realizarse de forma numérica representando el sistema como un cuadrado unidad con condiciones de contorno periódicas y con un disco de radio $0 \leq R \leq 1/2$ en su centro. El caso $R = 0$ es clásicamente integrable; para cualquier valor $R > 0$ el sistema es ergódico.

La solución al problema con $R > 0$ puede obtenerse mediante el cálculo de un determinante cuyos elementos se calculan mediante una suma a convergencia [9]. Todos estos cálculos son formalmente idénticos para los distintos valores del radio R del disco reflectante, por lo que es posible calcular el espectro para diferentes valores de R con el mismo algoritmo; se puede así obtener una colectividad semejante a la de la sección anterior. El procedimiento, no obstante, es lento y presenta algunos problemas para valores grandes de la energía, por lo que no es posible en cualquier caso calcular espectros muy largos. Además, la dinámica para distintos valores de R no es totalmente independiente, de modo que para poder promediar espectros distintos (análogamente a como se han promediado los distintos J en la sección

anterior) hay que restringirse a unos pocos valores de R distantes entre sí.

En este trabajo hemos realizado el cálculo del espectro para valores de la energía $E < 5000$ y para los radios siguientes: $R = 0.20$, $R = 0.25$, $R = 0.30$, $R = 0.35$, $R = 0.40$ y $R = 0.45$; no se han considerado los casos $R < 0.20$ porque en ellos la saturación de Berry aparece demasiado pronto⁹ [9].

4.4.2 Método de reescalado.

La densidad de niveles para el billar de Sinai puede calcularse mediante una expansión semiclásica. Con esta aproximación, la densidad se divide en una parte suave y en una parte fluctuante, siendo la primera:

$$\bar{N}(E) = \frac{\pi}{8}(1 - \pi R^2)E - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2^{1/2}} - R \left(2 - \frac{\pi}{4} \right) \right] E^{1/2} + \frac{31}{96}, \quad (4.16)$$

de manera que el reescalado puede llevarse a cabo globalmente de forma analítica. En este trabajo hemos preferido, no obstante, realizar un ajuste con unos pocos parámetros libres con el fin de compensar pequeñas desviaciones que aparecen a lo largo del espectro y para poder seleccionar porciones del espectro sin necesidad de calcular como afecta a la relación anterior el cambio de origen. Las expresiones que hemos utilizado para realizar este ajuste son de la forma:

$$\bar{N}(E) = A + BE^{1/2} + CE, \quad (4.17)$$

donde A , B y C son tres parámetros libres; no hemos hecho más, por lo tanto, que dejar libres los coeficientes de la expresión anterior. Los resultados que hemos obtenido en todos los casos para estos tres parámetros son muy semejantes a las constantes que aparecen en la expresión (4.16).

La forma de la densidad acumulada de niveles, expresada en (4.16), pone de manifiesto que el número de niveles para un intervalo cualquiera de energía es menor según aumenta el radio. Esto trae como consecuencia que la dificultad y el tiempo necesario para calcular un espectro se incrementan con el radio, al ser necesario ir cada vez a valores de la energía más elevados. En este trabajo nos hemos restringido a $E < 5000$; los espectros obtenidos para cada radio tienen así diferente longitud, según se muestra en la tabla 4.4.

⁹La saturación de Berry [10] es un fenómeno relacionado con la presencia de órbitas clásicas periódicas y que se manifiesta en un aplanamiento de la Δ_3 , es decir, en una alteración de las correlaciones a largo alcance. Esta saturación empieza a ser apreciable para $L \sim \hbar^{-(N-1)}$, donde N es el número de grados de libertad del sistema; sólo es importante, en consecuencia, en sistemas relativamente sencillos, como el que se está estudiando.

| R | L |
|----------|----------|
| 0.20 | 1655 |
| 0.25 | 1538 |
| 0.30 | 1367 |
| 0.35 | 1163 |
| 0.40 | 952 |
| 0.45 | 693 |

Tabla 4.4: Valores de R y longitud de cada espectro en el billar de Sinai.

4.4.3 Estudio de la función δ_n .

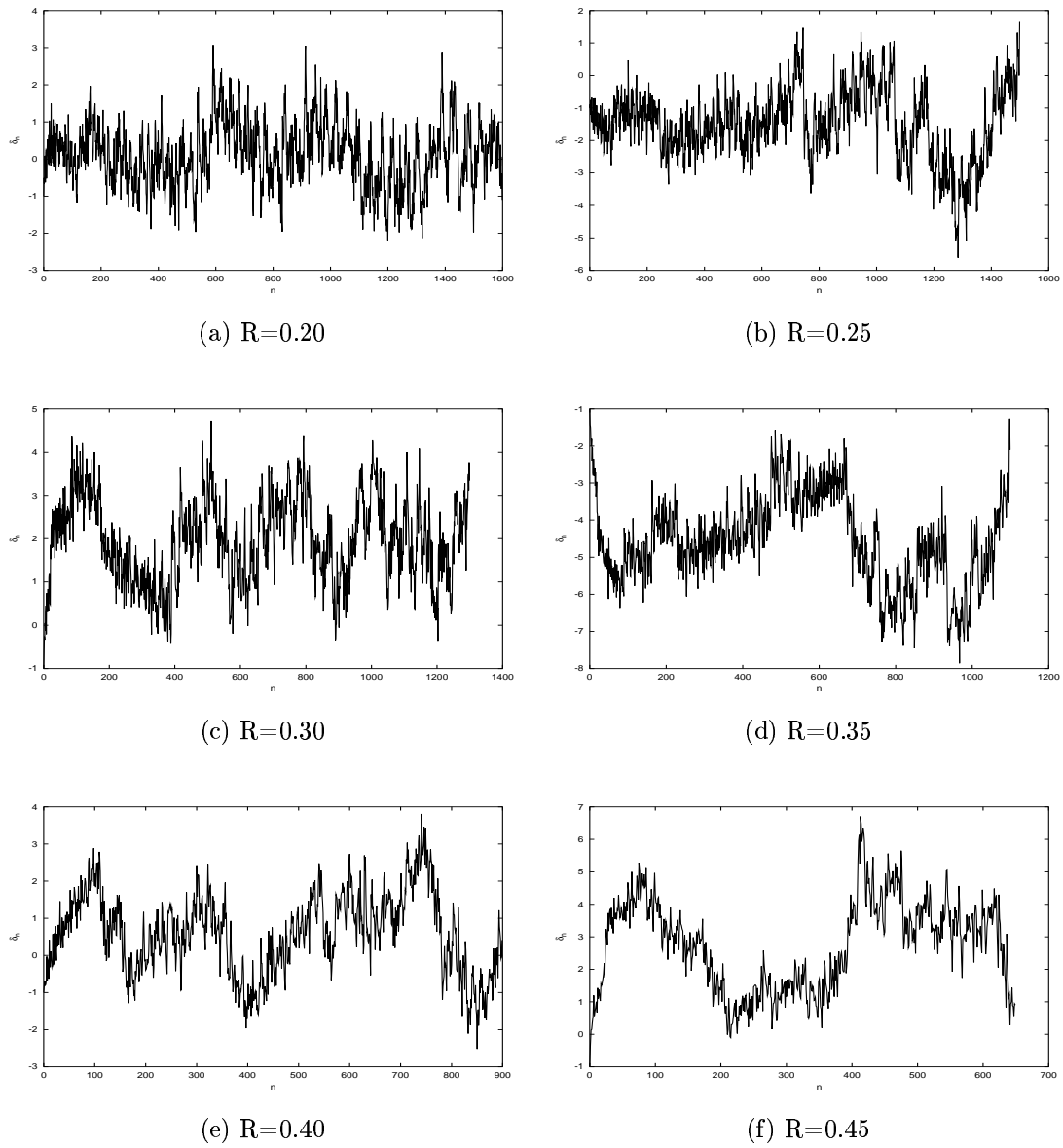
Al igual que hicimos en el caso del ^{24}Mg , hemos calculado en primer lugar la función δ_n de manera independiente para los distintos valores del radio R del disco. Los resultados se presentan en la figura 4.8.

Si se comparan estos resultados con los obtenidos para los casos anteriores se aprecian algunas diferencias cualitativas en la forma de las curvas. En algunos casos, como $R = 0.20$, parece distinguirse una cierta periodicidad de muy baja frecuencia; en otros, como $R = 0.35$ y $R = 0.45$ se observan grandes desviaciones con respecto al valor medio. El caso $R = 0.20$ puede deberse a la aparición de órbitas periódicas relacionadas con la saturación de Berry, fenómeno relacionado directamente con la dinámica clásica del sistema que no puede tener lugar en sistemas como los núcleos atómicos. Los casos $R = 0.35$ y $R = 0.45$, por el contrario, pueden deberse a pequeños problemas de reescalado o, incluso, a la aparición de algunos errores en el cálculo del espectro¹⁰

Para medir más cuantitativamente la influencia de estas anomalías hemos calculado el densidad espectral para cada uno de los valores de R por separado. El resultado, tratado de la misma manera que en el caso del ^{24}Mg , se presenta en la figura 4.9. El ajuste a una ley de potencias $P(f) \propto 1/f^B$ es, a pesar de lo que se ha comentado, bastante bueno en los seis sistemas; en todo caso el valor $R = 0.45$ presenta algunos problemas que pueden deberse a las posibles anomalías expuestas con anterioridad. Los resultados para el ajuste se presentan en la tabla 4.5. En general se obtienen unos valores un poco mayores que $B = 1$, sobre todo en $R = 0.35$ y $R = 0.45$, aunque este último es menos significativo porque su ajuste es algo peor; la limpieza del ajuste en el resto de los casos, junto con los valores obtenidos para B , permiten corroborar a nuestro juicio los resultados anteriores.

