

Dispersión de electrones en ^3He

MEMORIA PRESENTADA PARA LA OBTENCIÓN DEL
DIPLOMA DE ESTUDIOS AVANZADOS.

Raquel Álvarez Rodríguez

DIRECTORES:

Dra. Elvira Moya Valgañón
Dr. Pedro Sarriguren Suquilbide
Dr. José Manuel Udías Moinelo

INSTITUTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA (CSIC)

Junio 2003

Índice General

Índice general	i
1 Introducción	1
1.1 Interacciones fundamentales	1
1.2 Dispersión de electrones por núcleos	3
1.3 Sección eficaz de dispersión	4
1.4 Objetivos y organización de este trabajo	5
2 Notación y convenios	7
2.1 Convenios	7
2.2 Coordenadas de Jacobi y relativas	8
2.3 Cambio de coordenadas	10
3 Electrodinámica del proceso ($e, e'p$)	13
3.1 Ecuación de Dirac para un electrón libre	13
3.2 Un electrón en un campo electromagnético A^μ	14
3.3 Dispersión de electrones	15
4 La función de onda del deuterón	19
4.1 Momentos electromagnéticos del deuterón	19
4.2 Funciones de onda radiales	21
5 La función de onda del ^3He	27
5.1 Ecuaciones de Faddeev	27
5.2 Desarrollo adiabático hiperesférico	28
6 Probabilidad de transición y corriente nuclear	33
6.1 Parte leptónica. El electrón como onda plana	33
6.2 Parte hadrónica	34
6.3 Forma de la corriente nuclear	37
6.4 Cálculo analítico de la función de cuasi-partícula	38
6.4.1 Función de cuasi-partícula	38

6.4.2	Desarrollo de la función de cuasi-partícula	39
6.4.3	Factor espectroscópico	42
6.5	Tensor hadrónico	43
7	Sección eficaz ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$	45
7.1	Cálculo de la sección eficaz ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$	45
7.2	Relaciones cinemáticas	48
7.3	Resultados	48
7.4	Resumen final y conclusiones	54
	 Apéndices	 55
A	Coeficientes de acoplo de momento angular	57
A.1	Coeficientes de Clebsch-Gordan y símbolos- $3j$	57
A.2	Coeficientes de Racah y símbolos- $6j$	58
A.3	Símbolos- $9j$	59
A.4	Teorema de Wigner-Eckart	60
B	Traslaciones	63
B.1	Caso general	63
B.2	Aplicación al proceso ${}^3\text{He}(e, e'p)d$	64
C	Parte hadrónica. Aproximación de impulso	67
	 Bibliografía	 69

Capítulo 1

Introducción

1.1 Interacciones fundamentales

A finales del siglo XIX sólo se conocían dos interacciones fundamentales, la *interacción gravitatoria* y la *interacción electromagnética*, ya que los fenómenos físicos observados hasta el momento se podían describir con ellas (tampoco se habían desarrollado entonces la teoría de la Relatividad ni la Mecánica Cuántica). Se pensaba, pues, que los constituyentes de toda la materia eran los átomos, pero la existencia de cerca de 100 elementos que mostraban propiedades de tipo periódico era un claro indicador de que los átomos poseían una estructura interna. En 1896 Becquerel descubrió la radiactividad, y dos años después Marie y Pierre Curie consiguieron separar un elemento con radiactividad natural, el radio. La radiactividad se convirtió entonces en uno de los problemas que la Física Clásica era incapaz de resolver. La emisión de partículas por átomos indicaba, de nuevo, que el átomo no era el constituyente último de la materia.

Rutherford propuso la existencia del núcleo atómico a principios del siglo XX, en 1911; unos años después Chadwick encontró que el tamaño del núcleo era unos 10^4 órdenes de magnitud menor que el tamaño atómico¹. Tras el descubrimiento del neutrón, en el año 1932, no había ninguna duda de que los constituyentes primarios de los núcleos eran los protones y los neutrones (llamados conjuntamente nucleones). Las únicas partículas cargadas dentro del núcleo son, pues, los protones, cuya carga es igual en magnitud a la del electrón pero de signo opuesto; ya que únicamente hay cargas positivas presentes, la fuerza coulombiana entre nucleones será repulsiva, lo que lleva a pensar que en el interior del núcleo existe otra fuente de fuerza que es atractiva y de magnitud superior a la coulombiana. Nos encontramos así con la *interacción fuerte*.

¹El orden de magnitud típico del tamaño del átomo es de 10^{-10} m, mientras que el del núcleo atómico es entre 10^{-15} y 10^{-14} m (entre 1 y 10 fm).

Interacción	Rango (m)	Intensidad
Fuerte	10^{-15}	1
Débil	10^{-18}	10^{-5}
Electromagnética	∞	$\alpha \sim 10^{-2}$
Gravitatoria	∞	10^{-38}

Tabla 1.1: Interacciones fundamentales.

Los neutrones son más masivos que los protones y, abandonados a sí mismos, decaen eventualmente en un protón y un electrón con una vida media de unos 15 minutos. Estas dos partículas son suficientes para la conservación de carga eléctrica, pero los experimentos indican que el momento y la energía no se podían conservar a menos que estuviese involucrada también otra partícula neutra, el neutrino. Esta idea la sugirió Pauli en 1931 (un año antes de que Chadwick descubriese el neutrón). Puesto que esta curiosa partícula no tiene carga, no siente las fuerzas eléctricas. Con estas piezas, en 1933 Fermi consiguió reconstruir el puzle. Aparece así la cuarta interacción fundamental conocida hasta el momento, la *interacción débil*, que se pone de manifiesto en la desintegración β nuclear (nuclear β -decay).

En la Naturaleza existen pues cuatro interacciones fundamentales: gravitatoria, electromagnética, fuerte y débil, cuyas intensidades difieren enormemente dependiendo de las energías presentes. Por otra parte, cuanto más intensa sea una interacción, mayor será la probabilidad de que ésta tenga lugar, es decir, menor será la vida media de la partícula cuya vía de desintegración principal sea dicha interacción. Esto se resume en la tabla 1.1². Las dos primeras interacciones se formulan de forma unificada en la *interacción electrodébil*, asimismo la interacción fuerte se ha unificado mediante la teoría de la *cromodinámica cuántica*. La unificación de la interacción gravitatoria está todavía sin resolver.

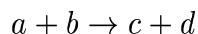
Este trabajo se centra en el estudio de un proceso mediado por la interacción electromagnética, que es, sin duda, la interacción que mejor conocemos, ya que se pone de manifiesto en casi todos los fenómenos físicos a casi cualquier escala. Más aún, estudiamos el fenómeno de dispersión de electrones por núcleos, cuya interacción es puramente electromagnética mediante el intercambio de un fotón (bosón mediador de la interacción electromagnética), como medio para investigar la estructura de los núcleos, ligados por la interacción fuerte.

²Como intensidades relativas figuran aquí las constantes de acoplo de cada interacción.

1.2 Dispersión de electrones por núcleos

Los experimentos de dispersión son una de las armas más potentes de la Física para estudiar sistemas a escalas pequeñas. Al igual que un niño que quiere averiguar lo que hay al otro lado de un muro lanza piedras por encima de él, en estos experimentos un haz de partículas, de energía y momento conocidos, se lanzan contra el objeto de estudio (blanco). Las partículas interactúan así con el objeto en cuestión. A partir de los cambios en las cantidades cinemáticas durante el proceso, conseguimos averiguar cosas tanto del blanco como de la interacción en juego. El estudio de secciones eficaces de dispersión es, pues, uno de los procedimientos que más información nos proporciona acerca de la estructura nuclear. La información extraída de este proceso depende en gran medida de la energía de las partículas incidentes y del momento transferido al blanco. A medida que se aumenta la energía del haz de partículas incidente, mayor será el momento transferido al blanco, y, por tanto, la longitud de onda de De Broglie asociada será menor; así las partículas actuarán como sonda para estudiar la estructura del núcleo a escalas cada vez más bajas, llegando incluso a estudiar la estructura subnucleónica.

En un experimento típico de dispersión, se bombardea el blanco con un haz de partículas de energía bien definida. Ocasionalmente tiene lugar una reacción de la forma



entre el blanco y el proyectil. Aquí a y b denotan las partículas incidente y blanco, y c y d los productos de la reacción.

Es posible además producir haces de una gran variedad de partículas (electrones, protones, neutrones, iones pesados...). Los rangos de energías de que disponemos varían entre unos 10^{-3} eV para neutrones fríos, hasta unos 10^{12} eV para protones. Todo depende de lo que queramos estudiar. Asimismo, como blanco podemos utilizar sólidos, líquidos, gases o incluso otro haz de partículas.

La partícula elegida para sondear al núcleo en este caso será el electrón. Una de las razones es que experimentalmente es fácil conseguir un haz de electrones. Al margen de consideraciones experimentales, el estudio teórico de este proceso es más riguroso que el de otros, ya que la interacción entre el electrón y el núcleo es esencialmente electromagnética, y ésta está perfectamente descrita a través de la electrodinámica cuántica. Por otro lado, la constante de acoplo que caracteriza a la interacción electromagnética es lo suficientemente pequeña como para permitir un tratamiento perturbativo de la misma. Nos limitaremos así a estudiar la interacción electrón-núcleo mediante el intercambio de un único fotón virtual (proceso a orden más bajo)³. Esto a su vez ofrece una nueva ventaja, ya que al tratarse de un fotón

³Esta aproximación se conoce como Aproximación de Born, y no es válida en el caso de un proyectil hadrónico.

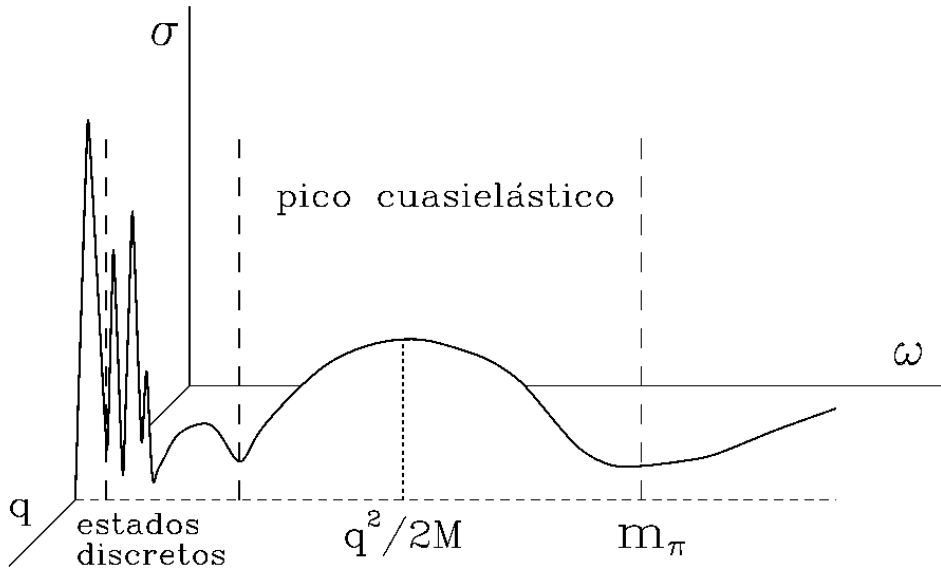


Figura 1.1: Sección eficaz diferencial de dispersión de electrones por un núcleo frente a la energía transferido, ω , para un valor fijo del momento transferido, q .

virtual, la energía y el momento transferido no están ligados mediante la relación $\omega^2 - \vec{q}^2 = 0$, pudiendo variarse la energía (ω) y el momento transferido al núcleo (\vec{q}) de forma independiente.

En el estudio de la dispersión de partículas, el caso más simple que podemos considerar es el de partícula incidente puntual, blanco puntual y potencial electrostático. La sección eficaz que rige este proceso es la conocida sección eficaz de Rutherford. Pero, a las energías que consideramos aquí, los electrones son partículas relativistas con spin $\frac{1}{2}$; si tenemos en cuenta esta corrección en la sección eficaz de Rutherford, obtenemos la sección eficaz de Mott. El último paso que consideraremos (que es el objetivo principal del estudio realizado en este trabajo) es considerar que el blanco no es una partícula puntual, así pues la sección eficaz de Mott se verá afectada por una nueva corrección, a la que llamaremos factor de forma, que nos da idea de la estructura interna del blanco.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^- - \text{nucleo}) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} |F(q)|^2 \quad (1.1)$$

1.3 Sección eficaz de dispersión

En la figura 1.1 se muestra un esquema de la sección eficaz doblemente diferencial de dispersión de electrones para un determinado valor del momento transferido.

Veamos lo que representan cada una de las regiones que en ella se aprecian.

- I. Dispersión elástica a estados discretos: tenemos el mismo tipo de partículas antes y después del proceso de dispersión. El blanco permanece en el estado fundamental, absorbiendo únicamente el momento de retroceso y cambiando así su energía cinética. Un estudio de esta zona en función del momento transferido nos proporciona información acerca de la distribución de carga en el estado fundamental del núcleo blanco.
- II. Dispersión inelástica a estados discretos: parte de la energía transmitida al blanco hace que éste pase a un estado excitado de energía superior (parte de la energía transferida se transforma en energía interna).
- III. Dispersión cuasielástica: Este pico ancho corresponde a las colisiones directas con los nucleones individuales en el núcleo. Si estos nucleones no estuvieran ligados sino en reposo, uno esperaría ver un pico a una energía perdida correspondiente a $\omega = \frac{q^2}{2M}$, pero ya que en realidad los nucleones están en movimiento, el efecto de la ligadura nuclear se traduce en un desplazamiento y ensanchamiento del pico. La energía transferida al núcleo, en este caso, es capaz de arrancar un nucleón del mismo, como si éste absorbiera toda la energía y momento transferidos. Los procesos en que se detecta este nucleón, además del electrón dispersado, se denominan *procesos exclusivos*, o $(e, e'N)$.
- IV. Producción de piones: en esta región estamos por encima del umbral de producción de piones, así que los efectos mesónicos jugarán un papel importante.

Una reacción en la que únicamente se observa la partícula dispersada (ya sea en I, en II, en III o en IV) se llama *proceso inclusivo* o (e, e') .

1.4 Objetivos y organización de este trabajo

Recientemente, el estudio de sistemas nucleares de tres cuerpos ha suscitado un gran interés ya que los últimos cálculos realizados para estos sistemas, a partir de potenciales nucleón-nucleón, permiten una descripción muy precisa de los mismos, tanto para el estado fundamental del núcleo, como para estados del continuo. Al estar tratando de estudiar un sistema de pocos cuerpos, la aproximación de campo medio no es muy satisfactoria y debemos abordar el problema desde otro punto de vista. En este trabajo hemos adaptado un formalismo relativista para procesos $(e, e'p)$ al caso del ${}^3\text{He}$, en el cual utilizaremos funciones de onda obtenidas a partir de potenciales nucleón-nucleón.