Con el fin de optimar el cálculo del valor de B hemos procedido igual que en el caso del ^{24}Mg , esto es, generando dos colectividades con espectros de longitud $L = 256$ y $L = 512$. Los resultados se presentan en las figuras 4.10 y 4.11 respectivamente.

¹⁰Según aumentan E y R el cálculo se va haciendo cada vez menos preciso. Bohigas *et al.*, por ejemplo, utilizaron sólo unos pocos niveles con $R = 0.2$, $R = 0.3$ y $R = 0.4$ para su conjetura BGS.

Figura 4.8: Función δ_n para el billar de Sinai.

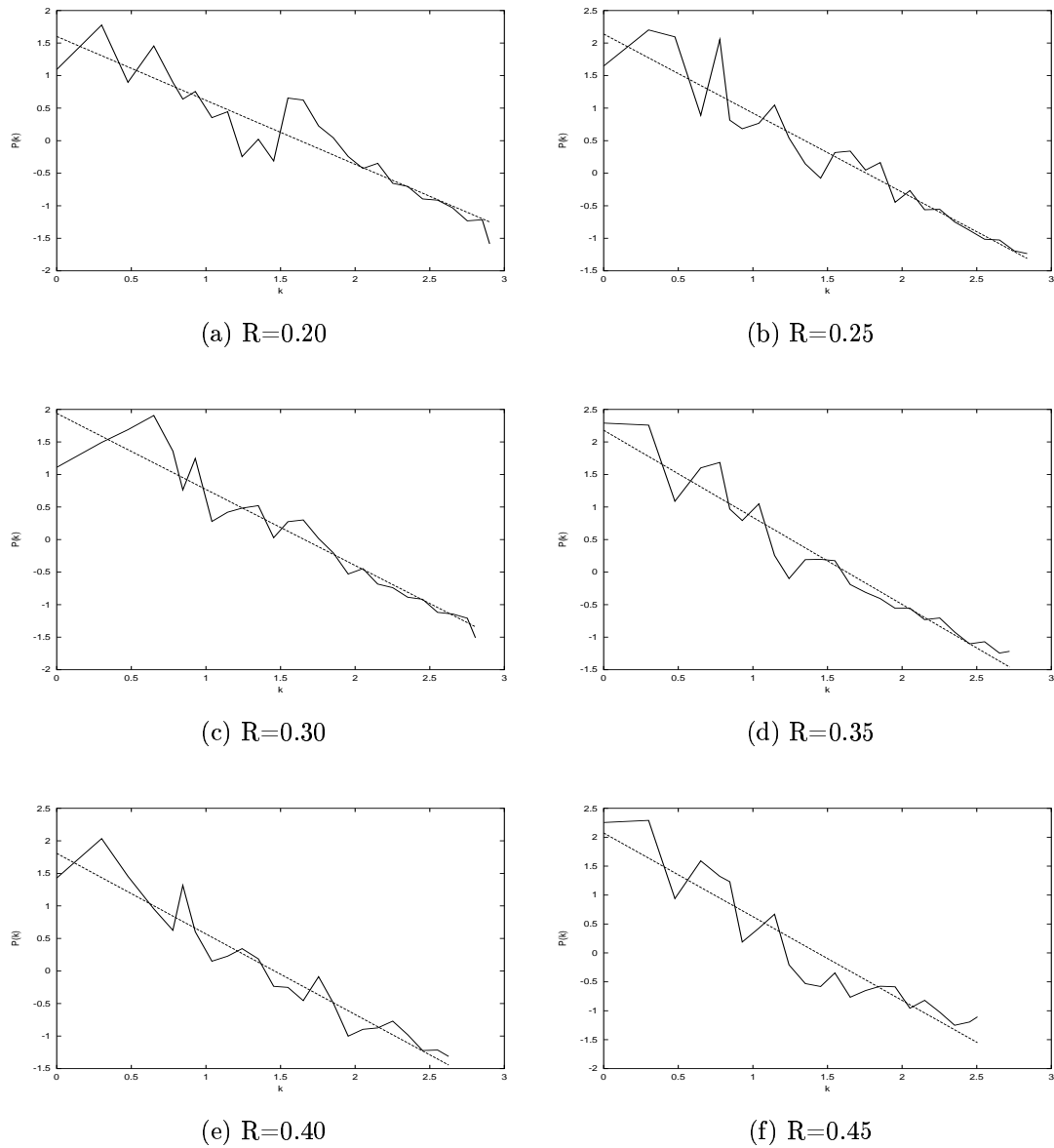
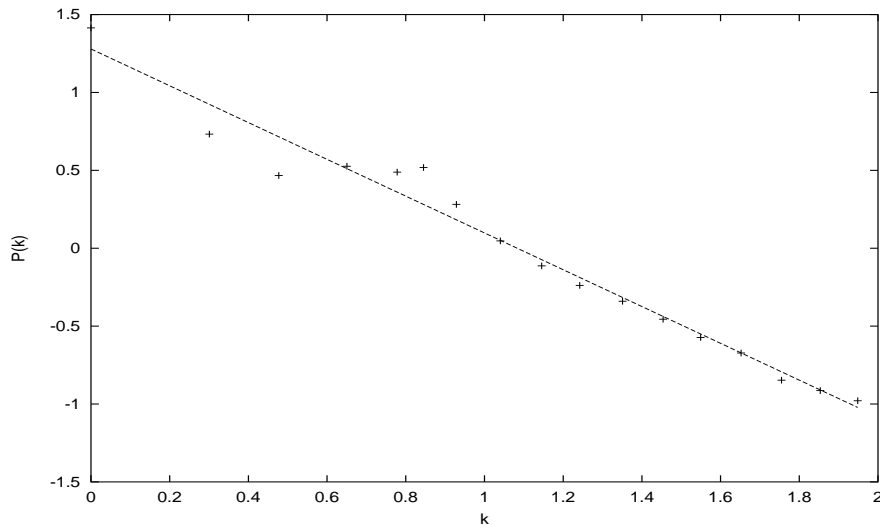


Figura 4.9: Densidad espectral de la función δ_n para el billar de Sinai.

| R | L |
|----------|-----------------|
| 0.20 | 0.98 ± 0.07 |
| 0.25 | 1.21 ± 0.08 |
| 0.30 | 1.17 ± 0.07 |
| 0.35 | 1.34 ± 0.07 |
| 0.40 | 1.24 ± 0.07 |
| 0.45 | 1.45 ± 0.12 |

Tabla 4.5: Valor del exponente α para cada R en el billar de Sinai.Figura 4.10: *Power spectrum* del billar de Sinai; subconjuntos $L = 256$.

Al igual que en la sección anterior se ha vuelto a hacer el reescalado de manera independiente para cada uno de los espectros; a pesar de las posibles anomalías presentes en $R = 0.35$ y $R = 0.45$ se ha seguido utilizando la misma función con tres parámetros libres, dado que no podemos asegurar con exactitud si dichas anomalías se deben al reescalado.

A la vista de las gráficas se observa que en general la ley de potencias $P(f) \propto 1/f^B$ se verifica bastante bien. En todo caso, en ambas colectividades, pero sobre todo en $L = 512$, se observa una especie de pico a media frecuencia. La aparición de este pico puede ser debida a la saturación de Berry; el hecho de que sea mucho más pronunciado para el caso $L = 512$ es consistente con esta posibilidad¹¹.

Los resultados que se obtienen para ambos casos son los siguientes:

¹¹En el trabajo seminal de Bohigas sólo se calculó la función Δ_3 para $L \leq 15$. La situación del pico en la densidad espectral de la función δ_n indica que la saturación podría empezar a aparecer en torno a $L \approx 20$, por lo que no se apreciaría en un análisis como el de Bohigas *et al.*

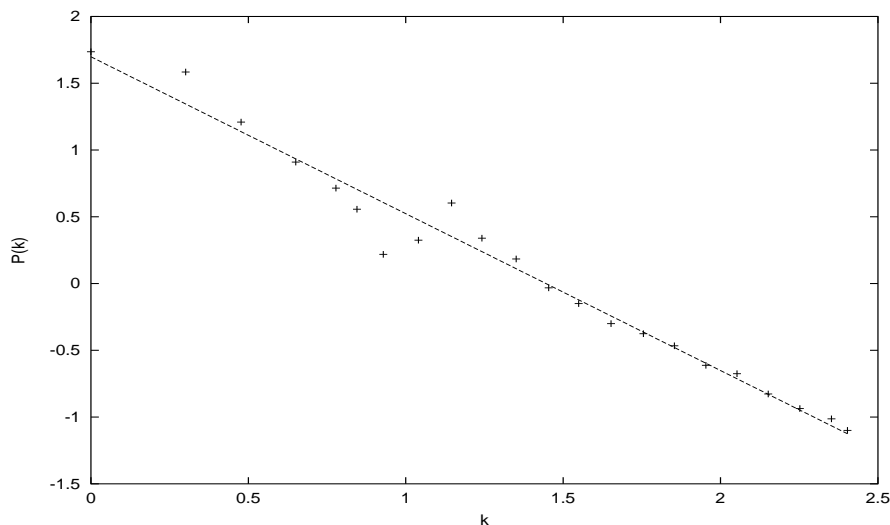


Figura 4.11: *Power spectrum* del billar de Sinai; subconjuntos $L = 512$.

$$B_{256} = 1.18 \pm 0.05$$

$$B_{512} = 1.17 \pm 0.04$$

Ambos son un poco mayores que $B = 1$, pero no son necesariamente incompatibles con las conclusiones obtenidas en las secciones anteriores.