Tras un capítulo en el que se explican la notación y los convenios a seguir durante el resto del trabajo, comenzamos por estudiar el proceso electromagnético $(e, e'p)$ en

un caso general. Se desarrollan a continuación las funciones de onda que utilizamos tanto para el deuterón (núcleo residual en el estado final) como para el ^3He (núcleo blanco) así como las interacciones consideradas para llegar a ellas. Una vez conocidos todos los ingredientes procedemos a calcular la probabilidad de transición y la corriente nuclear del proceso, que incorporamos finalmente a la expresión total para la sección eficaz, principal objetivo de este trabajo. Por último se muestra el resultado de nuestro cálculo junto con los datos experimentales disponibles.

Capítulo 2

Notación y convenios

2.1 Convenios

A lo largo de este trabajo se considera:

- Unidades naturales: $\hbar = c = 1$
- Cuadrivectores: $A^\mu \equiv (A^0, \vec{A})$
- Métrica: $A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$
- Notación *slash* de Schwinger: $\not{k} = k^\alpha \gamma_\alpha = k_\alpha \gamma^\alpha$
- Convenio de suma: Se omitirá el sumatorio cuando haya subíndices repetidos
 $a_i b_i \equiv \sum_i a_i b_i$
- Traza de matrices: $Tr(ABCD) = A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C_{\gamma\delta} D_{\delta\alpha}$
- Armónicos esféricos:

$$\int Y_{l'm'}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega) d\Omega = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (2.1)$$

$$Y_{lm}(-\Omega) = (-1)^l Y_{lm}(\Omega) \quad (2.2)$$

$$Y_{lm}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{l,-m}(\Omega) \quad (2.3)$$

- Función gamma:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2.4)$$

Valores especiales:

$$\Gamma(1) = 1 \quad (2.5)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.6)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.7)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (2.8)$$

- Delta de Dirac:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)} \quad (2.9)$$

- Polinomios de Jacobi: fórmula de Rodrigues [1]:

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{e_n w(t)} \frac{d^n}{dt^n} [w(t) (g(t))^n] \quad (2.10)$$

siendo:

$$\begin{aligned} e_n &= (-1)^n 2^n n! \\ w(t) &= (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \\ g(t) &= 1-t^2 \end{aligned}$$

con $t \in [-1, 1]$, $\alpha > -1$ y $\beta > -1$.

2.2 Coordenadas de Jacobi y relativas

Consideramos un sistema de tres partículas de masas m_i y coordenadas \vec{r}_i ($i = 1, 2, 3$). Las coordenadas de Jacobi se definen del siguiente modo (ver figura 2.1):

$$\begin{aligned} \vec{x}_k &= a_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ \vec{y}_k &= a_{ij,k} \left(\frac{m_i \vec{r}_i + m_j \vec{r}_j}{m_i + m_j} - \vec{r}_k \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

con:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left(\frac{1}{m} \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right)^{\frac{1}{2}} \\ a_{ij,k} &= \left(\frac{1}{m} \frac{(m_i + m_j) m_k}{m_i + m_j + m_k} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

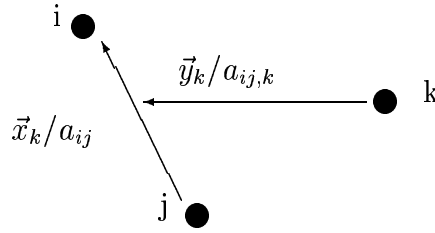


Figura 2.1: Definición de las coordenadas de Jacobi.

donde i,j,k es una permutación cíclica de $1,2,3$, y m es una masa arbitraria de normalización.

En el caso que nos ocupa, consideraremos que la partícula que se separa del núcleo en el proceso $(e,e'p)$ es la número 3, y las partículas 1 y 2 son las que formarán el núcleo residual. Así las coordenadas de Jacobi que utilizamos son las siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{x}_J &= \sqrt{\frac{\mu_{12}}{m}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{y}_J &= \sqrt{\frac{\mu_{12,3}}{m}} \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} - \vec{r}_3 \right)\end{aligned}\quad (2.13)$$

siendo μ_{12} la masa reducida entre el protón y el neutrón y $\mu_{12,3}$ entre el otro protón y el deuterón. El valor de m que tomaremos es de 939 MeV.

Asimismo podemos definir las coordenadas relativas, que son iguales a las de Jacobi omitiendo los factores multiplicativos:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{y} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} - \vec{r}_3\end{aligned}\quad (2.14)$$

También utilizamos las variables hiperesféricas, que se definen a partir de las coordenadas de Jacobi del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x_J^2 + y_J^2} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{x_J}{y_J}\right)\end{aligned}\quad (2.15)$$

2.3 Cambio de coordenadas

Inicialmente tenemos las coordenadas $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ para tratar nuestro problema de tres cuerpos; pero las funciones de onda que conocemos (^3He y deuterón) están expresadas en función de las coordenadas intrínsecas de cada uno de estos sistemas. Del mismo modo sabemos cómo es el movimiento del centro de masas de cada núcleo, así que parece conveniente hacer un cambio al sistema de coordenadas $\{\vec{R}_I, \vec{x}, \vec{y}\}$ o al $\{\vec{R}_I, \vec{x}_J, \vec{y}_J\}$, siendo \vec{R}_I la coordenada del centro de masas del sistema de tres partículas:

$$\begin{aligned}\vec{R}_I &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \vec{x}_J &= \sqrt{\frac{\mu_{12}}{m}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{y}_J &= \sqrt{\frac{\mu_{12,3}}{m}}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} - \vec{r}_3\right)\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\vec{R}_I &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \vec{x} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{y} &= \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} - \vec{r}_3\right)\end{aligned}\quad (2.17)$$

La transformación inversa nos da:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_I + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m}{\mu_{12}}}\vec{x}_J + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\sqrt{\frac{m}{\mu_{12,3}}}\vec{y}_J \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_I - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m}{\mu_{12}}}\vec{x}_J + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\sqrt{\frac{m}{\mu_{12,3}}}\vec{y}_J \\ \vec{r}_3 &= \vec{R}_I - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\sqrt{\frac{m}{\mu_{12,3}}}\vec{y}_J\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_I + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{x} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{y} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_I - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{x} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{y} \\ \vec{r}_3 &= \vec{R}_I - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{y}\end{aligned}\quad (2.19)$$

con:

$$\begin{aligned}\mu_{12} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ \mu_{12,3} &= \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\end{aligned}\quad (2.20)$$

A partir de (2.16) y (2.17) es muy fácil calcular el jacobiano del cambio de coordenadas, necesario a la hora de integrar:

$$d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{r}_3 = \left(\frac{m}{\mu_{12}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{\mu_{12,3}}\right)^{\frac{3}{2}} d^3\vec{R}_I d^3\vec{x}_J d^3\vec{y}_J \quad (2.21)$$

y en el caso de coordenadas relativas:

$$d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{r}_3 = d^3\vec{R}_I d^3\vec{x} d^3\vec{y} \quad (2.22)$$

También es útil expresar la coordenada del centro de masas del deuterón en función de las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} \vec{R}_F &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 \\ \vec{R}_F &= \vec{R}_I + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \sqrt{\frac{m}{\mu_{12,3}}} \vec{y}_J \\ \vec{R}_F &= \vec{R}_I + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{y} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Capítulo 3

Electrodinámica del proceso $(e, e'p)$

3.1 Ecuación de Dirac para un electrón libre

La ecuación de Dirac es la extensión relativista de la ecuación de Schrödinger adecuada para el estudio de partículas de spin $\frac{1}{2}$. Es una ecuación diferencial de primer orden con respecto a las derivadas espacial y temporal, y en la ausencia de un campo externo se puede escribir:

$$H\psi(\vec{r}, t) = i\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3.1)$$

donde:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \quad (3.2)$$

en función del operador momento, $\vec{p} = (1/i)\nabla$, y la masa de la partícula, m . La función de ondas ψ tiene cuatro componentes en un espacio de vectores columna llamados *spinors*, y las matrices hermíticas $\vec{\alpha}$ y β actúan en el espacio de los spinors:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad y $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli 2×2 :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

También es posible reescribir la ecuación de Dirac del siguiente modo sin más que multiplicar la ecuación (3.1) por la izquierda por β :

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (3.5)$$

donde:

$$\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} \quad \gamma_0 = \beta \quad (3.6)$$

La solución de la ecuación de Dirac (3.1) ó (3.5) para una partícula libre es la siguiente:

$$\psi(x) = u(\vec{p})e^{-ip \cdot x} \quad (3.7)$$

donde $u(\vec{p})$ satisface la ecuación espinorial:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m - E]u(\vec{p}) = 0 \quad (3.8)$$

o equivalentemente:

$$[\gamma_\mu p^\mu - m]u(\vec{p}) = 0 \quad (3.9)$$

con \vec{p} el momento de la partícula libre y E la energía de la misma se tiene:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (3.10)$$

3.2 Un electrón en un campo electromagnético A^μ

Hemos visto que un electrón libre de 4-momento p^μ se describe mediante una función de ondas de cuatro componentes:

$$\psi = u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (3.11)$$

que satisface la ecuación de Dirac, (3.1) y (3.9).

La ecuación para un electrón en un campo electromagnético A^μ se obtiene sustituyendo:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu \quad (3.12)$$

donde hemos considerado que la carga del electrón es $-e$. Para un potencial electrostático $A^\mu = (V, \vec{0})$. Obtenemos:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = \gamma_0 V \psi \quad (3.13)$$

donde la perturbación viene dada por:

$$\gamma_0 V = -e\gamma_\mu A^\mu \quad (3.14)$$

Mediante el uso de teoría de perturbaciones [13], obtenemos la amplitud para la dispersión de un electrón del estado ψ_i al estado ψ_f :

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i(x) d^4x \\ &= ie \int \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (3.15)$$

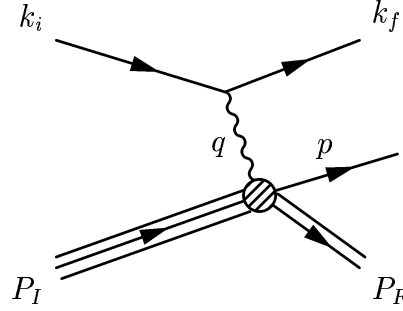


Figura 3.1: Diagrama de intercambio de un fotón para dispersión de electrones por un núcleo.

siendo:

$$j_\mu^{fi} \equiv -e\bar{\psi}_f\gamma_\mu\psi_i = -e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i e^{i(k_f-k_i)\cdot x} \quad (3.16)$$

Comparando este resultado con la conocida densidad de corriente electrónica¹, vemos que j_μ^{fi} se puede considerar como la corriente de transición electromagnética entre los estados electrónicos i y f .

Un electrón interacciona con el campo A^μ vía su carga y su momento magnético. Se obtiene así la descomposición de Gordon de la corriente:

$$\bar{u}_f\gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m}\bar{u}_f((k_f+k_i)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(k_f-k_i)_\nu)u_i \quad (3.17)$$

3.3 Dispersión de electrones

Hasta ahora se ha considerado dispersión de un electrón por un potencial, y a partir de ahí es fácil calcular la dispersión de ese mismo electrón sobre otra partícula cargada, como puede ser otro electrón, un muón o un núcleo (que es el caso que nos ocupa, ver figura 3.1).

El cálculo es una extensión del realizado en la sección anterior; lo que se hace a continuación es identificar el potencial electromagnético A^μ creado por el núcleo en cuestión. Para ello utilizaremos las ecuaciones de Maxwell:

$$\square A^\mu = eJ^\mu \quad (3.18)$$

y así se determina el campo electromagnético A^μ asociado a la corriente J^μ del núcleo². La solución de esta ecuación es:

$$A^\mu = -\frac{e}{q^2}J^\mu \quad (3.19)$$

¹ $j_\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$

²De momento vamos a considerar un núcleo sin spin.

con $q = P_f - P_i$ (diferencia de momentos en la parte hadrónica).

Así encontramos la amplitud de dispersión del proceso (a orden más bajo):

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int j_\mu(x) \left(-\frac{e}{q^2} \right) J^\mu(x) d^4x \\ &= \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(\vec{k}_f) \gamma_\mu u(\vec{k}_i) \int J^\mu(x) e^{-i q \cdot x} d^4x \end{aligned} \quad (3.20)$$

La corriente del blanco, J^μ , es el elemento de matriz del operador densidad de 4-corriente $\hat{J}^\mu(x)$ entre los estados inicial ($|\Psi_I\rangle$) y final ($|\Psi_F\rangle$) del blanco:

$$J^\mu(x) = \langle \Psi_F | \hat{J}^\mu(x) | \Psi_I \rangle \quad (3.21)$$

Si suponemos que los estados nucleares inicial y final tienen estados de energía bien definidos, podemos separar la componente temporal de la corriente del siguiente modo:

$$J^\mu(x) = e^{-i(E_I - E_f)x^0} \langle \Psi_F | \hat{J}^\mu(\vec{x}) | \Psi_I \rangle \quad (3.22)$$

e integrar en la coordenada x^0 , así:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \frac{ie^2}{q^2} 2\pi \delta(E_f - E_I - \omega) \bar{u}(\vec{k}_f) \gamma_\mu u(\vec{k}_i) \int J^\mu(\vec{x}) e^{i \vec{q} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} \\ &= \frac{ie^2}{q^2} 2\pi \delta(E_f - E_I - \omega) \bar{u}(\vec{k}_f) \gamma_\mu u(\vec{k}_i) \underbrace{\int \langle \Psi_F | \hat{J}^\mu(\vec{x}) | \Psi_I \rangle e^{i \vec{q} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x}}_{J^\mu(\vec{q})} \end{aligned} \quad (3.23)$$

La probabilidad de transición para una reacción de este tipo se define del siguiente modo:

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} \quad (3.24)$$

donde T es el intervalo temporal de interacción.

Para elevar al cuadrado T_{fi} tenemos que tener cuidado con la delta de Dirac. Sabemos que se puede considerar [2]:

$$[2\pi \delta(E_f - E_I - \omega)]^2 = T 2\pi \delta(E_f - E_I - \omega) \quad (3.25)$$

Así, nos queda:

$$W_{fi} = \frac{e^4}{q^4 V} |\bar{u}(\vec{k}_f) \gamma_\mu u(\vec{k}_i) J^\mu(\vec{q})|^2 2\pi \delta(E_f + E_p - E_I - \omega) \quad (3.26)$$

donde hemos tenido en cuenta que, en el caso que nos ocupa, la energía final, E_f , es la suma de la energía del núcleo residual, E_F , y la energía del protón, E_p .