El hecho de que la saturación de Berry pudiera estar influyendo en la forma de la densidad espectral podría hacer pensar que tal vez el resultado que se ha obtenido no es muy significativo, o que hay diferencias importantes con los sistemas de secciones anteriores. En las figuras 4.10 y 4.11 se aprecia, no obstante, que la ley $P(f) \propto 1/f^B$, con los valores de B que se adjuntan, funciona muy bien para frecuencias altas, es decir, para valores de L inferiores a L_{max} de saturación; la naturaleza de las fluctuaciones, al menos para $L < L_{max}$ parece, por lo tanto, la misma en sistemas sencillos que en sistemas complejos.

4.5 Caos cuántico y ruido $1/f$. Análisis de los resultados.

Los resultados que se han obtenido en las secciones precedentes permiten establecer una vinculación directa entre las fluctuaciones de los espectros de los sistemas cuánticos caóticos y el ruido coloreado, $1/f^B$; hemos formulado dicha vinculación mediante la siguiente conjetura:

El espectro de energías de los sistemas cuánticos caóticos está caracterizado por un ruido $1/f$.

La consecuencia más importante de esta conjetura es la caracterización de las fluctuaciones de todos los espectros cuánticos caóticos por una misma propiedad, independientemente de sus simetrías. A falta de datos experimentales (muy difíciles de conseguir), los resultados obtenidos para el ^{24}Mg y el billar de Sinai corroboran en gran medida que la conjetura es correcta tanto en un sistema complejo (de muchos cuerpos) como en un sistema simple; la pequeña desviación observada en este último caso puede deberse a los efectos que produce sobre el espectro la existencia de órbitas periódicas.

Como ya se comentó en el capítulo 2, la presencia de ruido $1/f$ es un fenómeno casi ubicuo en la naturaleza, hasta el punto de que no parece posible encontrar una fenomenología única subyacente. En física clásica, este tipo de fluctuaciones aparece en muchas ocasiones asociado al caos, tanto en sistemas simples como en sistemas complejos; tanto como ruido estocástico o aleatorio (por ejemplo en sistemas electrónicos), como asociado a una dinámica relativamente sencilla (por ejemplo en sistemas con intermitencia). El hecho de que en caos cuántico aparezca también tanto en sistemas sencillos como en sistemas complejos incita a investigar si sucede algo como en la física clásica, en donde es posible distinguir, por ejemplo, el ruido $1/f$ de intermitencia del estocástico.

4.5.1 Análisis multifractal de los espectros.

El estudio de la densidad espectral de la función δ_n aporta gran información a cerca de la naturaleza de las fluctuaciones de los espectros, pero toda esa información involucra, tan sólo, a los momentos estadísticos de orden dos. Los resultados de las secciones anteriores muestran que los espectros de la RMT, del ^{24}Mg y del billar de Sinai son muy similares en lo que se refiere a esta magnitud, aunque con pequeñas diferencias, sobre todo en el caso del billar. Con el fin de determinar si estas diferencias se deben tan sólo a efectos como la saturación de Berry, o si en ellas se esconden diferencias fundamentales en la naturaleza de las fluctuaciones, hemos calculado tanto el parámetro de Hurst como el espectro multifractal de un representante de cada uno de los sistemas. Hemos utilizado para ello una matriz GOE con $N = 1024$, 1024 niveles consecutivos con $J = 4$ del ^{24}Mg y 1024 niveles consecutivos con $R = 0.20$ del billar de Sinai¹². En el caso del núcleo y del billar, hemos elegido estos casos principalmente por dos razones: (a) porque sus espectros son lo suficientemente largos, y (b) porque en ambos casos el valor del exponente B es muy parecido y muy próximo a la unidad; las diferencias que aparecieran tanto

¹²El uso de secuencias $L = 2^n$ permite optimar tanto el cálculo del exponente de Hurst como la determinación del espectro multifractal.

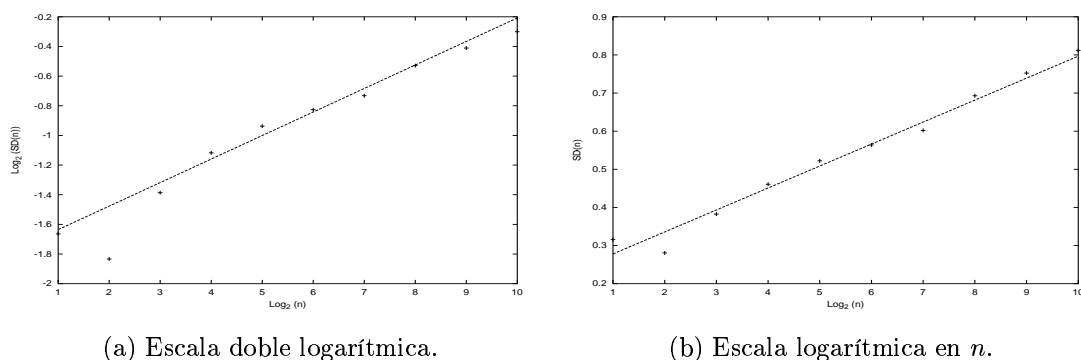


Figura 4.12: Estimación del parámetro de Hurst para una matriz GOE.

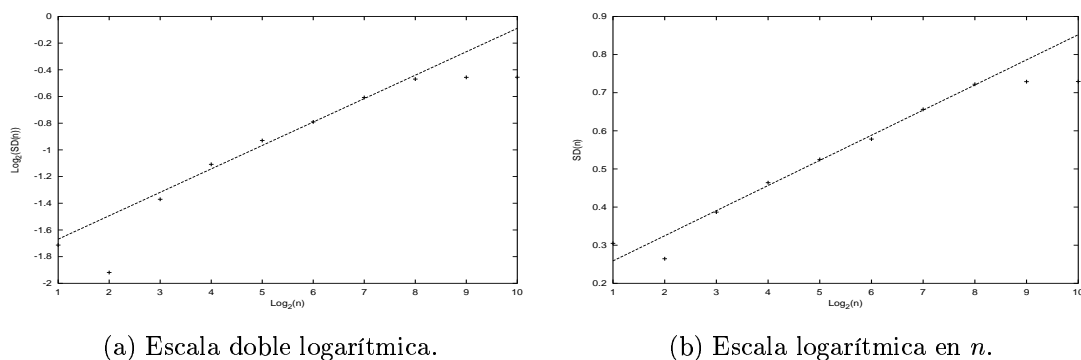
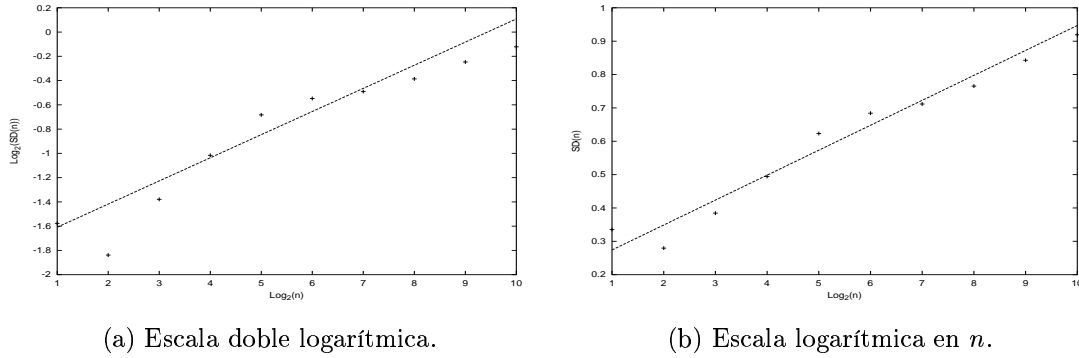


Figura 4.13: Estimación del parámetro de Hurst para el espectro $J = 4$ del ^{24}Mg .

en el parámetro de Hurst como en el espectro multifractal no serían achacables, por lo tanto, a diferencias en la densidad espectral.

Para estimar el parámetro de Hurst hemos utilizado el procedimiento de *scaled windowed variance*, comentado con anterioridad (véase capítulo 2). Los resultados que hemos obtenido, se representan en las figuras 4.12, 4.13 y 4.14, en las que se representa el cálculo de la *window scaled variance* tanto en escala doble logarítmica como dicha magnitud en función de $\log(n)$; para ambas representaciones, la línea continua representa el mejor ajuste lineal, realizado despreciando los dos primeros y los dos últimos puntos. En los tres casos el ajuste $SD(n)$ frente a $\log(n)$ parece algo mejor que el doble logarítmico, pero a la vista de las figuras tampoco pueden obtenerse conclusiones significativas. El ajuste doble logarítmico permite obtener una estimación para el parámetro de Hurst; los resultados de dichos ajustes se adjuntan en la tabla 4.6.

Los valores que hemos obtenido para H en los tres sistemas son un poco altos

Figura 4.14: Estimación del parámetro de hurst para el billar de Sinai con $R = 2$.

| Sistema | H |
|-----------|-------------------|
| GOE | 0.159 ± 0.014 |
| ^{24}Mg | 0.176 ± 0.009 |
| Sinai | 0.20 ± 0.03 |

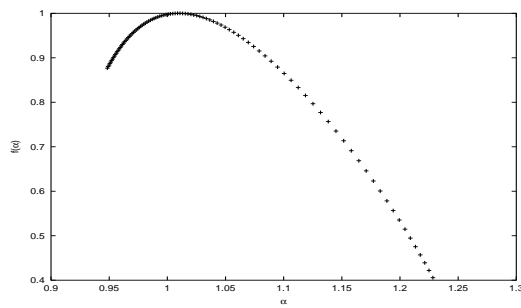
Tabla 4.6: Estimación del parámetro de Hurst.

considerando que la densidad espectral de todas ellas escala con un exponente $B \approx 1$; aplicando la relación $B = 2H + 1$ los tres deberían verificar $B \approx 1.3 - 1.4$. Esto, junto con el hecho de que el ajuste $SD(n)$ vs. $\log(n)$ sea al menos tan bueno como el doble logarítmico, nos lleva a postular que estos sistemas, al igual que ocurría con otros ruidos $1/f$, no se describen bien por un único exponente de Hurst; antes bien, la suposición $SD(n) \propto \log(n)$ parece ser más correcta.

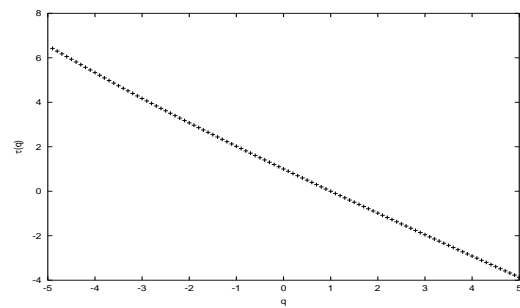
En cualquier caso, estos resultados parecen poner de manifiesto que las fluctuaciones asociadas a estos tres sistemas son de la misma naturaleza. Para corroborar o matizar esta conclusión hemos calculado el espectro multifractal de los mismos. Los resultados obtenidos, tanto para el espectro de singularidades $f(\alpha)$, como para la secuencia de exponentes de masa $\tau(q)$ se representan en las figuras 4.15, 4.16, 4.17.

Al igual que en la estimación del parámetro de Hurst, los resultados son muy similares en los tres casos: un espectro de singularidades desplazado hacia $\alpha > 1$ y comprendido, aproximadamente, en el intervalo $0.9 < \alpha < 1.3$. Además, este comportamiento global (con independencia del rango de valores de α involucrado, que puede depender del tamaño de la señal) es muy semejante al que obtuvimos en el segundo capítulo al analizar los ruidos $1/f$ generados mediante algoritmos basados en números aleatorios, esto es, sin una dinámica subyacente. Esto, junto con la estimación del exponente de Hurst realizada con anterioridad y el comportamiento de la densidad espectral, nos permiten concluir lo siguiente:

Los espectros de los sistemas cuánticos caóticos están caracterizados por un ruido

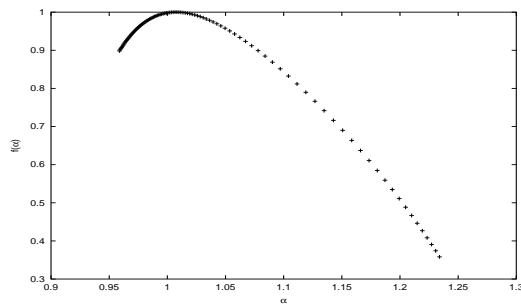


(a) Espectro de singularidades.

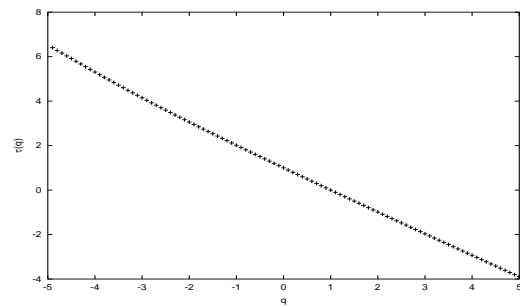


(b) Secuencia de exponentes de masa.

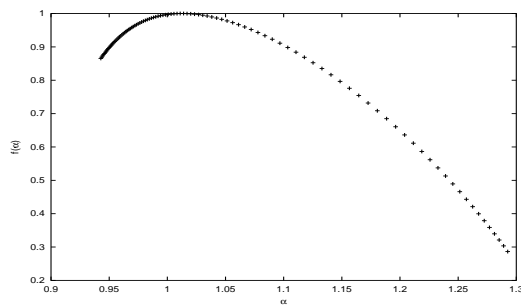
Figura 4.15: Espectro multifractal para una matriz GOE.



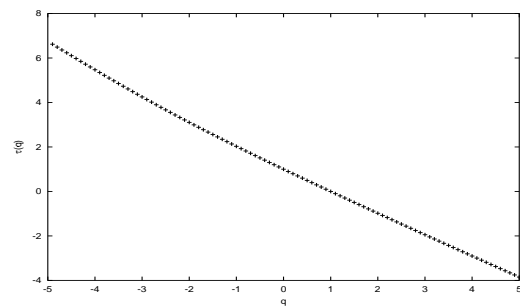
(a) Espectro de singularidades.



(b) Secuencia de exponentes de masa.

Figura 4.16: Espectro multifractal para el espectro $J = 4$ del ^{24}Mg .

(a) Espectro de singularidades.



(b) Secuencia de exponentes de masa.

Figura 4.17: Espectro multifractal para el billar de Sinai con $R = 2$.

$1/f$ puramente estocástico, esto es, sin dinámica compleja subyacente.

Esta nueva conjetura permite caracterizar las fluctuaciones en el espectro de energías de los sistemas cuánticos caóticos con un poco más de precisión. Los resultados que se han presentado a lo largo de este capítulo son consistentes con ella, al menos en buena aproximación. En todo caso, analizando en detalle las diferencias entre el ^{24}Mg y el billar de Sinai, la conjetura puede matizarse de la siguiente manera:

Los sistemas cuánticos caóticos con muchos grados de libertad están caracterizados por un espectro de energías cuyas fluctuaciones quedan descritas por un ruido $1/f$ estocástico. Los sistemas cuánticos caóticos sencillos presentan el mismo tipo de fluctuaciones, pero entre ellas pueden aparecer también algunos rastros de la mecánica clásica subyacente, tales como frecuencias fundamentales asociadas a las órbitas periódicas del sistema.

4.5.2 Comparación con otros sistemas.

Todos los cálculos realizados en la sección anterior involucran tan sólo un espectro de longitud bastante pequeña ($L = 1024$); es recomendable, por lo tanto, tratar de mejorar los resultados utilizando más espectros y más grandes. Evidentemente, esto es casi imposible si se quieren emplear espectros bien procedentes de experimento, bien de modelos teóricos como los núcleos o los billares. Sin embargo, sí puede hacerse con relativa facilidad utilizando espectros de la RMT que, según se ha visto, reproducen bastante bien las fluctuaciones de sistemas físicos muy diferentes.

En esta sección se presentan los mismos cálculos que en la sección anterior utilizando ahora tres colectividades compuestas respectivamente por 100 matrices GOE con¹³ $N = 4096$, 100 señales $1/f$ generadas según la ecuación (2.34), y 100 señales que presentan intermitencia. La inclusión de esta última colectividad permite comparar los ruidos $1/f$ estocásticos con otras señales que presentan una densidad espectral parecida, pero que están caracterizados por una dinámica determinista compleja.

La intermitencia es una propiedad que aparece en muchos sistemas con caos determinista, sobre todo aquellos cuya dinámica está caracterizada por la presencia de bifurcaciones [25]. En este tipo de sistemas suelen alternarse las fases caóticas, en la que la trayectoria es errática y con grandes fluctuaciones, con las fases regulares, en las que la evolución es suave; con el término *intermitencia* se designa precisamente esta propiedad.

Una señal intermitente sencilla, con propiedades muy semejantes a otras más complejas, como la que aparece, por ejemplo, en el atractor de Lorenz, puede obte-

¹³Se ha elegido el GOE porque es la colectividad RMT para la que se requiere menos memoria y tiempo de CPU.