Los resultados experimentales de dispersión se suelen expresar mediante una *sección eficaz*. Ésta se relaciona con la probabilidad de transición del siguiente modo:

$$\text{sección eficaz} = \frac{W_{fi}}{(\text{flujo inicial})} (\text{densidad de estados finales}) \quad (3.27)$$

donde los factores entre paréntesis se refieren a las densidades de partículas entrantes y salientes.

Para una única partícula, la teoría cuántica restringe el número de estados finales en un volumen V con momento en el elemento d^3p a $V d^3p/(2\pi)^3$. Pero tenemos $2E$ partículas en V , así que:

$$\text{numero de estados finales/partícula} = \frac{V d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \quad (3.28)$$

En general, para emisión de varios tipos de partículas:

$$\text{numero de estados finales/partícula} = \prod_{j=1}^N \frac{V d^3\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j} \quad (3.29)$$

Respecto al flujo inicial de partículas, es fácil calcularlo en el sistema de laboratorio. El número de partículas del haz que pasan por unidad de área y unidad de tiempo es $|\vec{v}_{\text{haz}}| 2E_{\text{haz}}/V$, y el número de partículas del blanco por unidad de volumen es $2E_{\text{blanco}}/V$. Para obtener una medida independiente de la normalización de la densidad incidente, tomamos [13]:

$$\text{flujo inicial} = |\vec{v}_{\text{haz}}| \frac{2E_{\text{haz}}}{V} \frac{2E_{\text{blanco}}}{V} \approx \frac{4k_i \cdot P_I}{V^2} \quad (3.30)$$

considerando aproximación ultrarrelativista para los electrones.

Hasta ahora no hemos tenido en cuenta el spin. Para tener en cuenta la dispersión en todas las posibles configuraciones de spin, hay que sumar en todos los posibles spines finales y promediar en iniciales, así, se sustituye:

$$|T_{fi}|^2 \rightarrow \overline{\sum_i \sum_f} |T_{fi}|^2 \quad (3.31)$$

Sustituyendo esto en (3.27), obtenemos la expresión para la sección eficaz diferencial del proceso:

$$d\sigma = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{4k_i \cdot P_I} \overline{\sum_i \sum_f} |\bar{u}(\vec{k}_f) \gamma_\mu u(\vec{k}_i) J^\mu(\vec{q})|^2 2\pi \delta(E_F + E_p - E_I - \omega) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3\vec{k}_f}{(2\pi)^3 2\varepsilon_f} \frac{d^3\vec{P}_F}{(2\pi)^3 2E_F} \quad (3.32)$$

Por simplicidad, a partir de ahora consideraremos $V = 1$, ya que al final la expresión de la sección eficaz no depende del valor de V y esto agilizará la notación.

En los siguientes capítulos trataremos de particularizar la expresión de la sección eficaz para el proceso que estamos estudiando, ${}^3\text{He}(e, e'p)d$.

Capítulo 4

La función de onda del deuterón

4.1 Momentos electromagnéticos del deuterón

En este capítulo estudiaremos el *deuterón*, que es el único sistema ligado formado por dos nucleones, un protón y un neutrón. Se ha observado que el deuterón tiene un momento cuadrupolar eléctrico $Q = 0.2860 \pm 0.0015 \text{ fm}^2$, y un momento magnético $\mu_d = 0.857406 \pm 0.000001$ en unidades de magnetones nucleares¹. Su momento angular total es $J = 1$. Se sabe, asimismo, que tanto la energía de enlace, 2.22 MeV, como el momento angular son consistentes con la suposición de que el deuterón está en un estado- 3S_1 , en notación ${}^{2S+1}L_J$. Por otro lado, un sistema en un estado- S no puede tener momento cuadrupolar, ya que su función de onda no tiene dependencia angular y la distribución de densidad es, por lo tanto, isótropa. Para un sistema formado por dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ y cuyo momento angular total es 1, los únicos estados posibles angulares son 1P_1 , 3S_1 , 3P_1 y 3D_1 . Si tenemos un sistema de fuerzas centrales, la magnitud del momento angular orbital es una constante del movimiento, pero si no consideramos fuerzas centrales es posible tener una combinación de estados con diferentes valores de L pero el mismo J . Si la paridad es un buen número cuántico, podemos combinar únicamente estados de la misma paridad. Así, junto con los estados de \vec{L}^2 definido, podemos considerar las posibles funciones de onda para el deuterón:

$$\Psi(SD) = \cos \omega \Psi({}^3S)^1(\tau)_0 + \sin \omega \Psi({}^3D)^1(\tau)_0 \quad (4.1)$$

$$\Psi(PP) = \cos \omega \Psi({}^1P)^1(\tau)_0 + \sin \omega \Psi({}^3P)^3(\tau)_0 \quad (4.2)$$

La magnitud de la mezcla de los estados individuales viene dada por el parámetro ω , que se introduce en forma de función trigonométrica para que las funciones $\Psi(SD)$ y $\Psi(PP)$ estén normalizadas a la unidad. Ambas funciones de onda describen

¹ $1\mu_N = 5.051 \times 10^{-27} \text{ J.T}^{-1} = 3.152 \times 10^{-12} \text{ eV.G}^{-1}$.

estados en los cuales la medida de J nos daría un valor de 1, pero en el estado descrito por la ecuación (4.1) una medida de L nos daría en unas ocasiones el valor 0 y en otras 2, siendo sus probabilidades respectivas $\cos^2 \omega$ y $\sin^2 \omega$. De un modo análogo, en el estado representado por (4.2), una medida de S daría lugar a 0 ó 1 con probabilidades respectivas $\cos^2 \omega$ y $\sin^2 \omega$. La elección entre las diversas alternativas para un estado puramente 3S viene determinada por el valor del momento magnético.

Para calcular el momento magnético del deuterón, hacemos uso de la fórmula de Sachs [20]:

$$[\langle M_z \rangle_{T_3} + \langle M_z \rangle_{-T_3}] = \left(\frac{1}{2} + \mu_s \right) J + \frac{1}{J+1} \left(\mu_s - \frac{1}{2} \right) \langle \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \rangle \quad (4.3)$$

donde $\mu_s = (\mu_p + \mu_n)$ es la parte isoscalar del momento magnético del nucleón. Sabiendo que para el deuterón $T_3 = 0$ y $J = 1$, obtenemos de inmediato su operador momento magnético:

$$\mu_d = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + \mu_s \right) + \frac{1}{2} \left(\mu_s - \frac{1}{2} \right) (\vec{S}^2 - \vec{L}^2) \right] \quad (4.4)$$

Cuando μ_d actúa en un estado de S y L fijos, los operadores \vec{S}^2 y \vec{L}^2 se substituyen por sus valores propios, $S(S+1)$ y $L(L+1)$.

Para los diversos posibles estados, los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned} {}^1P_1 : & \quad \mu_d = \frac{1}{2} \\ {}^3S_1 : & \quad \mu_d = \mu_s = 0.879 \\ {}^3P_1 : & \quad \mu_d = \frac{1}{2} \left(\mu_s + \frac{1}{2} \right) = 0.689 \\ {}^3D_1 : & \quad \mu_d = \frac{1}{2} \left(-\mu_s + \frac{3}{2} \right) = 0.310 \\ {}^3S + {}^3D : & \quad \mu_d = 0.879 - 0.569 \sin^2 \omega \\ {}^1P + {}^3P : & \quad \mu_d = 0.500 + 0.189 \sin^2 \omega + 3.327 \sin 2\omega \int {}^1f {}^3f dr \end{aligned}$$

En la última de estas expresiones ${}^1f(r)/r$ y ${}^3f(r)/r$ son las funciones de onda radiales en los estados- 1P_1 y 3P_1 , respectivamente.

Únicamente los dos últimos estados son capaces de llevarnos al valor experimental de 0.857, y el estado- P se descarta por consideraciones de paridad, ya que se sabe que el deuterón tiene paridad positiva [31]. Si ignoramos correcciones del tipo de fuerzas muy fuertes dependientes de la velocidad o momentos magnéticos de intercambio mesónico, el momento magnético del deuterón es:

$$\mu_d = 0.879 - 0.569 \sin^2 \omega \quad (4.5)$$

y el valor de $\sin^2 \omega$ tiene que ser 0.04, lo cual implica que es necesaria una contribución del 4% de estado- D para obtener el valor experimental 0.857 en magnetones nucleares. Un aumento de contribución de la onda- D disminuiría el valor del momento magnético. En la realidad esta contribución llega a ser del 6 – 7% por otro tipo de contribuciones que se conocen a partir de datos experimentales (ver ref.[20]).

El cálculo del momento cuadrupolar del deuterón es sencillo. La función de onda (4.1) se puede escribir:

$$\Psi_d(SD) = \frac{1}{r} [\cos \omega f_S(r) \mathcal{Y}_{1,10}^1 + \sin \omega f_D(r) \mathcal{Y}_{1,12}^1] \quad (4.6)$$

donde $\mathcal{Y}_{J,SL}^M$ es una función de momento angular, y $f_S(r)$ y $f_D(r)$ son las partes radiales de las funciones de onda, normalizadas según:

$$\int_0^\infty f^2(r) dr = 1 \quad (4.7)$$

En estas expresiones, r es la distancia entre el protón y el neutrón. Sabemos que el momento cuadrupolar se calcula a través de la expresión [20]:

$$Q = \left(\frac{16\pi}{5} \right)^{1/2} \int |\Psi_d(SD)|^2 \left(\frac{r}{2} \right)^2 Y_2^0 dV \quad (4.8)$$

que da lugar a:

$$Q = \frac{1}{10} \left[\sqrt{2} \cos \omega \sin \omega \int f_S(r) f_D(r) r^2 dr - \frac{1}{2} \sin^2 \omega \int f_D^2(r) r^2 dr \right] \quad (4.9)$$

Para $\sin^2 \omega \sim 0.04$, el primer término de la ecuación (4.9) es el más importante.

4.2 Funciones de onda radiales

Parece lógico pensar que los valores de Q nos permitirían una mejor estimación del porcentaje de onda- D en la función de onda. No obstante, ese cálculo requiere el conocimiento de las funciones de onda radiales, que se pueden determinar únicamente si se conocen en detalle las fuerzas entre nucleones. Si se propone una fuerza específica, es posible calcular tanto Q como ω ; el valor experimental del primero proporciona una información bastante precisa que la interacción sugerida debe ajustar, pero el último se ajusta sólo toscamente por medio del momento magnético.

Si se consideran como fuerzas nucleónicas fuerzas esencialmente centrales, no se pueden mezclar momentos angulares orbitales, por ello es necesario utilizar fuerzas no centrales. Podemos generalizar las mismas considerando fuerzas dependientes de

la velocidad o tomando una fuerza que dependa de los ángulos formados por los spines y la unión de ambos nucleones. Un posible potencial no central que se puede formar con estos tres vectores, $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$ y $\vec{r} = r\vec{u}_r$, es:

$$V_T = V_T(r)(3\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{u}_r \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{u}_r - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) = V_T(r)S_{12} \quad (4.10)$$

El subíndice T se utiliza porque este potencial se suele denominar interacción *tensorial*; en realidad es un producto escalar de dos tensores de rango dos. Se puede demostrar que este potencial, independiente de la velocidad para dos nucleones, conserva la energía, el momento, el momento angular total, la paridad, y la carga. Dado que \vec{L}^2 no conmuta con S_{12} , el hecho de añadir un potencial de esta forma al hamiltoniano implica que \vec{L}^2 no es una constante del movimiento y que los estados son mezcla de estados con diferentes valores de L , por ejemplo, una mezcla de estados- S y $-D$. Por lo tanto, la fuerza tensorial es capaz de explicar el momento cuadrupolar del deuterón. Por otro lado, $S^2 = (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)^2$ conmuta con V_T , y S_{12} aplicado sobre una función de onda singlete da cero, con el resultado de que la fuerza tensorial no acopla juntos ni un estado singlete y un triplete, ni dos estados singlete diferentes. Observamos asimismo que conserva la paridad, así que sólo acopla juntos estados con la misma paridad (ambos con L par o ambos con L impar).

El efecto en el momento cuadrupolar del deuterón se puede entender de forma cualitativa tratando los spines de un modo clásico. En el estado triplete son paralelos, y si cada uno forma un ángulo θ con \vec{r} , tenemos:

$$V_T = V_T(r)(3 \cos^2 \theta - 1) \quad (4.11)$$

La fuerza correspondiente, $-\vec{\nabla}V$, tiene una componente en la dirección en la que θ crece igual a $(6/r)V_T(r) \cos \theta \sin \theta$. Si $V_T(r)$ es negativo, esta fuerza moverá al vector \vec{r} hacia ángulos cercanos al eje- z , o sea, el movimiento tenderá a concentrarse en torno a $\theta = 0$ y π . Por lo tanto, si las otras fuerzas tendieran a producir un estado- S , la adición de una pequeña fuerza tensorial modificaría la densidad de modo que en lugar de ser isótropo sería puntiagudo a lo largo del eje ($Q > 0$). Sin embargo, si el sistema estuviera en un estado- D puro bajo fuerzas centrales, la densidad (proporcional a $\sin^4 \theta$) sería mayor en la región perpendicular al eje ($Q < 0$). El hecho de añadir la fuerza tensorial con $V_T < 0$ reduciría la magnitud de este momento cuadrupolar negativo. Se puede ver que estos efectos se corresponden con los valores de Q que predice la ecuación (4.9) para un estado mezcla S y D , con la condición de que $\cos \omega \sin \omega > 0$. En otras palabras, una fuerza tensorial con $V_T > 0$ da lugar a un estado en el cual las funciones de onda de la onda- S y la onda- D están mezcladas con coeficientes del mismo signo, y es posible, mediante el ajuste de parámetros en $V_T(r)$, obtener valores de Q y ω que sean consistentes con los valores experimentales.

El cálculo cuantitativo requiere la resolución de la ecuación de ondas:

$$-\nabla^2\Psi + (V_{te}(r) + V_T(r)S_{12})\Psi = -\gamma^2\Psi \quad (4.12)$$

donde $(1/M)V_{te}$ es el potencial central en estados pares triplete, $(1/M)V_T$ es el potencial tensorial, y $(1/M)\gamma^2$ es la energía de enlace del deuterón. La ecuación (4.12) se simplifica escribiendo Ψ de la forma de (4.6), multiplicando por la izquierda por $\mathcal{Y}_{1,10}^1$ e $\mathcal{Y}_{1,12}^1$, y usando sus propiedades de ortogonalidad, junto con los elementos de matriz de S_{12} [20]:

$$\langle \mathcal{Y}_{1,10}^1 | S_{12} | \mathcal{Y}_{1,10}^1 \rangle = 0; \quad \langle \mathcal{Y}_{1,12}^1 | S_{12} | \mathcal{Y}_{1,12}^1 \rangle = -2; \quad \langle \mathcal{Y}_{1,12}^1 | S_{12} | \mathcal{Y}_{1,10}^1 \rangle = \sqrt{8} \quad (4.13)$$

los resultados son:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_S}{dr^2} - (\gamma^2 + V_{te})f_S &= \sqrt{8} V_T \tan \omega f_D \\ \frac{d^2 f_D}{dr^2} - \left(\gamma^2 + V_{te} + \frac{6}{r^2} - 2V_T \right) f_D &= \sqrt{8} V_T \cot \omega f_S \end{aligned} \quad (4.14)$$

Estas ecuaciones de ondas radiales están “acopladas”; muestran que, si existe una fuerza tensorial, el sistema no puede tener un valor de L fijado, ya que valores no nulos de $\cos \omega f_S$ implican valores no nulos en $\sin \omega f_D$ y viceversa. Para distancias mayores que el rango de las fuerzas nucleares, las ecuaciones están desacopladas, y las funciones de onda para un estado ligado se pueden escribir explícitamente como:

$$\begin{aligned} f_S &= N_S e^{-\gamma r} \\ f_D &= N_D e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{\gamma^2 r^2} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

para valores de r tales que V_T y $V_{te} \ll \gamma^2$. Las cantidades N_S y N_D son constantes de normalización. Además de esto, f_S y f_D deben tender a cero en el origen o, si postulamos un *core* impenetrable, en el radio del core. Para un conjunto dado de potenciales V_{te} y V_T , estas condiciones constituyen un problema de valores propios para la energía de enlace (γ^2) y la proporción de estado- D ($\sin^2 \omega$). Cuando se encuentran estos valores y se conocen f_S y f_D , se puede calcular el momento cuadrupolar según (4.9). Los valores de γ^2 y Q , y en menor grado el valor de $\sin^2 \omega$, proporcionan candidades para comparar con los experimentos, y así se puede determinar si se aceptan o no los potenciales propuestos.

Las ecuaciones (4.14) no se pueden resolver analíticamente ni siquiera para potenciales simples del tipo pozo cuadrado. Por ello lo que se hace es un cálculo numérico a partir de modelos de potencial.

La parte de largo alcance de la fuerza entre dos nucleones viene dada, principalmente, por el potencial de intercambio de un pión, que, para el estado triplete,

viene dado por:

$$-V_0 \left[1 + \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) S_{12} \right] \frac{e^{-x}}{x} \quad (4.16)$$

con $x = r/1.41$ fm, y $V_0 = 11$ MeV, y es válido para $r \gtrsim 3$ fm. Esto da lugar a las colas en todos estos modelos de potencial.

Hasta ahora hemos considerado un potencial estático de la forma:

$$V = V_{te}(r) + V_T(r)S_{12} \quad (4.17)$$

Esta es la forma más general para un potencial local que conserva el momento angular total, la paridad y la carga, es invariante bajo inversión temporal, es independiente de la carga y es completamente independiente del momento relativo, \vec{p} .

Si permitimos al potencial depender al menos de forma lineal en \vec{p} , entonces podemos añadir también un término spin-órbita:

$$V = V_{te}(r) + V_T(r)S_{12} + V_{LS}(r)\vec{L} \cdot \vec{S} \quad (4.18)$$

Esta es la forma propuesta originalmente por Wigner en 1941. En 1962 aparecieron dos de los potenciales más utilizados. El modelo de Hamada y Johnson:

$$V = V_{te}(r) + V_T(r)S_{12} + V_{LS}(r)\vec{L} \cdot \vec{S} + V_{LL}(r)L_{12} \quad (4.19)$$

con:

$$L_{12} = [\delta_{LJ} + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)]\vec{L}^2 - (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \quad (4.20)$$

y el potencial de Yale:

$$V = V_{te}(r) + V_T(r)S_{12} + V_{LS}(r)\vec{L} \cdot \vec{S} + V_q(r)[(\vec{L} \cdot \vec{S})^2 + \vec{L} \cdot \vec{S} - \vec{L}^2] \quad (4.21)$$

En este trabajo hemos elegido un cálculo reciente [30], un potencial nucleón-nucleón denominado *Argonne* v_{18} . El potencial de interacción fuerte se escribe como un operador que depende de los valores de S , T , y T_3 del par de nucleones (en este caso, un protón y un neutrón). Lo que se hace es proyectar el potencial sobre una parte independiente de la carga que tiene 14 componentes en forma de operadores (como en el antiguo *Argonne* v_{14} , ver [29]) y una parte que rompe la independencia de la carga formada por tres operadores dependientes de la carga y un operador de carga asimétrica. El potencial *Argonne* v_{18} está formado por 18 términos:

$$v_{ij} = \sum_{p=1}^{18} v_p(r_{ij})O_{ij}^p \quad (4.22)$$

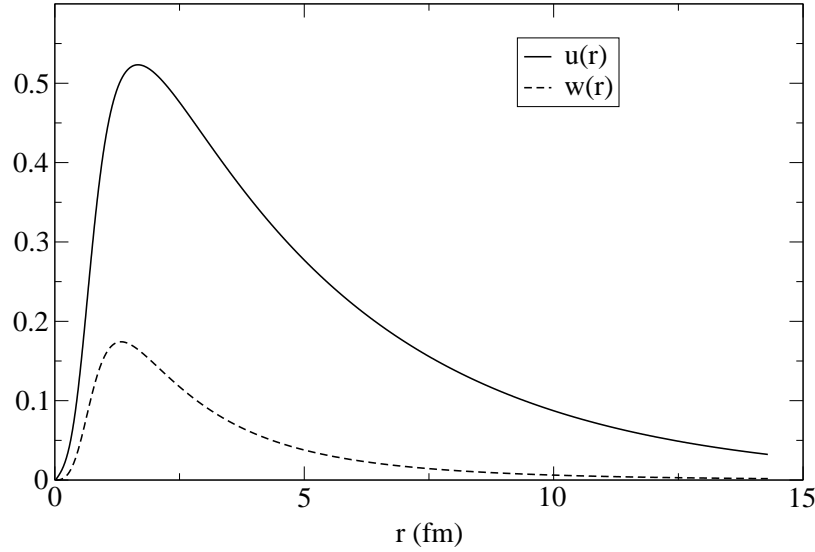


Figura 4.1: Funciones de onda radiales normalizadas para el deuterón.

Los primeros 14 operadores son los mismos que se utilizan en el Argonne v_{14} y son:

$$\begin{aligned}
 O_{ij}^{p=1,14} = & 1, \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j, \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j, (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), S_{ij}, S_{ij}(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \vec{L} \cdot \vec{S}, \\
 & \vec{L} \cdot \vec{S}(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \vec{L}^2, \vec{L}^2(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \vec{L}^2(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j), \vec{L}^2(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \\
 & (\vec{L} \cdot \vec{S})^2, (\vec{L} \cdot \vec{S})^2(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Los cuatro operadores adicionales, que rompen la independencia de carga, vienen dados por:

$$O_{ij}^{p=15,18} = T_{ij}, (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)T_{ij}, S_{ij}T_{ij}, (\tau_{zi} + \tau_{zj}) \tag{4.24}$$

donde $T_{ij} = 3\tau_{zi}\tau_{zj} - \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j$ es el operador *isotensor*, definido de forma análoga a S_{ij} en (4.10).

Las funciones de onda normalizadas para el deuterón, $u(r) = \cos \omega f_S(r)$ y $w(r) = \sin \omega f_D(r)$, obtenidas de este modo y que utilizaremos en nuestro cálculo posterior, se muestran en la figura 4.1. Asimismo se pueden observar en la tabla 4.1 algunas de las propiedades del deuterón que se pueden calcular a partir de este potencial comparadas con valores experimentales.

	Experimento	Argonne v_{18}
E_d	2.224575(9)	2.224575
η	0.0256(4)	0.0250
r_d	1.953(3)	1.967 fm
μ_d	0.857406(1)	0.847 μ_0
Q_d	0.2859(3)	0.270 fm ²

Tabla 4.1: Propiedades estáticas del deuterón. E_d es la energía de enlace del deuterón; η es el cociente asintótico D/S; r_d el radio del deuterón; μ_d su momento magnético y Q_d el momento cuadrupolar.

Capítulo 5

La función de onda del ${}^3\text{He}$

5.1 Ecuaciones de Faddeev

La aproximación de Faddeev ha sido, durante mucho tiempo, una herramienta muy eficaz para resolver problemas de tres cuerpos en física nuclear. Especialmente en el caso de fuerzas de corto alcance, las ecuaciones de Faddeev se pueden resolver con una gran precisión tanto para problemas ligados como de dispersión.

La función de onda del sistema de tres cuerpos se escribe como una suma de tres componentes referidas a los tres conjuntos de coordenadas de Jacobi (ver Capítulo 2):

$$\Psi_{He}^{JM} = \sum_{i=1}^3 \psi_{JM}^{(i)}(\vec{x}_i, \vec{y}_i) \quad (5.1)$$

donde cada componente, $i = 1, 2, 3$, satisface las ecuaciones de Faddeev:

$$(T - E)\psi_{JM}^{(i)} + V_i(\psi_{JM}^{(i)} + \psi_{JM}^{(j)} + \psi_{JM}^{(k)}) = 0 \quad (5.2)$$

siendo $\{i, j, k\}$ una permutación cíclica de $\{1, 2, 3\}$ tal que i está asociado con el par de partículas (j, k) .

La resolución de las ecuaciones de Faddeev implica la resolución de la ecuación de Schrödinger, ya que ésta no es más que la suma de estas tres ecuaciones:

$$(T - E)\psi_{JM}^{(1)} + V_1(\psi_{JM}^{(1)} + \psi_{JM}^{(2)} + \psi_{JM}^{(3)}) = 0 \quad (5.3)$$

$$(T - E)\psi_{JM}^{(2)} + V_2(\psi_{JM}^{(2)} + \psi_{JM}^{(3)} + \psi_{JM}^{(1)}) = 0 \quad (5.4)$$

$$(T - E)\psi_{JM}^{(3)} + V_3(\psi_{JM}^{(3)} + \psi_{JM}^{(1)} + \psi_{JM}^{(2)}) = 0 \quad (5.5)$$

$$(T - E)\Psi_{He}^{JM} + V\Psi_{He}^{JM} = 0 \quad (5.6)$$

siendo $V = V_1 + V_2 + V_3$.

5.2 Desarrollo adiabático hiperesférico

Para resolver las ecuaciones de Faddeev utilizaremos el desarrollo hiperesférico adiabático (*adiabatic hyperspherical expansion* [17]), mediante el cual se resuelve primero la parte angular de las ecuaciones y a continuación se desarrolla la función de onda en el conjunto completo de esta base de funciones angulares. Trabajaremos en el sistema de coordenadas hiperesféricas $(\rho, \alpha, \Omega_x, \Omega_y)$ que se define en el Capítulo 2.

En estas nuevas coordenadas el operador de energía cinética en el sistema centro de masas viene dado por:

$$T = \frac{1}{2m} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{5}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\Lambda}^2}{\rho^2} \right] \quad (5.7)$$

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} - 4 \cot 2\alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \frac{\hat{l}_{xi}^2}{\sin^2 \alpha_i} + \frac{\hat{l}_{yi}^2}{\cos^2 \alpha_i} \quad (5.8)$$

donde \hat{l}_{xi}^2 y \hat{l}_{yi}^2 son los operadores de momento angular correspondientes a \vec{x}_i e \vec{y}_i respectivamente. $\hat{\Lambda}^2$ es el cuadrado del operador *gran momento angular* en 6 dimensiones [17].

Esta aproximación consiste en suponer que una de las coordenadas, en este caso ρ , varía mucho más lentamente que el resto. Así, para un valor fijo de ρ resolvemos la parte angular de las ecuaciones:

$$\frac{1}{2m} \frac{1}{\rho^2} \hat{\Lambda}^2 \Phi_{nJM}^{(i)} + V_i(\Phi_{nJM}^{(i)} + \Phi_{nJM}^{(j)} + \Phi_{nJM}^{(k)}) \equiv \frac{1}{2m} \frac{1}{\rho^2} \lambda_n(\rho) \Phi_{nJM}^{(i)} \quad (5.9)$$

y m es, como dijimos, una masa arbitraria de normalización.

Las funciones angulares $\Phi_{nJM}^{(i)}(\rho, \Omega_i)$ se desarrollan en términos del conjunto completo de armónicos hiperesféricos, $\vec{Y}_{l_x l_y}^{KL}(\alpha_i, \Omega_{x_i}, \Omega_{y_i})$, acoplados con las funciones de onda de spin de tres cuerpos, $\chi_{s_x s_y S}^{(i)}$. El número cuántico K se denomina *hipermomento*, l_x y l_y son los momentos angulares orbitales asociados con \vec{x} e \vec{y} , y L es el acoplo de estos dos momentos. Los spines de las dos partículas, conectadas por la coordenada \vec{x} , se acoplan a s_x , que acoplado al spin s_y de la tercera partícula, da lugar al spin total S del sistema de tres partículas. El resultado es:

$$\Phi_{nJM}^{(i)}(\rho, \Omega_i) = \sum_{K l_x l_y L s_x S} C_{nK l_x l_y L s_x S}^{(i)}(\rho) [\vec{Y}_{l_x l_y}^{KL}(\alpha_i, \Omega_{x_i}, \Omega_{y_i}) \otimes \chi_{s_x s_y S}^{(i)}]^{JM} \quad (5.10)$$

donde C son los coeficientes del desarrollo, y los armónicos hiperesféricos:

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{l_x l_y}^{KLM}(\alpha, \Omega_x, \Omega_y) &= \sum_{m_{l_x} m_{l_y}} \langle l_x m_{l_x} l_y m_{l_y} | L M_L \rangle N_K^{l_x l_y} (\sin \alpha)^{l_x} (\cos \alpha)^{l_y} \\ &P_\nu^{(l_x + \frac{1}{2}, l_y + \frac{1}{2})}(\cos 2\alpha) Y_{l_x m_{l_x}}(\Omega_x) Y_{l_y m_{l_y}}(\Omega_y) \end{aligned} \quad (5.11)$$

con:

$$N_K^{l_x l_y} = \left[\frac{\nu! (\nu + l_x + l_y + 1)! 2(K+2)}{\Gamma(\nu + l_x + \frac{3}{2}) \Gamma(\nu + l_y + \frac{3}{2})} \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

siendo $\nu = (K - l_x - l_y)/2$ y $P_\nu^{(l_x + \frac{1}{2}, l_y + \frac{1}{2})}$ un polinomio de Jacobi (2.10).