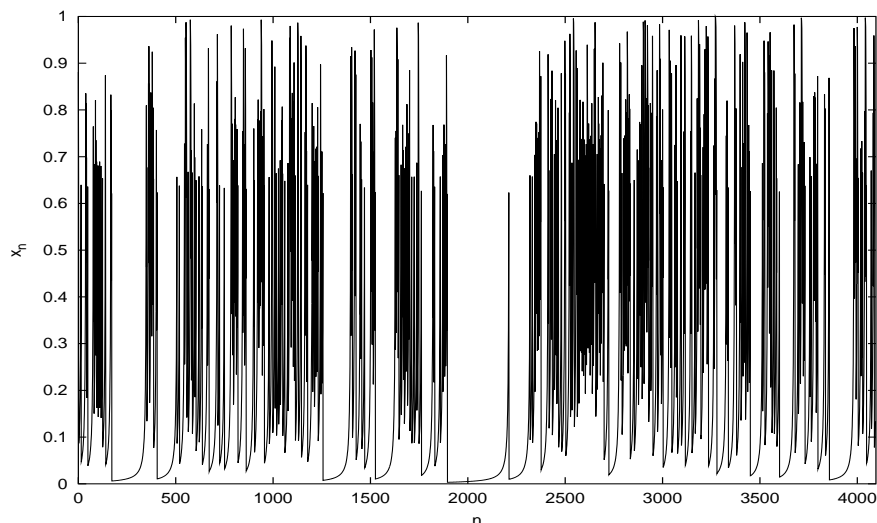


Figura 4.18: Señal intermitente.

nerse mediante una relación como la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n^b \pmod{1} \quad (4.18)$$

donde b es un exponente que, en este caso, se ha tomado $b = 2.01$. Esta ecuación da lugar a una señal discreta $\{x_n\}$ que puede compararse directamente con un espectro o con un proceso estocástico; es posible, además, generar series independientes sin cambiar el parámetro b simplemente utilizando distintos valores iniciales x_0 .

El aspecto de una trayectoria gobernada por el mapa (4.18) con una condición inicial x_0 concreta es el que se representa en la figura 4.18. En ella se aprecia perfectamente que la forma de la curva es muy diferente a la de los ruidos $1/f$ estocásticos o la de la función δ_n para un sistema cuántico caótico, por lo que no parece que este tipo de procesos puedan estar relacionados con el caos cuántico.

La densidad espectral para este tipo de señales, sin embargo, es bastante semejante al de los ruidos $1/f^B$ estocásticos. En la figura 4.19 se representa la densidad espectral media para 100 realizaciones del proceso (4.18), cada una de ellas obtenida utilizando un valor inicial x_0 generado aleatoriamente con una distribución uniforme en $[0, 1]$. En ella se ve como, al menos en un rango razonablemente amplio de frecuencias, $P(k)$ escala bastante bien según una ley de potencias; la comparación entre las propiedades fractales de este tipo de señales y las correspondientes a matrices GOE y a otros ruidos $1/f$ resulta, por tanto, interesante.

Para calcular el parámetro de Hurst hemos procedido de igual forma que en la sección anterior, calculando la función $SD(n)$ por separado para cada serie y realizando a continuación la media sobre toda la colectividad. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 4.20, 4.21 y 4.22. En ellas se aprecia cómo en los tres

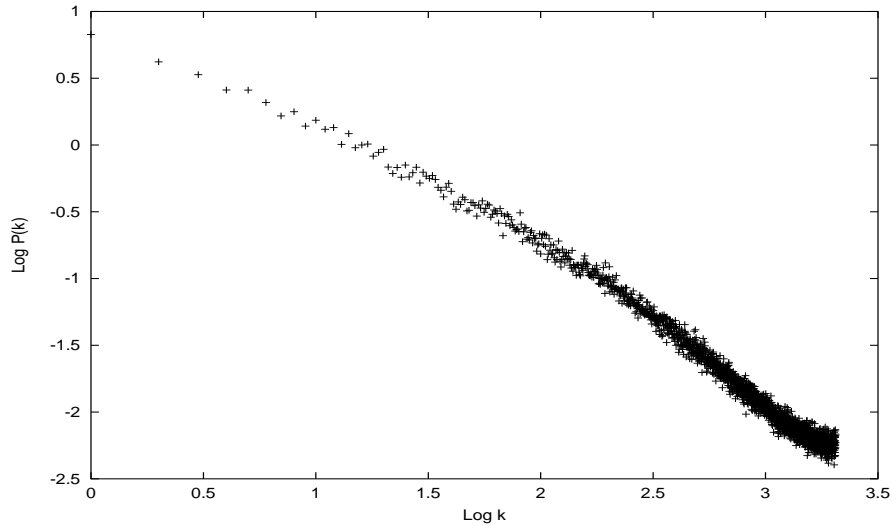
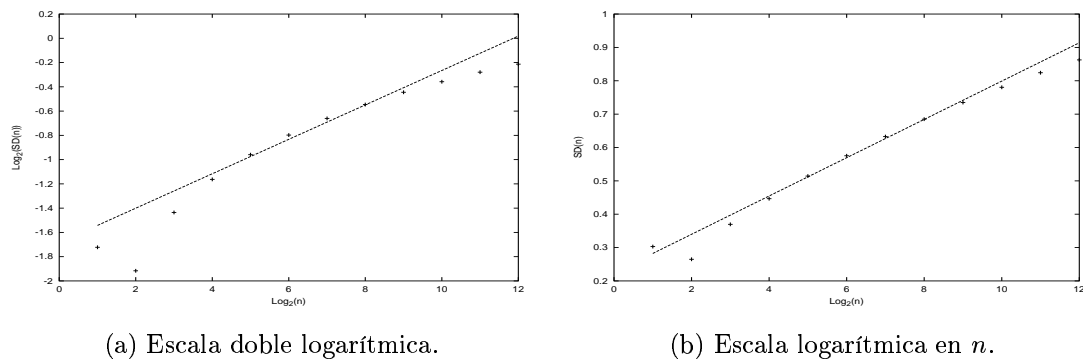


Figura 4.19: *Power spectrum medio* para señal intermitente.

casos el ajuste mediante la representación $SD(n)$ vs. $\log(n)$ es mejor que mediante la representación doble logarítmica; a este respecto, los resultados son mucho más claros que en la sección anterior.

Los resultados para el exponente de Hurst H estimados del mismo modo que en la sección anterior se muestran en la tabla 4.7. Nuevamente, los valores obtenidos son demasiado grandes, lo cual, junto con todo lo anterior, permite concluir que $SD(n) \propto \log n$ con bastante aproximación.

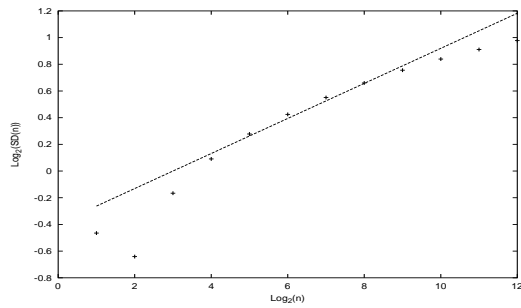
La estimación del exponente de Hurst permite establecer una relación directa entre estos sistemas y otros ruidos $1/f$, pero no parece muy adecuada para buscar diferencias entre ellos. Para tratar de caracterizar las diferencias que se aprecian en



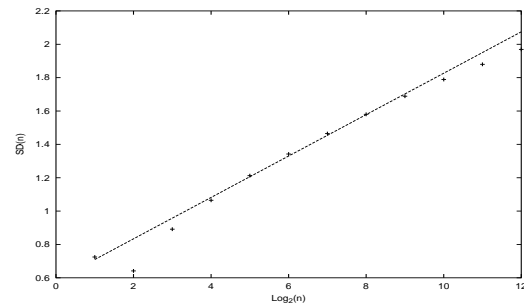
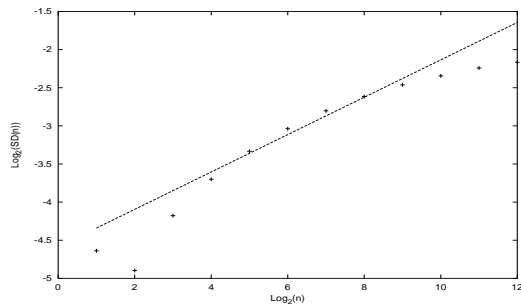
(a) Escala doble logarítmica.

(b) Escala logarítmica en n .

Figura 4.20: Estimación del parámetro de hurst para 100 matrices GOE.



(a) Escala doble logarítmica.

(b) Escala logarítmica en n .Figura 4.21: Estimación del parámetro de hurst para 100 ruidos $1/f$.

(a) Escala doble logarítmica.

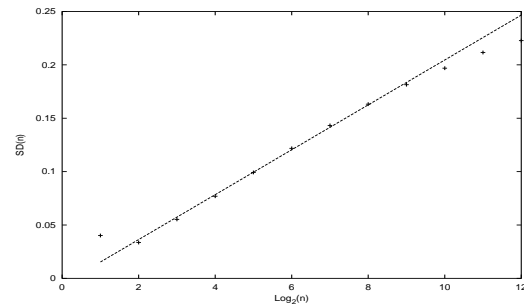
(b) Escala logarítmica en n .