El siguiente paso es utilizar estas autofunciones, obtenidas como solución de la parte angular de las ecuaciones de Faddeev, como base para desarrollar cada una de las $\psi^{(i)}$:

$$\psi_{JM}^{(i)} = \frac{1}{\rho^{5/2}} \sum_n f_n(\rho) \Phi_{nJM}^{(i)}(\rho, \Omega_i) \quad (5.13)$$

Sustituyendo $\psi_{JM}^{(i)}$ en la correspondiente ecuación de Faddeev y utilizando (5.9), surge el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para los coeficientes radiales $f_n(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\lambda_n(\rho) + \frac{15}{4} \right) - 2mE \right] f_n(\rho) \\ & + \sum_{n' \neq n} \left(-2P_{nn'} \frac{d}{d\rho} - Q_{nn'} \right) f_{n'}(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde las funciones P y Q se definen como integrales angulares del siguiente modo:

$$P_{nn'}(\rho) \equiv \sum_{i,j=1}^3 \int d\Omega \Phi_n^{(i)*}(\rho, \Omega) \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_{n'}^{(j)}(\rho, \Omega) \quad (5.15)$$

$$Q_{nn'}(\rho) \equiv \sum_{i,j=1}^3 \int d\Omega \Phi_n^{(i)*}(\rho, \Omega) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Phi_{n'}^{(j)}(\rho, \Omega) \quad (5.16)$$

El elemento de volumen viene dado por $\rho^5 d\Omega d\rho$, y $d\Omega = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\Omega_x d\Omega_y d\alpha$.

Finalmente, a partir de (5.1) y (5.10) llegamos a la expresión para la función de onda de un sistema de tres cuerpos:

$$\begin{aligned} \Psi_{He}^{JM} &= \frac{1}{\rho^{5/2}} \sum_n f_n(\rho) \sum_{i=1}^3 \sum_{Kl_x l_y Ls_x S} C_{nKl_x l_y Ls_x S}^{(i)}(\rho) \\ & [\vec{Y}_{l_x l_y}^{KL}(\alpha_i, \Omega_{x_i}, \Omega_{y_i}) \otimes \chi_{s_x s_y}^{(i)}]^{JM} \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde la función radial $f_n(\rho)$ y los coeficientes $C_{nKl_x l_y Ls_x S}^{(i)}(\rho)$ se deben calcular numéricamente.

Es conveniente reescribir esta función de ondas de tres partículas en términos del conjunto de coordenadas de Jacobi en el cual \vec{x} está referido a las dos partículas

que, tras el proceso de dispersión de electrones, formarán el deuterón. La función de ondas de tres cuerpos se puede escribir, entonces:

$$\Psi_{He}^{JM} = \frac{1}{\rho^{5/2}} \sum_n f_n(\rho) \sum_{Kl_x l_y Ls_x S} \tilde{C}_{nKl_x l_y Ls_x S}(\rho) [\vec{Y}_{l_x l_y}^{KL}(\alpha, \Omega_x, \Omega_y) \otimes \chi_{s_x s_y S}]^{JM} \quad (5.18)$$

siendo $\tilde{C}_{nKl_x l_y Ls_x S}(\rho)$ los coeficientes del desarrollo tras la transformación.

Hemos elegido dos potenciales distintos nucleón-nucleón para compobar después con cuál de ellos se obtiene un mejor resultado. En primer lugar tenemos el mismo potencial con el que calculamos la función de onda del deuterón, el Argonne v_{18} (que se ha explicado en el capítulo anterior), y en segundo lugar un potencial mucho más sencillo [5]. Este último consiste en una parametrización de la parte de la interacción nucleón-nucleón con isospin cero, que tiene términos central, spin-spin, tensorial y spin-órbita, del siguiente modo:

$$V_{NN} = V_c(r) + V_{ss}(r)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T(r)\hat{S}_{12} + V_{so}(r)\vec{L}_{NN} \cdot \vec{S} \quad (5.19)$$

donde σ_1 y σ_2 son los spines de los nucleones, $\vec{S} \equiv \sigma_1 + \sigma_2$, \vec{L}_{NN} el momento angular orbital relativo y \hat{S}_{12} viene dado por (4.10). La forma radial de cada término en la ecuación anterior es una gaussiana, $V \exp(-r^2/b^2)$, cuyos parámetros se ajustarán de forma que se reproduzcan lo mejor posible los datos experimentales disponibles de dispersión pp y np a bajas energías en el caso de interacción con isospin uno, como los parámetros típicos del deuterón en el caso de isospín cero.

Tanto para el potencial Argonne v_{18} como para el potencial de gaussianas, consideraremos también el caso en el que el potencial nucleón-nucleón contiene un término de interacción a tres cuerpos (básicamente otra gaussiana) que no es más que una corrección que da lugar a un estado más ligado para el ${}^3\text{He}$.

En la tabla 5.1 se pueden ver los valores de la energía de enlace y radio medio de carga del ${}^3\text{He}$ que obtenemos nosotros¹ utilizando el potencial Argonne v_{18} y el de gaussianas. Se muestran también los resultados de cálculos previos en los que utilizan potenciales nucleón-nucleón del tipo Paris [7], Bonn [7] y AV18/UIX [18] (este último utiliza el modelo Argonne v_{18} para la interacción nucleón-nucleón, v_{ij} , y el modelo Urbana IX para la interacción entre tres nucleones, V_{ijk}), junto con los valores experimentales.

¹Los radios que se muestran en la tabla en las cuatro primeras filas son radios de masa

	E_B (MeV)	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ (fm)
Argonne v_{18}	5.39	1.94
Argonne $v_{18} + 3$ cuerpos gaussianas	7.70	1.74
gaussianas	7.02	1.80
gaussianas + 3 cuerpos	7.63	1.76
Paris	7.48	1.85
Bonn	8.29	1.74
AV18/VIX	7.71	1.76(p) 1.61(n)
Experimento	7.72	1.95

Tabla 5.1: Propiedades estáticas del ${}^3\text{He}$. E_B es la energía de enlace y $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ el radio cuadrático medio de carga. Los valores experimentales son de las referencias [18] y [23] respectivamente.

Capítulo 6

Probabilidad de transición y corriente nuclear

A lo largo de este capítulo vamos a estudiar la corriente nuclear que aparece en la expresión para la sección eficaz (3.32), $J^\mu(\vec{q})$, bajo la *aproximación de impulso*. En ella se supone que en la interacción fotón-núcleo (el vértice nuclear) toma parte un único nucleón que es detectado en coincidencia con el electrón. La estructura nuclear interviene, pues, únicamente a través de la interacción de este nucleón con el núcleo. Esta aproximación supone en particular que no se consideran efectos en la corriente debidos a intercambio de mesones ni efectos de interacción del fotón virtual con otras partículas distintas al nucleón considerado.

En la probabilidad de transición:

$$\mathcal{M}_{fi} = \overline{\sum_i} \sum_f |\bar{u}(\vec{k}_f) \gamma_\mu u(\vec{k}_i) J^\mu(\vec{q})|^2 \quad (6.1)$$

se pueden separar las contribuciones leptónica y hadrónica del siguiente modo [10]:

$$\mathcal{M}_{fi} = \eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (6.2)$$

siendo $\eta_{\mu\nu}$ el *tensor leptónico* y $W^{\mu\nu}$ el *tensor hadrónico*.

6.1 Parte leptónica. El electrón como onda plana

Toda la dependencia en la cinemática de los electrones está en el primero de estos términos, que, en el caso de electrones no polarizados, cuyo spin es $\frac{1}{2}$, se calcula como sigue:

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma_f} [\bar{u}_f \gamma_\mu u_i]^\dagger \bar{u}_f \gamma_\nu u_i \quad (6.3)$$

Tenemos en cuenta las siguientes propiedades [13]:

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \quad (6.4)$$

$$\bar{u}^\dagger = \gamma_0^\dagger u \quad (6.5)$$

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma_0 \quad (6.6)$$

$$\sum_\sigma u(k, \sigma) \bar{u}(k, \sigma) = \not{k} + m_e \quad (6.7)$$

Usando la propiedad cíclica de la traza llegamos a:

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\not{k}_f + m_e)_{\beta\lambda} \gamma_\nu \lambda\delta (\not{k}_i + m_e)_{\delta\alpha} \gamma_\mu \alpha\beta = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{k}_f + m_e) \gamma_\nu (\not{k}_i + m_e) \gamma_\mu] \quad (6.8)$$

Hacemos uso ahora del hecho de que la traza de un número impar de γ_μ 's es nula, y de las propiedades [14]:

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu} \quad (6.9)$$

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad (6.10)$$

para llegar finalmente a:

$$\eta_{\mu\nu} = 2(k_{i\nu} k_{f\mu} + k_{f\nu} k_{i\mu} - g_{\mu\nu} k_i \cdot k_f) \quad (6.11)$$

en el límite ultrarrelativista (despreciamos el sumando que va multiplicado por m_e^2 frente al resto).

6.2 Parte hadrónica

El tensor hadrónico es:

$$W^{\mu\nu} = \overline{\sum_I} \sum_F J^{\mu*}(\vec{q}) J^\nu(\vec{q}) \quad (6.12)$$

y contiene toda la información sobre la estructura nuclear. El estado I corresponde al estado hadrónico inicial, es decir, al núcleo de ${}^3\text{He}$, y el estado F al deuterón y al protón saliente, que forman el estado hadrónico final.

Nos queda, pues, calcular $J^\mu(\vec{q})$, que es el elemento de matriz del operador corriente nuclear entre los estados inicial (I) y final (F). Por la ecuación (3.23) sabemos que:

$$J^\mu(\vec{q}) = \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle \Psi_F | \hat{J}^\mu(\vec{x}) | \Psi_I \rangle \quad (6.13)$$

Si consideramos el operador de corriente nuclear como un operador a un cuerpo, podremos expresarlo como la suma de los operadores corriente de cada uno de los

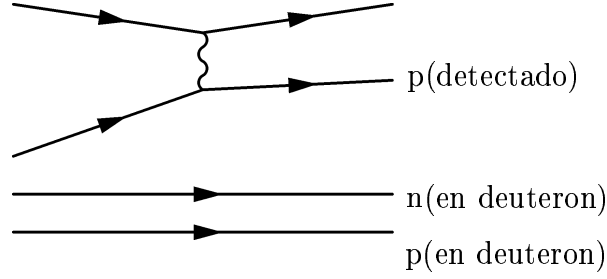


Figura 6.1: El fotón interacciona con el protón saliente.

nucleones que constituyen el núcleo blanco.

$$\hat{J}^\mu = \sum_{n=1}^3 \hat{j}_n^\mu \quad (6.14)$$

Junto a la aproximación de impulso, consideramos también en todo momento que el nucleón que absorbe el fotón virtual, la partícula 3, es el detectado en coincidencia con el electrón, actuando el resto como meros espectadores. Teniendo en cuenta todo esto se llega a:

$$J^\mu(\vec{q}) = \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{r}_3 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_3} \Psi_F^\dagger(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \phi_p^\dagger(\vec{r}_3) \hat{j}^\mu \Psi_I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (6.15)$$

En esta ecuación $\phi_p(\vec{r}_3)$ representa la función de ondas del nucleón detectado; $\Psi_F^\dagger(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ la función de ondas del núcleo residual, el deuterón, y $\Psi_I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ la función de ondas del estado nuclear inicial, es decir, el ${}^3\text{He}$.

En las figuras 6.1, 6.2 y 6.3 se muestran los tres casos posibles de interacción del fotón con uno de los nucleones. En realidad los casos 6.2 y 6.3 son equivalentes, así nos quedan únicamente dos términos: el término directo (el fotón interacciona con el protón detectado) y el término de intercambio (el fotón interacciona con uno de los nucleones del núcleo residual). La contribución del término de intercambio frente al término directo es en general despreciable, y dado que estamos trabajando bajo la aproximación de impulso, únicamente consideraremos el término directo, lo cual sabemos que no es una mala aproximación, al menos a bajo momento transferido.

Según se explica en el apéndice B, podemos factorizar las funciones de onda de los núcleos inicial y final separando las funciones de onda intrínsecas. Con la función de onda del protón hacemos algo parecido, de modo que sólo dependa de la coordenada y_r . A partir de las ecuaciones (B.13), (B.14) y (B.15), y teniendo en cuenta (2.22) llegamos a:

$$J^\mu(\vec{q}) = \int d^3R_I d^3\vec{x} d^3\vec{y} \phi_p^\dagger(\vec{y}) \Psi_d^\dagger(\vec{x}) \hat{j}^\mu \Psi_{He}(\vec{x}, \vec{y}) e^{i\vec{R}_I \cdot (\vec{q} + \vec{P}_I - \vec{P}_F - \vec{p})} e^{i\vec{x} \cdot (\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{P}_F - \frac{m_1}{m_1+m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2))} e^{-i\vec{y} \cdot \vec{q}} \quad (6.16)$$

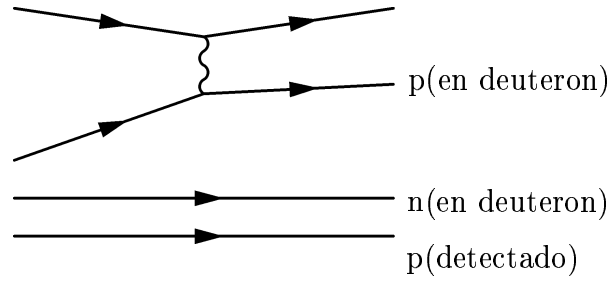


Figura 6.2: El fotón interactúa con el protón que formará parte del deuterón

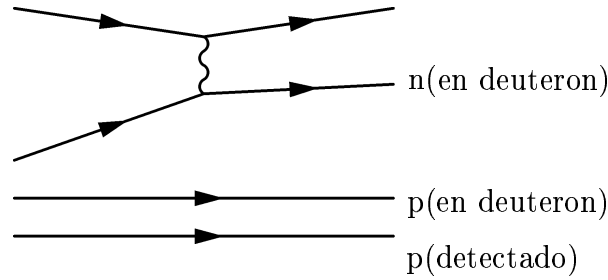


Figura 6.3: El fotón interactúa con el neutrón que formará parte del deuterón

La integral en \vec{R}_I es inmediata, teniendo en cuenta la definición de delta de Dirac (2.9):

$$\int d^3 \vec{R}_I e^{i \vec{R}_I \cdot (\vec{q} + \vec{P}_I - \vec{P}_F - \vec{p})} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_I + \vec{q} - \vec{P}_F - \vec{p}) \quad (6.17)$$

Si recordamos la expresión para la sección eficaz (3.32), observamos que la delta de momentos que acabamos de obtener junto con la delta de energías que allí aparece, dan lugar a una delta de conservación del 4-momento total.