Figura 4.22: Estimación del parámetro de hurst para 100 señales intermitentes.

| Sistema | H |
|---------------|-------------------|
| GOE | 0.142 ± 0.009 |
| Ruido $1/f$ | 0.131 ± 0.008 |
| Intermitencia | 0.245 ± 0.020 |

Tabla 4.7: Estimación del parámetro de Hurst.

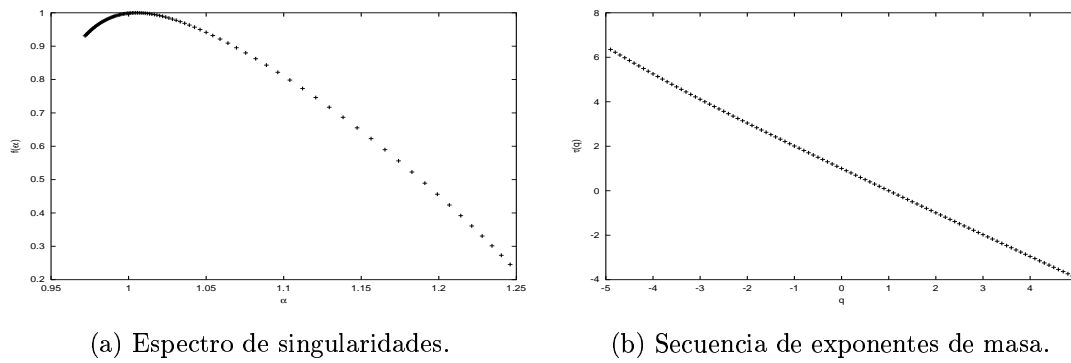
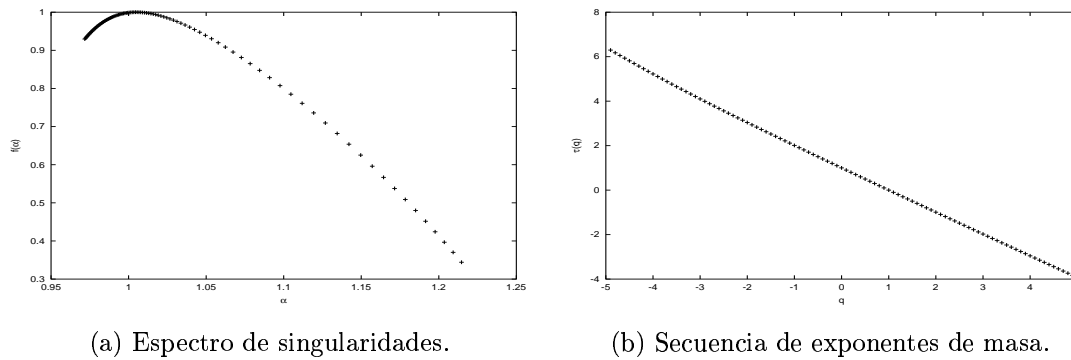


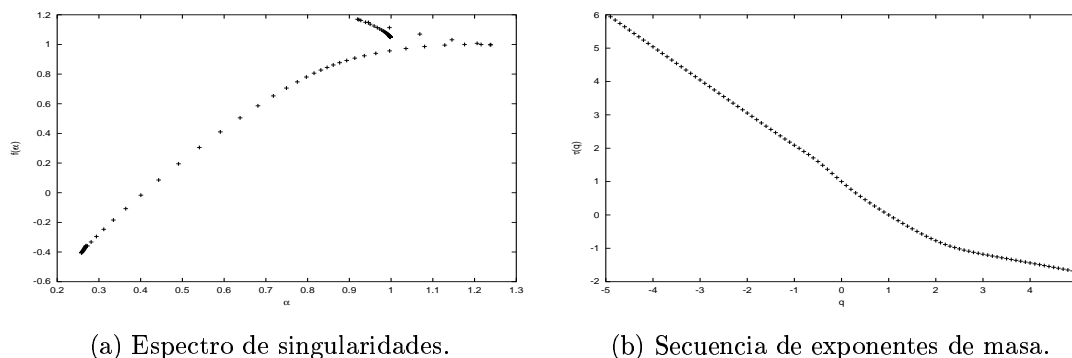
Figura 4.23: Espectro multifractal para 100 matrices GOE.

Figura 4.24: Espectro multifractal para 100 ruidos $1/f$.

la representación gráfica de la señal hemos calculado el espectro de singularidades y la secuencia de exponentes de masa para las tres señales. Al igual que en la estimación de H , hemos seguido el mismo procedimiento que en la sección anterior para cada señal de manera independiente, y hemos hecho al final un promedio sobre la colectividad. Los resultados que hemos obtenidos se presentan en las figuras 4.23, 4.24 y 4.25.

Los espectros de singularidades para la colectividad GOE y para la representante del ruido $1/f$ estocástico son cualitativamente iguales a los obtenidos en la sección anterior, lo que permite corroborar las conclusiones que allí se expusieron. El resultado para las señales con intermitencia es, en cambio, completamente diferente. En primer lugar, en la curva que hemos obtenido aparecen algunas irregularidades¹⁴, a

¹⁴Posiblemente, estas irregularidades tiendan a desaparecer si se aumenta el número de realizaciones en la estadística: por su naturaleza altamente irregular, el cálculo de propiedades estadísticas en señales intermitentes requiere un número muy grande de realizaciones.



(a) Espectro de singularidades.

(b) Secuencia de exponentes de masa.

Figura 4.25: Espectro multifractal para 100 señales intermitentes.

pesar de que los momentos escalan muy bien¹⁵: los valores negativos para $f(\alpha)$ son completamente espurios y, además, aparecen algunas anomalías en las proximidades del valor máximo de la función. En segundo lugar, y más importante de cara a la caracterización de las señales, la función $f(\alpha)$ está desplazada hacia valores $\alpha < 1$, justo al contrario de lo que ocurría en los otros casos.

Estas diferencias en los espectros multifractales son más que suficientes para concluir que el ruido $1/f^\alpha$ asociado a fenómenos de intermitencia, esto es, asociado a fenómenos de bifurcación en caos clásico, es completamente diferente al ruido $1/f$ estocástico que aparece en los espectros de sistemas cuánticos caóticos. Quedan así corroboradas las conjeturas enunciadas en el apartado anterior, en las que se postulaba que en las fluctuaciones de los espectros de sistemas cuánticos caóticos no hay grandes diferencias en función de la complejidad del sistema. Las principales manifestaciones del caso en sistemas cuánticos parecen ser, por lo tanto, independientes de la complejidad del hamiltoniano, a excepción de efectos como la saturación de Berry, que sí permiten discernir entre un hamiltoniano caótico sencillo y uno complejo.

¹⁵En todo el trabajo se ha optado por no mostrar en ningún caso el resultado para la función de partición, a pesar de que es necesario verificar que escala correctamente antes de calcular las curvas $f(\alpha)$ y $\tau(q)$. En todos los cálculos realizados el escalado se verificaba a la perfección.

Capítulo 5

Conclusiones.

A lo largo de este trabajo hemos estudiado, principalmente, la naturaleza de las fluctuaciones de los sistemas cuánticos caóticos utilizando para ello técnicas procedentes de la teoría fractal y multifractal. La realización de este tipo de estudios resulta de gran interés para comprender cómo se manifiesta el caos en mecánica cuántica, ya que la densidad de niveles energéticos, y más en concreto sus fluctuaciones, están, según la aproximación semiclásica, claramente influidas por la naturaleza de las órbitas clásicas del sistema. Resultados anteriores a este estudio muestran que dichas fluctuaciones en sistemas clásicamente caóticos quedan bien descritas por la teoría de matrices aleatorias, que fue formulada en principio para comprender las propiedades estadísticas del espectro de los núcleos complejos; la aportación fundamental de este trabajo es la caracterización de las citadas fluctuaciones según su propia naturaleza, sin hacer referencia a ningún modelo sino en función de estadísticos aplicables a otros muchos sistemas, y, más en concreto, al caos clásico.

Para llevar a cabo esta tarea hemos centrado nuestro estudio en el cálculo de tres magnitudes características: la densidad espectral, el parámetro de Hurst y el espectro multifractal; las tres se utilizan con cierta asiduidad en la caracterización de sistemas clásicos caóticos, como la turbulencia. El estudio de estas magnitudes en tres sistemas diferentes: la teoría de matrices aleatorias, el ^{24}Mg y el billar de Sinai nos ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

El cálculo de la densidad espectral ha mostrado que las fluctuaciones del espectro de energías en los sistemas cuánticos caóticos se comportan como un ruido $1/f$ prácticamente perfecto, frente a las fluctuaciones tipo movimiento browniano (ruido $1/f^2$), que caracterizan a los sistemas integrables ¹. Este es el resultado más importante del presente trabajo, ya que permite caracterizar el caos cuántico en términos de la siguiente conjetura:

El espectro de energías de los sistemas cuánticos caóticos está caracterizado por

¹Este resultado ha sido enviado para su publicación a la revista *Physical Review Letters* [32]

un ruido $1/f$.

Este resultado es, además, muy interesante por otras dos razones. En primer lugar, el ruido $1/f$ aparece en muchos y muy diversos sistemas complejos, lo cual manifiesta que el tipo de fluctuaciones características del caos cuántico aparece también en otros muchos sistemas complejos. En segundo lugar, establece una conexión entre la sorprendente aplicabilidad de la teoría de matrices aleatorias y la ubicuidad del ruido $1/f$.

La aparición del ruido $1/f$ en sistemas cuánticos caóticos puede comprenderse cualitativamente mediante el formalismo del movimiento browniano fraccionario. La presencia de repulsión entre niveles, característica de este tipo de sistemas, da lugar a que el espectro se organice de tal forma que una pequeña desviación de un nivel con respecto a su posición media tiende a ser compensada en los niveles de alrededor. Esta compensación se realiza a largo alcance y da lugar a una señal muy antipersistente, concretamente a un límite de antipersistencia. Interpretado desde este punto de vista, el resultado es muy interesante, ya que la antipersistencia se relaciona habitualmente con sistemas organizados, como el latido cardíaco, frente a la persistencia característica de sistemas desorganizados, como el flujo de agua en un río.

La estimación del exponente de Hurst nos ha permitido confirmar, en cierto modo, la interpretación en base a persistencia/antipersistencia. La obtención de un crecimiento no potencial sino logarítmico está de acuerdo con la interpretación de sistema límite exterior al movimiento browniano fraccionario; este resultado coincide, además, con los obtenidos para ruidos $1/f$ generados mediante algoritmos basados en variables aleatorias.

Por último, el cálculo del espectro multifractal nos ha permitido concluir que no existen diferencias fundamentales entre las fluctuaciones del espectro de un sistema caótico sencillo, el billar de Sinai, y un sistema caótico complejo, el ^{24}Mg . Su comparación con el de un sistema intermitente, característico del caos clásico determinista, nos ha mostrado que las fluctuaciones asociadas al caos cuántico tienen otra naturaleza: se parecen mucho más a las de los procesos estocásticos. A raíz de estos resultados no parece haber lugar a una interpretación del ruido $1/f$ en caos cuántico en términos clásicos como la intermitencia o las bifurcaciones.

Además del estudio de los espectros de sistemas cuánticos caóticos, en este trabajo hemos abordado otras dos tareas.

En primer lugar hemos estudiado en detalle las propiedades de algunos ruidos $1/f$ generados mediante algoritmos aleatorios. La motivación principal para realizar este estudio ha sido el hecho de que el ruido $1/f$ es un límite entre el movimiento browniano fraccionario $1 < B < 3$ y el ruido gaussiano fraccionario $-1 < B < 1$. El principal resultado que hemos obtenido es que muchas de sus propiedades, como el comportamiento de los momentos de orden 2, resultan ser intermedias al movimiento browniano fraccionario (crecimiento potencial) y al ruido gaussiano fraccionario

(estacionaridad). Este resultado está, además, directamente relacionado con las fluctuaciones de los sistemas cuánticos caóticos.

En segundo lugar hemos analizado en detalle el proceso de reescalado, necesario para analizar los espectros de niveles de los sistemas cuánticos. La principal conclusión que hemos obtenido es que la realización de dicho proceso, aun utilizando una aproximación global a la densidad de niveles, es crítica para el estudio ulterior de las correlaciones de largo alcance. Hemos propuesto, a su vez, un criterio para discernir cuando se ha realizado correctamente el reescalado.

En resumen, la principal aportación de este trabajo consiste en la identificación de una propiedad básica de los sistemas cuánticos caóticos. A partir de ella se abre una línea de investigación futura que se plasmará, entre otras publicaciones, en una tesis doctoral.

Apéndice A

Análisis de Fourier para procesos estocásticos.

A lo largo de todo el trabajo se ha utilizado el análisis de Fourier, y especialmente el cálculo de la densidad espectral, para caracterizar espectros y señales construidas mediante algoritmos basados en números aleatorios. Ésta es una técnica habitual a la hora de determinar ciertas propiedades estadísticas de señales temporales, pero no deja de llamar la atención que una herramienta diseñada para funciones periódicas resulte tan fructífera para señales que no lo son en absoluto. En este apéndice se aborda esta cuestión detallando con cierto rigor cómo puede extenderse el análisis de Fourier para señales aperiódicas y para procesos aleatorios. Se comienza para ello presentando en qué consisten y cómo se aplican estas técnicas a funciones periódicas y se extienden a continuación los resultados para otros tipos de funciones [28].

Una función periódica $f(x) = f(x + k \cdot p) \forall x$, donde p es el periodo y k un número entero, puede describirse mediante:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k x} \quad (\text{A.1})$$

donde A_k es un conjunto discreto de frecuencias, que identifican todos los periodos contenidos en la señal; al conjunto de frecuencias A_k se le denomina espectro de la función.

Una función no periódica puede describirse de una forma muy parecida considerando como una función con periodo infinito. En este caso, la relación anterior se generaliza a:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\omega) e^{i\omega x} \quad (\text{A.2})$$

si la función verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty \quad (\text{A.3})$$

donde $\rho(\omega)$ se denomina *densidad de frecuencias* y es, en general, compleja.

Una cantidad asociada a la densidad de frecuencias de gran interés es la *densidad de energías* o, también, *densidad espectral*, $|\rho(\omega)|^2 d\omega$, que mide la *energía* con la que contribuye cada frecuencia ω al espectro. Lo más interesante de esta magnitud es que es real, por lo que es mucho más útil para caracterizar a una señal que su densidad de frecuencias.

Esta generalización para funciones no periódicas parece bastante completa, pero no cubre algunas funciones no periódicas y no integrables que, sin embargo, presentan manifiestamente una cierta regularidad. Un ejemplo de este tipo de funciones es $f(x) = \cos(\sqrt{2}x)$, en la que, al ser $\sqrt{2}$ irracional no hay un periodo exacto. Para abarcar este tipo de funciones hay que utilizar una extensión del análisis de fourier en la cual

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ(\omega) e^{i\omega x} \quad (\text{A.4})$$

donde $dZ(\omega)$ es una generalización de la densidad de frecuencias $\rho(\omega)d(\omega)$, que vale:

$$dZ(\omega) = \begin{cases} A_k & \omega = \omega_k, k = 0, \pm 1, \pm 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

para una función periódica,

$$dZ(\omega) = \rho(\omega)d\omega \quad (\text{A.6})$$

para una función no periódica integrable, y

$$dZ(\omega) = O(\sqrt{d\omega}) \quad (\text{A.7})$$

para una función no periódica y no integrable¹.

Con esta última generalización es posible aplicar el análisis de fourier a casi cualquier función. Los procesos estocásticos, sin embargo, presentan aún algunas dificultades, ya que no están definidos de forma exacta sino mediante distribuciones de probabilidad. Este escollo fundamental puede superarse, no obstante, analizando realizaciones concretas, cuyos valores sí están bien definidos. Como, por lo general, un proceso estocástico no es ni periódico ni integrable, el objeto que lo caracteriza

¹El objeto $O(\sqrt{d\omega})$ es demasiado complejo como para describirlo aquí en detalle. Nótese, no obstante, la relación entre $\sqrt{d\omega}$ y el *periodo* irracional del ejemplo propuesto de función no periódica y no integrable.

es $dZ(\omega)$, que se puede definir como una variable aleatoria; el proceso estocástico (como secuencia temporal de variables aleatorias) queda determinado por $Z(\omega)$.

La caracterización de un proceso estocástico mediante $dZ(\omega)$ o $Z(\omega)$ es formalmente correcta pero muy poco práctica debido a la complejidad de estos objetos. Una forma de llevar a cabo esa descripción de manera sencilla es definiendo la siguiente magnitud:

$$q(\omega) = \frac{|dZ(\omega)|^2}{d\omega} \quad (\text{A.8})$$

que no es más que la densidad espectral².

Esta magnitud resulta de gran utilidad porque permite calcular el espectro de un proceso estocástico de una forma sencilla. Considérese un proceso $X(t)$, definido en principio para $t \in (-\infty, \infty)$ y, por lo tanto, no integrable. Una realización concreta de dicho proceso tiene, no obstante, una longitud finita, de manera que se puede definir a partir de ella un nuevo proceso $X_T(t)$ según

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & -T \leq t \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Este nuevo proceso es integrable, por lo que podemos aplicar sobre él el análisis de fourier clásico y obtener así su espectro de frecuencias

$$X_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_T(\omega) e^{i\omega t} \quad (\text{A.10})$$

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt X_T(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T dt X(t) e^{-i\omega t} \quad (\text{A.11})$$

Una vez definido el espectro $G_T(\omega)$ el siguiente paso es extender su definición para $t \rightarrow \infty$. Esta extensión no puede realizarse tomando simplemente $\lim_{T \rightarrow \infty} G_T(\omega)$, ya que el proceso es no integrable y, en consecuencia, $G_T(\omega) \rightarrow dZ(\omega)$. Sin embargo, el hecho de que esta última magnitud sea $O(\sqrt{dZ})$ para funciones no integrables permite definir

$$q(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{2T} d\omega \quad (\text{A.12})$$

que coincide con la definición de $q(\omega)$ introducida con anterioridad.