En aproximación de impulso, que es el caso que estamos tratando, se ha de verificar:

$$\vec{p}_3 + \vec{q} = \vec{p} \quad (6.18)$$

es decir, el protón saliente se lleva todo el momento transferido por el electrón al núcleo. Tenemos además la relación de conservación del 3-momento:

$$\vec{P}_I + \vec{q} = \vec{p} + \vec{P}_F \quad (6.19)$$

Con ayuda de estas dos relaciones se obtiene:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P}_F - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \Rightarrow e^{i \vec{x} \cdot (\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P}_F - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2))} = 1 \quad (6.20)$$

Suponemos ahora que el protón detectado se mueve como una onda plana. Su función de onda será entonces¹:

$$\phi_p^{PW}(\vec{y}) = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}_r} \chi_{\frac{1}{2}s} = g_p(\vec{y}_r) \quad (6.21)$$

La expresión de la corriente nuclear es:

$$J^\mu(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_I + \vec{q} - \vec{P}_F - \vec{p}) \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} g_p^\dagger(\vec{y}) \Psi_d^\dagger(\vec{x}) \hat{j}^\mu \Psi_{He}(\vec{x}, \vec{y}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{q}} \quad (6.22)$$

Dado que la función de onda intrínseca del ${}^3\text{He}$ la tenemos expresada en función de las coordenadas de Jacobi, vamos a expresar también la corriente nuclear en este sistema de coordenadas: $\{\vec{R}_I, \vec{x}_J, \vec{y}_J\}$, así, una vez hecho el cambio de coordenadas de integración, tenemos:

$$J^\mu(\vec{q}) = \left(\frac{m}{\mu_{12}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{\mu_{12,3}}\right)^{\frac{3}{2}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_I + \vec{q} - \vec{P}_F - \vec{p}) \int d^3\vec{x}_J d^3\vec{y}_J g_p^\dagger(\vec{y}_J) \Psi_d^\dagger(\vec{x}_J) \hat{j}^\mu \Psi_{He}(\vec{x}_J, \vec{y}_J) e^{-i\sqrt{\frac{m}{\mu_{12,3}}}\vec{y}_J\cdot\vec{q}} \quad (6.23)$$

6.3 Forma de la corriente nuclear

Una partícula libre siempre está dentro de la capa de masas (*on shell*) y tiene una masa bien definida que liga su energía y momento mediante la relación usual $M^2 = E^2 - \vec{p}^2$. El nucleón ligado que interacciona con el fotón en las reacciones ($e, e'p$), como es el caso que nos ocupa, está fuera de la capa de masas (*off shell*) dado que su energía y su momento no están correlacionados. Por otro lado, bajo aproximación de impulso, la interacción del fotón virtual con nucleones en el núcleo no se diferencia de la interacción con nucleones libres salvo por las diferentes funciones de onda del nucleón en cada caso. Las formas de implementar el carácter *off shell* del nucleón ligado han sido ampliamente tratadas en la literatura, y en este trabajo optaremos por describir dicho nucleón a través de un spinor libre; así sustituiremos el momento del nucleón ligado, $P = (E, \vec{P})$, por $\bar{P} = (\bar{E}, \vec{P})$, donde \bar{E} , en lugar de ser el valor determinado por la conservación de la energía, es el correspondiente al nucleón si estuviera libre, $\bar{E}^2 = \vec{P}^2 + M^2$.

Para el operador de corriente nucleónica elegimos los operadores [9]:

$$\hat{j}_{cc1}^\mu = (F_1 + F_2)\gamma^\mu - \frac{F_2}{2M}(\bar{P} + p)^\mu \quad (6.24)$$

$$\hat{j}_{cc2}^\mu = F_1\gamma^\mu + i\frac{F_2}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (6.25)$$

¹Considerándola normalizada a la unidad

donde F_1 y F_2 son los factores de forma de Pauli y Dirac habituales [13]:

$$F_1(q^2) = \frac{G_E + \tau G_M}{1 + \tau} \quad F_2(q^2) = \frac{G_M - G_E}{1 + \tau}$$

siendo $\tau = -\frac{q^2}{4M^2}$, y G_E y G_M los factores de forma eléctricos y magnéticos de Sachs.

Se sabe [2] que las ecuaciones (6.24) y (6.25) son equivalentes cuando los nucleones inicial y final están ambos dentro de la capa de masas. Para nucleones ligados, como es nuestro caso, ambas expresiones dan lugar a resultados diferentes y no satisfacen la conservación de la corriente (la descomposición de Gordon no será válida, al menos con la misma forma que en el caso libre).

6.4 Cálculo analítico de la función de cuasi-partícula

6.4.1 Función de cuasi-partícula

Partiendo de la expresión para la corriente nuclear (6.22), podemos definir una función de *cuasi-partícula* o *solape* que depende únicamente de la coordenada relativa \vec{y} o, equivalentemente, de \vec{y}_J :

$$\tilde{\phi}^{J_i M_i J_f M_f}(\vec{y}) = \int d^3 \vec{x} \Psi_d^{\dagger J_f M_f}(\vec{x}) \Psi_{He}^{J_i M_i}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (6.26)$$

Dado que la función de onda del ${}^3\text{He}$ la tenemos expresada en función de las coordenadas de Jacobi, es más conveniente calcular este solape en función de la coordenada \vec{y}_J . Para ello es necesario hacer el cambio de variable de integración, teniendo en cuenta:

$$d^3 \vec{x}_J = \left(\frac{\mu_{12}}{m}\right)^{\frac{3}{2}} d^3 \vec{x} \quad (6.27)$$

$$d^3 \vec{y}_J = \left(\frac{\mu_{12,3}}{m}\right)^{\frac{3}{2}} d^3 \vec{y} \quad (6.28)$$

Sabemos que la función de onda que hemos calculado previamente para el ${}^3\text{He}$ está normalizada según:

$$\int d^3 \vec{x}_J d^3 \vec{y}_J |\Psi_{He}^{J_i M_i}(\vec{x}_J, \vec{y}_J)|^2 = 1 \quad (6.29)$$

Para la función del ${}^3\text{He}$ en coordenadas relativas se debe satisfacer también:

$$\int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} |\Psi_{He}^{J_i M_i}(\vec{x}, \vec{y})|^2 = 1 \quad (6.30)$$

Se ve muy claramente, a partir de (6.27), (6.28), (6.29) y (6.30) que la función de onda del ${}^3\text{He}$ expresada en función de las coordenadas relativas tiene que ser:

$$\Psi_{He}^{J_i M_i}(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\frac{\mu_{12}}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\mu_{12,3}}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \Psi_{He}^{J_i M_i}(\vec{x}_J, \vec{y}_J) \quad (6.31)$$

Así, el solape en función de la coordenada de Jacobi será:

$$\tilde{\phi}^{J_i M_i J_f M_f}(\vec{y}_J) = \left(\frac{\mu_{12}}{m}\right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\mu_{12,3}}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \int d^3 \vec{x}_J \Psi_d^{\dagger J_f M_f}(\vec{x}_J) \Psi_{He}^{J_i M_i}(\vec{x}_J, \vec{y}_J) \quad (6.32)$$

6.4.2 Desarrollo de la función de cuasi-partícula

Expresamos, a continuación, la función de onda de cuasi-partícula como un desarrollo en serie en el cual separamos las dependencias angular y radial en \vec{y}_J :

$$\tilde{\phi}^{J_i M_i J_f M_f}(\vec{y}_J) = \sum_{lj\mu} a_{lj\mu}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J) \phi_{lj\mu_j}(\Omega_y) \quad (6.33)$$

con:

$$\phi_{lj\mu_j}(\Omega_y) = \sum_{m\sigma} \langle l m \frac{1}{2} \sigma | j \mu_j \rangle Y_{lm}(\Omega_y) \chi_{\frac{1}{2}\sigma} \quad (6.34)$$

que verifican:

$$\int \phi_{l'j'\mu'_j}^\dagger(\Omega_y) \phi_{lj\mu_j}(\Omega_y) d\Omega_y = \delta_{ll'} \delta_{jj'} \delta_{\mu_j \mu'_j} \quad (6.35)$$

Así que para calcular los coeficientes del desarrollo no tenemos más que hacer:

$$a_{lj\mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J) = \int \phi_{lj\mu_j}^\dagger(\Omega_y) \tilde{\phi}^{J_i M_i J_f M_f}(\vec{y}_J) d\Omega_y \quad (6.36)$$

Recordamos las expresiones para las funciones de onda de los núcleos inicial y final en coordenadas de Jacobi.

- **Deuterón:**

$$\begin{aligned} \Psi_d^{J_f M_f}(\vec{x}_J) &= \frac{u(x_J)}{x_J} \sum_{M_{L_f}, M_{S_f}} \langle 0 M_{L_f} 1 M_{S_f} | J_f M_f \rangle \chi_{1 M_{S_f}} Y_{0 M_{L_f}}(\Omega_x) + \\ &\frac{w(x_J)}{x_J} \sum_{M_{L_f}, M_{S_f}} \langle 2 M_{L_f} 1 M_{S_f} | J_f M_f \rangle \chi_{1 M_{S_f}} Y_{2 M_{L_f}}(\Omega_x) \end{aligned} \quad (6.37)$$

- ${}^3\text{He}$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{He}^{J_i M_i}(\vec{x}_J, \vec{y}_J) &= \rho^{-\frac{5}{2}} \sum_n f_n(\rho) \sum_{K l_x l_y L_i s_x S_i} \tilde{C}_{nK l_x l_y L_i s_x S_i}(\rho) \\
&\sum_{M_{L_i}, M_{S_i}} \langle L_i M_{L_i} S_i M_{S_i} | J_i M_i \rangle \phi_K^{(l_x l_y)}(\alpha) \\
&\sum_{m_{l_x} m_{l_y}} \langle l_x m_{l_x} l_y m_{l_y} | L_i M_{L_i} \rangle Y_{l_x m_{l_x}}(\Omega_x) Y_{l_y m_{l_y}}(\Omega_y) \\
&\sum_{m_{s_x} m_{s_y}} \langle s_x m_{s_x} s_y m_{s_y} | S_i M_{S_i} \rangle \chi_{s_x m_{s_x}} \chi_{s_y m_{s_y}} \quad (6.38)
\end{aligned}$$

- **Integral de las partes angulares**

Las contribuciones radial y angular están perfectamente separadas, así que podemos realizar las integrales angulares de modo independiente sin más que tener en cuenta $d^3 \vec{x}_J = x_J^2 dx_J d\Omega$. Estas integrales en Ω_x y en Ω_y son muy sencillas, ya que la dependencia angular aparece únicamente en forma de armónicos esféricos. No tenemos más que recordar la relación de ortonormalidad de los mismos (2.1).

- **Suma de spines**

Para sumar los spines tenemos que considerar que dos de los spinores que tenemos, uno en el caso del deuterón y otro en el caso del ${}^3\text{He}$, son el resultado del acoplo de dos momentos angulares de spin:

$$\chi_{1M_{S_f}} = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \langle \frac{1}{2} \sigma_1 \frac{1}{2} \sigma_2 | 1 M_{S_f} \rangle \chi_{\frac{1}{2}\sigma_1} \chi_{\frac{1}{2}\sigma_2} \quad (6.39)$$

$$\chi_{s_x m_{s_x}} = \sum_{m_{s_1} m_{s_2}} \langle \frac{1}{2} m_{s_1} \frac{1}{2} m_{s_2} | s_x m_{s_x} \rangle \chi_{\frac{1}{2}m_{s_1}} \chi_{\frac{1}{2}m_{s_2}} \quad (6.40)$$

Teniendo en cuenta:

$$\chi_{s_a m_{s_a}}^\dagger \chi_{s_b m_{s_b}} = \delta_{s_a s_b} \delta_{m_{s_a} m_{s_b}} \quad (6.41)$$

obtenemos una serie de deltas de Kronecker que nos reducirán notablemente el número de sumas que tenemos. Asimismo, simplificamos aún más esta expresión escribiendo los coeficientes de Clebsch-Gordan en función de los símbolos- $3j$, y haciendo uso de las propiedades de los mismos y de los $6j$ y $9j$ que se resumen en el Apéndice A.

• **Integral radial**

La integral radial no se puede calcular analíticamente ya que tanto las funciones $u(x_J)$ y $w(x_J)$ del deuterón, como los coeficientes $\tilde{C}(\rho)$ y las funciones $f(\rho)$ y $\phi(\alpha)$ del ${}^3\text{He}$ son numéricas. Así pues, tendremos que recurrir al cálculo numérico para obtener la función de onda de cuasipartícula. La expresión para calcular los coeficientes del desarrollo de esta función, tras hacer todos los pasos y simplificaciones indicados anteriormente, es:

$$\begin{aligned}
a_{lj\mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J) &= \left(\frac{\mu_{12}}{m}\right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\mu_{12,3}}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \int dx_J \sum_{nKS_i} (-1)^{J_i+M_i} (-1)^{S_i+j+1+l} \\
&\quad \sqrt{2j+1} \sqrt{2J_i+1} \sqrt{2S_i+1} x_J^2 \frac{u(x_J)}{x_J} \rho^{-\frac{5}{2}} f_n(\rho) \tilde{C}_{nK0l1S_i}(\rho) \\
&\quad \phi_K^{(0l)}(\alpha) \begin{pmatrix} j & 1 & J_i \\ \mu_j & M_f & -M_i \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j & 1 & J_i \\ S_i & l & 1/2 \end{matrix} \right\} + \\
&\quad \left(\frac{\mu_{12}}{m}\right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\mu_{12,3}}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \int dx_J \sum_{nKL_i S_i} (-1)^{J_i+M_i} \sqrt{2j+1} \sqrt{3} \\
&\quad \sqrt{2J_i+1} \sqrt{2L_i+1} \sqrt{2S_i+1} x_J^2 \frac{w(x_J)}{x_J} \rho^{\frac{5}{2}} f_n(\rho) \tilde{C}_{nK2lL_i1S_i}(\rho) \\
&\quad \phi_K^{(2l)}(\alpha) \begin{pmatrix} j & 1 & J_i \\ \mu_j & M_f & -M_i \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 2 & l & L_i \\ 1 & 1/2 & S_i \\ 1 & j & J_i \end{matrix} \right\} \quad (6.42)
\end{aligned}$$