Esta magnitud, por lo tanto, puede calcularse directamente aplicando un algoritmo numérico de transformación de fourier (por ejemplo, un FFT) a una realización

²Nótese que, por ejemplo, para una señal no periódica pero integrable $dZ(\omega) = \rho(\omega)d\omega$ y, por lo tanto, $q(\omega) = |\rho(\omega)|^2 d\omega$.

concreta, y calculando el módulo al cuadrado del resultado; si se dispone de varias realizaciones, se puede caracterizar la colectividad según

$$h(\omega) = \langle q(\omega) \rangle \quad (\text{A.13})$$

que, formalmente, es

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left\langle \frac{|G_T(\omega)|^2}{2T} \right\rangle \right] \quad (\text{A.14})$$

El objeto $h(\omega)$ es el que define al proceso estocástico y el que hay que tratar de determinar en la medida de lo posible.

A.1 Aplicación al análisis de series temporales.

El análisis de series temporales consiste fundamentalmente en determinar las propiedades fundamentales de un proceso físico en función de una serie de datos, que suele ser un registro temporal. En casos como éste no es posible calcular la magnitud $h(\omega)$, ya que no hay posibilidad de realizar un promedio sobre distintas realizaciones del proceso; toda la información, en consecuencia, ha de obtenerse a partir de $q(\omega)$.

El cálculo de la función $q(\omega)$ para una señal temporal puede realizarse sin grandes problemas utilizando, por ejemplo, un algoritmo FFT. La representación en escala doble logarítmica de esta magnitud, muy útil para determinar una ley de escala del tipo $P(f) \propto 1/f^B$, produce, sin embargo, algunas complicaciones: las fluctuaciones se magnifican dificultando sobremanera el ajuste a una línea recta [30]. El cálculo de la magnitud promedio $h(\omega)$ soluciona en parte este problema, ya que la amplitud de las fluctuaciones disminuye al promediar; para los casos en los que no es posible realizar este promedio es necesario algún proceso alternativo que permita optimar el ajuste.

En la figura A.1 se representa la densidad espectral para el ejemplo de *azar salvaje* del capítulo dos. Junto con la señal, se representan dos rectas, una con $B = 1.0$ y la otra con $B = 1.5$; a la vista de la figura, ambas pueden considerarse igualmente válidas³.

Este resultado pone de manifiesto la necesidad de desarrollar un método alternativo. El más citado en la literatura, y el que se ha utilizado en este trabajo, consiste fundamentalmente en utilizar tan sólo unos pocos puntos representativos para realizar el ajuste; la selección de estos *representantes* se lleva a cabo de la siguiente manera [30]:

1. Se divide el eje x (ya en escala logarítmica) en sectores de igual tamaño.

³El ajuste por mínimos cuadrados arroja un valor $B = 1.01 \pm 0.03$ (!).

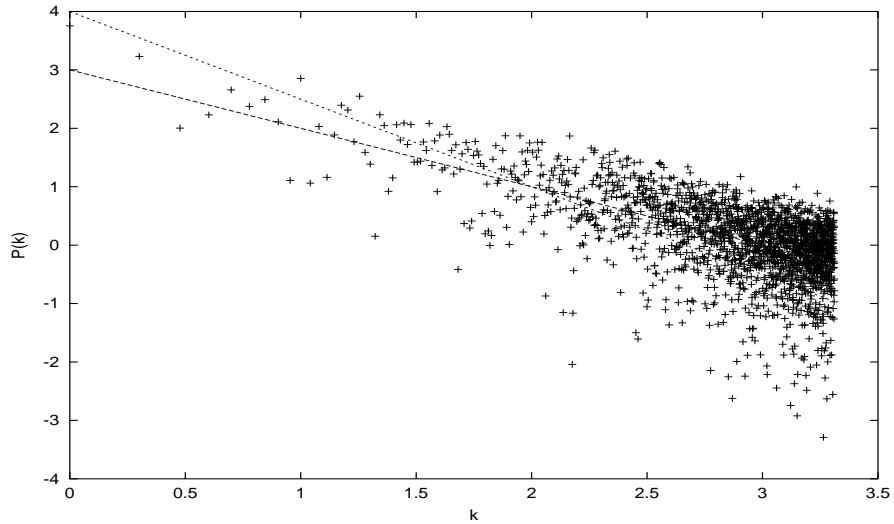


Figura A.1: Secuencia temporal autosimilar.

2. Se calcula el valor promedio del logaritmo de la densidad espectral en cada uno de los sectores.
3. Se toma como *representante* dicho valor promedio y se sitúa en el centro del sector.
4. Se realiza el ajuste con estos *representantes*

El resultado de realizar este procedimiento en la señal anterior es el que se muestra en la figura 2.2. En ella se observa que una vez realizado este proceso el ajuste se puede realizar con precisión⁴.

⁴El valor que se obtiene para B es muy parecido, tanto en su valor como en su error, al sorprendente resultado que se obtuvo en el ajuste de la señal original.

Bibliografía

- [1] H.J. Stöckmann, *Quantum Chaos*, Cambridge University Press, 1999.
- [2] Madan Lal Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, 1991.
- [3] Jean-François Gouyet, *Physics and fractal structures*, Springer, 1996.
- [4] Jens Feder, *Fractals*, Plenum Press, 1989.
- [5] F. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).
- [6] J. M. G. Gómez, R. A. Molina, A. Relaño & J. Retamosa, *Phys. Rev. E*, aceptado para su publicación.
- [7] M. V. Berry & M. Tabor, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **356**, 375 (1977).
- [8] O. Bohigas, M. J. Giannoni & C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [9] M. V. Berry, *Ann. Phys.* **131**, 163 (1981).
- [10] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **400**, 229 (1985).
- [11] N. P. Greis & H. S. Greenside, *Phys. Rev. A* **44**, 2324 (1991).
- [12] M. J. Cannon, D. B. Percival, D. C. Caccia, G. R. Raymond & J. B. Bassingthwaite, *Phys. A* **241**, 606 (1997).
- [13] B. B. Mandelbrot & J. R. Wallis, *Water Resour. Res* **5** 228 (1969).
- [14] B. B. Mandelbrot, *Investigación y Ciencia* **243**, 14 (1996).
- [15] E. Milotti, *Phys. Rev. E* **51**, 3087 (1995).
- [16] M. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer Verlag, Heidelberg (1990).
- [17] A. Einsitein, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* **19**, 82 (1917).

- [18] I. C. Percival, J. Phys. B **6**, L229 (1973).
- [19] H. A. Bethe, Phys. Rev. **C**, 332 (1936).
- [20] A. P. Zuker, Phys. Rev. C **64** 021303 (2001).
- [21] H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton (1946).
- [22] R. U. Haq, A. Pandey & O. Bohigas, Phys. Rev. Lett. **48**, 1086 (1982).
- [23] W. E. Ormand, R. A. Broglia, Phys. Rev. C **46**, 1710 (1992).
- [24] M. Horoi, V. Zelevinsky & B. A. Brown, Phys. Rev. Lett **74**, 5194 (1995).
- [25] H. G. Schuster, *Deterministic chaos*, Weinheim VCH (1995).
- [26] W. Li, *A bibliography on 1/f noise*, <http://linkage.rockefeller.edu/wli/1fnoise>.
- [27] M. Krbalek & P. Seba, J. Phys A **33**, L229 (2000).
- [28] M. B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic Press, 1981.
- [29] B. B. Mandelbrot & J. W. Van Ness, SIAM Rev. **10**, 422 (1968).
- [30] B. B. Mandelbrot, *Multifractals and 1/f noise*, Springer, New York (1999).
- [31] O. Bohigas, P. Leboeuf & M. J. Sánchez, Physica D **131**, 186 (1999).
- [32] A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina J. Retamosa & E. Faleiro, enviado a Phys. Rev. Lett. para su publicación.
- [33] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York (1982).
- [34] B. B. Mandelbrot, *Fractals*, Encyclopedia of Physical Science and Technology, **5**, 579 (1987).
- [35] H. E. Hurst, R. P. Black & Y. M. Simaika, *Long-term storage: an experimental study*, Constable, London (1965).
- [36] M. Schroeder, *Fractal, chaos and power laws*. W. H. Freeman & Company, New York (1991).
- [37] A. Peres, Phys. Rev. A **30**, 1610 (1984).
- [38] R. A. Jalabert & H. M. Pastaswki, Phys. Rev. Lett. **86**, 2490 (2001).

-
- [39] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **413**, 183 (1987).
- [40] H. Meyer, J. C. Angles d'Auriac, J. M. Maillard, Phys. Rev. E **55**, 5380 (1997).
- [41] F. Haake, *Quantum signatures of chaos* Springer Verlag, Heidelberg, (2001).
- [42] R. A. Molina *Caos cuántico en sistemas hamiltonianos de muchos cuerpos*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, (2002).