Podemos escribir esta expresión de una forma más compacta si denominamos $F_0(x_J) = \frac{u(x_J)}{x_J}$ y $F_2(x_J) = \frac{w(x_J)}{x_J}$, y teniendo en cuenta la relación (A.18):

$$\begin{aligned}
a_{lj\mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J) &= \left(\frac{\mu_{12}}{m}\right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\mu_{12,3}}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{3} \sqrt{2J_i+1} \\
&\quad \sum_{l_d=0,2} \sum_{nKL_i S_i} \sqrt{2L_i+1} \sqrt{2S_i+1} \sqrt{2j+1} (-1)^{J_i+M_i} \\
&\quad \begin{pmatrix} j & 1 & J_i \\ \mu_j & M_f & -M_i \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} l_d & l & L_i \\ 1 & 1/2 & S_i \\ 1 & j & J_i \end{matrix} \right\} \\
&\quad \int dx_J x_J^2 F_{l_d}(x_J) \frac{1}{\rho^{\frac{5}{2}}} f_n(\rho) \tilde{C}_{nKl_d l L_i 1 S_i}(\rho) \phi_K^{(l_d l)}(\alpha) \quad (6.43)
\end{aligned}$$

El último paso es, pues, calcular numéricamente estos valores. Para ello hemos programado esta expresión en *Fortran 77*. Teniendo en cuenta los valores conocidos

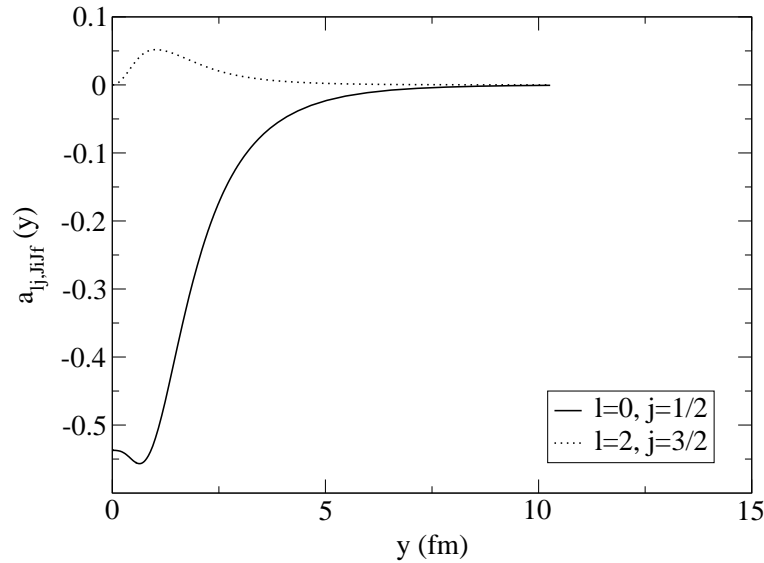


Figura 6.4: Coeficientes del desarrollo del solape, $a_{lj}^{J_i J_f}$.

de los momentos angulares totales del ${}^3\text{He}$ y del deuterón respectivamente:

$$J_i = J_{3\text{He}} = \frac{1}{2}$$

$$J_f = J_d = 1$$

El resultado obtenido se puede ver en la figura 6.4, en la que hemos omitido, por simplicidad, el símbolo $-3j$ y el factor $(-1)^{J_i+M_i}$ en el cálculo de $a_{lj\mu_j}$, y con ellos la dependencia en μ_j , M_i y M_j . Las dos contribuciones que obtenemos, para $l = 0$ y $l = 2$, se muestran en dicha figura.

6.4.3 Factor espectroscópico

El factor espectroscópico es proporcional a la sección eficaz; es una medida del solape entre los estados inicial y final. Podemos pensar en la sección eficaz del proceso que estamos estudiando como una sección eficaz correspondiente a la interacción entre el electrón incidente y un protón, multiplicada por un factor que nos da la probabilidad de encontrar a ese protón en el núcleo de ${}^3\text{He}$. Este factor es el que denominamos factor espectroscópico y nos da idea de la ocupación nucleónica del ${}^3\text{He}$. En cálculos de dispersión de electrones similares al que estamos llevando a cabo en este trabajo, este factor se suele ajustar a partir de los datos experimentales;

aquí vamos a obtener un valor teórico mucho más fiable. El factor espectroscópico se define como la normalización de la función de onda de cuasi-partícula, incluyendo la suma en spines finales y el promedio en iniciales:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i M_f} \int d^3 \vec{y} \tilde{\phi}^{\dagger J_i M_i J_f M_f}(\vec{y}) \tilde{\phi}^{J_i M_i J_f M_f}(\vec{y}) \\
&= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i M_f} \int d\Omega_y dy y^2 \sum_{l j \mu_j l' j' \mu'_j} a_{l' j' \mu'_j}^{* J_i M_i J_f M_f}(y) \phi_{l' j' \mu'_j}^{\dagger}(\Omega_y) \\
&\quad a_{l j \mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y) \phi_{l j \mu_j}(\Omega_y) \\
&= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i M_f} \int dy y^2 \sum_{l j \mu_j} |a_{l j \mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y)|^2
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Mediante integración numérica con el programa de ordenador desarrollado para ello, obtenemos el factor espectroscópico:

$$S^2 = 0.67065$$

y por tanto la amplitud espectroscópica:

$$S = 0.81893$$

6.5 Tensor hadrónico

Hemos calculado ya la corriente nuclear del proceso, pero si nos fijamos en la expresión (3.32) vemos que para calcular la sección eficaz, lo que nos interesa es el tensor hadrónico:

$$W^{\mu\nu} = \overline{\sum_i} \sum_f J^\mu(\vec{q}) J^{\dagger\nu}(\vec{q}) \tag{6.45}$$

Tenemos que hacer la suma en todas las posibles proyecciones de momento angular en el estado final y el promedio en el estado inicial. El único término que depende de M_i y M_f es $a_{l j \mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J)$, así que podemos separar esta suma del resto de factores que componen la corriente nuclear. Lo que tenemos que calcular es, pues:

$$\sum_{M_f} \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} a_{l' j' \mu'_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y') a_{l j \mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J)$$

Si observamos la expresión (6.43), vemos que tanto M_i como M_f sólo aparecen en el símbolo-3j. Tenemos, entonces, usando (A.4):

$$\sum_{M_f} \sum_{M_i} \begin{pmatrix} j' & 1 & J_i \\ \mu'_j & M_f & -M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 1 & J_i \\ \mu_j & M_f & -M_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2j + 1} \delta_{j j'} \delta_{\mu_j \mu'_j} \tag{6.46}$$

Para unos valores determinados de j y μ_j , automáticamente tenemos fijado un único valor para l , ya que los únicos conjuntos no nulos que encontramos en nuestro caso para los coeficientes $a_{lj\mu_j}$ tienen distintos valores de l para distintos valores de j (ver figura 6.4), así que podemos añadir a la expresión anterior $\delta_{ll'}$. Obtenemos así:

$$\sum_{M_f} \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} a_{l'j'\mu'_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y'_J) a_{lj\mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J) = \tilde{a}_{l'j'}^{J_i J_f}(y'_J) \tilde{a}_{lj}^{J_i J_f}(y_J) \delta_{l'l} \delta_{j'j} \delta_{\mu'_j \mu_j} \quad (6.47)$$

con:

$$a_{lj\mu_j}^{J_i M_i J_f M_f}(y_J) = \tilde{a}_{lj}^{J_i J_f}(y_J) \sqrt{2J_i + 1} \sqrt{2j + 1} \begin{pmatrix} j & 1 & J_i \\ \mu_j & M_f & -M_i \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

Volviendo a la corriente nuclear, al calcular el tensor hadrónico nos encontramos de nuevo con una delta de Dirac, repetimos el truco (3.25), esta vez en tres dimensiones:

$$[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_I + \vec{q} - \vec{P}_F - \vec{p})]^2 = V (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_I + \vec{q} - \vec{P}_F - \vec{p}) \quad (6.49)$$

en nuestro caso, $V = 1$.

Haciendo uso de las deltas de Kronecker llegamos fácilmente a:

$$\frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_f M_i} J^\mu(\vec{q}) J^{\dagger\nu}(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_I + \vec{q} - \vec{P}_F - \vec{p}) \left(\frac{m}{\mu_{12}}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{lj\mu_j} H_{lj\mu_j}^\mu H_{lj\mu_j}^{\dagger\nu} \quad (6.50)$$

con:

$$H_{lj\mu_j}^\mu = \int d^3 \vec{y}_J e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}_J} \sqrt{\frac{m}{\mu_{12,3}}} g_p^\dagger(\vec{y}) \hat{j}^\mu \tilde{a}_{lj}^{J_i J_f}(y_J) \sum_{m\sigma} \langle l m \frac{1}{2} \sigma | j \mu_j \rangle Y_{lm}(\Omega_y) \chi_{\frac{1}{2}\sigma} \quad (6.51)$$

y en coordenadas relativas:

$$\frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_f M_i} J^\mu(\vec{q}) J^{\dagger\nu}(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_I + \vec{q} - \vec{P}_F - \vec{p}) \sum_{lj\mu_j} H_{lj\mu_j}^\mu H_{lj\mu_j}^{\dagger\nu} \quad (6.52)$$

con:

$$H_{lj\mu_j}^\mu = \int d^3 \vec{y} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}} g_p^\dagger(\vec{y}) \hat{j}^\mu \tilde{a}_{lj}^{J_i J_f}(y) \sum_{m\sigma} \langle l m \frac{1}{2} \sigma | j \mu_j \rangle Y_{lm}(\Omega_y) \chi_{\frac{1}{2}\sigma} \quad (6.53)$$

Capítulo 7

Sección eficaz ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$

7.1 Cálculo de la sección eficaz ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$

Hemos llegado a la siguiente expresión para la sección eficaz (en coordenadas relativas):

$$d\sigma = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{(2\pi)^5 32 k_i \cdot P_I} \delta^{(4)}(P_I + q - P_F - p) \eta_{\mu\nu} \sum_{lj\mu_j} H_{lj\mu_j}^\mu H_{lj\mu_j}^{\dagger\nu} \frac{d^3\vec{p}}{E_p} \frac{d^3\vec{k}_f}{\varepsilon_f} \frac{d^3\vec{P}_F}{E_F} \quad (7.1)$$

con:

$$H_{lj\mu_j}^\mu = \int d^3\vec{y} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}} g_p^\dagger(\vec{y}) \hat{j}^\mu \tilde{a}_{lj}^{J_i J_f}(y) \sum_{m\sigma} \langle l m \frac{1}{2} \sigma | j \mu_j \rangle Y_{lm}(\Omega_y) \chi_{\frac{1}{2}\sigma} \quad (7.2)$$

Pero lo que a nosotros nos interesa calcular, para comparar posteriormente con los datos experimentales, es $\frac{d\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega_e d\Omega_p}$, siendo Ω_e y Ω_p los ángulos del electrón y el protón detectados, respectivamente. Tenemos, pues, que integrar esta sección eficaz hasta llegar a la expresión deseada. La integral en \vec{P}_F es inmediata, simplemente hay que tener en cuenta la delta de conservación del 3-momento, que nos dice que $\vec{P}_F = \vec{P}_I + \vec{q} + \vec{p}$. Asimismo tendremos en cuenta las siguientes relaciones que nos permiten expresar los diferenciales de momento en función de la energía y el ángulo:

$$\left. \begin{aligned} d^3\vec{k}_f &= k_f^2 dk_f d\Omega_e \\ \varepsilon_f^2 - k_f^2 &= m^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^3\vec{k}_f = |\vec{k}_f| \varepsilon_f d\varepsilon_f d\Omega_e$$

y análogamente:

$$d^3\vec{p} = |\vec{p}| E_p dE_p d\Omega_p \quad (7.3)$$

Con esto obtenemos:

$$\frac{d\sigma}{dE_p d\Omega_p d\varepsilon_f d\Omega_e} = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{(2\pi)^5 32k_i \cdot P_I} \delta(E_I + \omega - E_F - E_p) \eta_{\mu\nu} \sum_{lj\mu_j} H_{lj\mu_j}^\mu H_{lj\mu_j}^{\dagger\mu} \frac{|\vec{p}| |\vec{k}_f|}{E_F} \quad (7.4)$$

Para obtener la expresión deseada, nos queda únicamente integrar en E_p , haciendo uso nuevamente de la delta de conservación de la energía. Pero en este caso no es tan sencillo, ya que la conservación del 3-momento implica una dependencia de E_F en E_p . Para realizar esta integración consideraremos lo siguiente:

- Suponemos sistema de referencia de laboratorio ($\vec{P}_I = 0$).
- Suponemos que el eje z va en la dirección del momento transferido, \vec{q} .

Así nos queda:

$$\begin{aligned} \delta(M_I + \omega - E_F - E_p) &= \delta[M_I + \omega - (|\vec{q}|^2 + E_p^2 - M_p^2 - \\ &\quad 2|\vec{q}|(E_p^2 - M_p^2)^{1/2} \cos\theta_p + M_F^2)^{1/2} - E_p] \\ &= \delta(g(E_p)) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Tenemos en cuenta a continuación la siguiente expresión para la delta de Dirac de una función [16]:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (7.6)$$

siendo x_i los ceros de la función $g(x)$. Teniendo en cuenta todo esto, al integrar la delta de energías en nuestra expresión para la sección eficaz, se obtiene:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega_e d\Omega_p} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{1}{(2\pi)^3 8k_i \cdot P_I} \frac{|\vec{p}| |\vec{k}_f|}{M_I} f_r^{-1} \eta_{\mu\nu} \sum_{lj\mu_j} H_{lj\mu_j}^\mu H_{lj\mu_j}^{\dagger\nu} \quad (7.7)$$

donde:

$$f_r = 1 + \frac{|\vec{p}| \omega - |\vec{q}| E_p \cos\theta_p}{|\vec{p}| M_I} \quad (7.8)$$

es el *factor de retroceso*, y hemos considerado que en el sistema de unidades naturales $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Los datos experimentales para la sección eficaz se suelen presentar en términos de *sección eficaz reducida* o *distribución de momentos* $\rho(p_m)$, que se calcula:

$$\rho(p_m) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega_e d\Omega_p} \frac{1}{f_r^{-1} |\vec{p}| E_p \sigma_{ep}} \quad (7.9)$$

donde el momento perdido se define $p_m = P_I - P_F$.

Como sección eficaz electrón-protón libre σ_{ep} se suele tomar σ_{cc1} de de Forest [9].

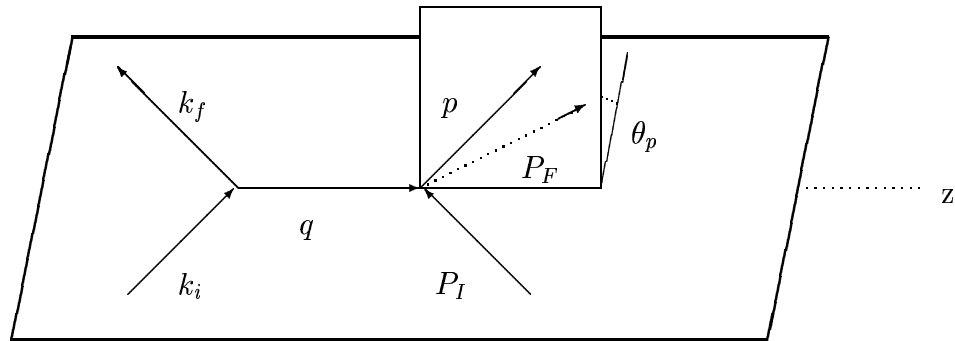


Figura 7.1: Elección de ejes y ángulos para $(e, e'p)$.

7.2 Relaciones cinemáticas

La conservación de energía y momento en todo el proceso, así como en cada uno de los vértices del diagrama (ver figura 7.1) determina las siguientes relaciones entre las variables que intervienen en el proceso (en el sistema de referencia de laboratorio y en aproximación de impulso):

$$\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f = E_F + E_p - M_I \quad (7.10)$$

$$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f = \vec{P}_F + \vec{p} \quad (7.11)$$

con lo cual, en aproximación ultrarrelativista para los electrones:

$$q_\mu^2 = \omega^2 - \vec{q}^2 = -4\varepsilon_i\varepsilon_f \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \quad (7.12)$$

Las variables cinemáticas que intervienen en el proceso no son independientes, sino que el conocimiento de parte de ellas servirá para determinar el resto. Así, a la hora de reconstruir la cinemática completa del proceso tenemos libertad en la elección de las variables que intervienen.

Las dos opciones más frecuentemente utilizadas son las siguientes:

- **Cinemática paralela:**

Se toman \vec{q} , \vec{p}_m y \vec{p} sobre la misma dirección. De este modo en el caso paralelo tenemos $|\vec{q}| = |\vec{p}| - |\vec{p}_m|$ y en el antiparalelo $|\vec{q}| = |\vec{p}| + |\vec{p}_m|$.

- **Cinemática perpendicular:**

Se mantienen constantes ε_f y θ_e , lo que equivale a fijar la energía, ε , y el momento, $|\vec{q}|$, transferidos. La gran ventaja de esta cinemática es que permite fijar separadamente la energía y el momento transferidos al núcleo.

7.3 Resultados

Para realizar el cálculo final de la sección eficaz hemos adaptado el formalismo desarrollado para los procesos $(e, e'p)$ en [25], [26] y [27] a la reacción ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ para el caso de ondas planas. La característica fundamental de este formalismo es el tratamiento de la parte nuclear del proceso desde un punto de vista relativista. Aunque en un principio los modelos no relativistas del núcleo están ampliamente extendidos, con gran aceptación, cuando se pretende avanzar más en este tipo de modelos con el fin de obtener mejores predicciones, aparecen problemas debidos a la falta de flexibilidad de la ecuación de Schrödinger. Así pues, la razón principal para

usar el formalismo relativista en el análisis de procesos de dispersión de electrones por núcleos tanto en el vértice electrónico (donde es obligado por las energías habituales para el electrón, del orden de cientos de MeV, mucho mayores que su masa en reposo ≈ 0.5 MeV) como en el nuclear, es que así es posible incluir los efectos de la distorsión coulombiana, lo cual, aunque se sale de los objetivos de este trabajo, se podrá tener en cuenta en futuros estudios más precisos de esta reacción.

Bajo un formalismo relativista, una función de onda se expresa como un spinor de Dirac de dos componentes, una denominada *up* y otra *down*. Para transformar una función de onda no relativista en relativista, utilizamos la aproximación EMA (*effective momentum approach*) según se explica en [28]. Como componente *up* del spinor de Dirac tomamos la función de onda no relativista, y la componente *down* la calculamos del siguiente modo:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\chi, \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_m}{E + M} \chi \right) \Rightarrow \chi_{down} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_m}{E + M} \chi_{up} \quad (7.13)$$

siendo χ una función de onda no relativista, en nuestro caso la función de onda de cuasipartícula.

Antes de calcular la sección eficaz necesitamos fijar una cinemática. En este caso hemos elegido la misma que en [15] (Cinemática I) lo cual nos permitirá comparar nuestro cálculo con los datos experimentales que en ella se presentan:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= 527.9 \text{ MeV} \\ \theta_e &= 52.2^\circ \\ |\vec{q}| &\simeq 430 \text{ MeV} \end{aligned}$$

siendo θ_e el ángulo de dispersión del electrón, es decir, el ángulo formado entre el 3-momento del electrón incidente y el 3-momento del electrón dispersado.

Los resultados de nuestro cálculo comparados con los datos experimentales de Jans *et al.* [15] se pueden ver en la figura 7.2. Aunque hemos realizado el cálculo para las corrientes (6.24) y (6.25), en las gráficas mostramos sólo una de ellas, ya que, al estar considerando ondas planas, obtenemos resultados prácticamente idénticos.

En la figura 7.2 se pueden observar los resultados referentes a las distintas funciones de onda que hemos calculado para el ^3He . Vemos que todas ellas reproducen aceptablemente los datos experimentales, tanto la forma de la sección eficaz como su orden de magnitud, si bien la que utiliza un potencial nucleón-nucleón a base de gaussianas (G en la leyenda) es la que ajusta más fielmente dichos datos. En la figura 7.3 se representa de nuevo la sección eficaz para la función de onda del helio calculada a partir de esta última interacción en escala no logarítmica.

En el caso de la sección eficaz reducida la cinemática no es relevante, ya que el hecho de dividir por E_p , $|\vec{p}|$, f_r y σ_{cc1} elimina toda dependencia en la misma. En

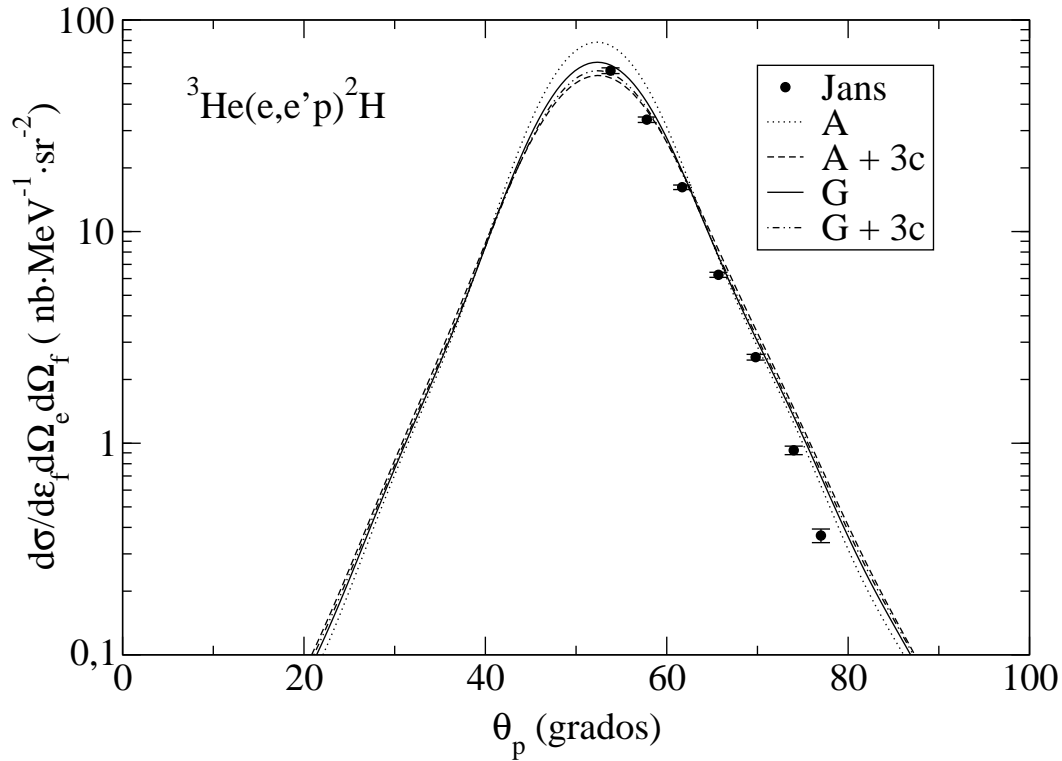


Figura 7.2: Sección eficaz para la reacción ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$. En la gráfica se muestran los cálculos referentes a los distintos potenciales utilizados para obtener la función de onda del helio: Argonne v_{18} (A), Argonne v_{18} con interacción de tres cuerpos (A + 3c), gaussianas (G) y gaussianas con interacción de tres cuerpos (G + 3c). Los datos experimentales son los de Jans *et al.* de la referencia [15]. Cinemática: $\epsilon_i = 527.9 \text{ MeV}$, $\theta_e = 52.2^\circ$, $|\vec{q}| \simeq 430 \text{ MeV}$.

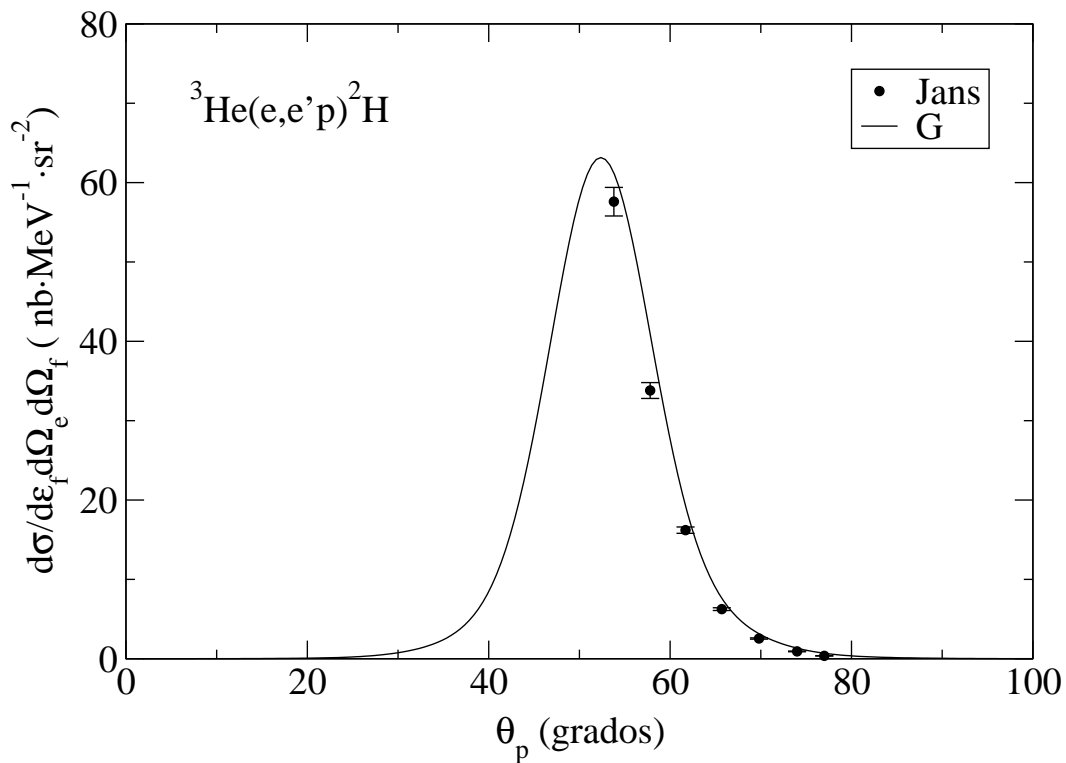


Figura 7.3: Sección eficaz para la reacción ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$. En la gráfica se muestran el cálculo referentes a la función de onda del ${}^3\text{He}$ calculada a partir del potencial nucleón-nucleón formado por gaussianas (G). Los datos experimentales son los de Jans *et al.* de la referencia [15]. Cinemática: $\epsilon_i = 527.9$ MeV, $\theta_e = 52.2^\circ$, $|\vec{q}| \simeq 430$ MeV.

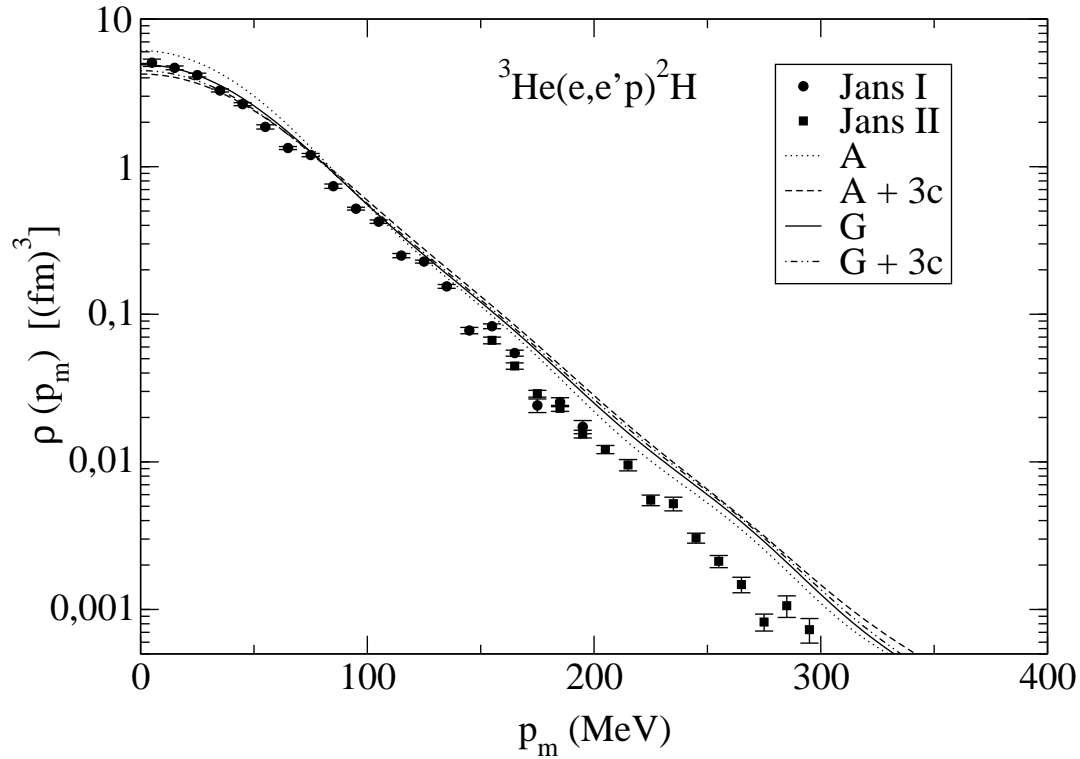


Figura 7.4: Distribución de momentos para la reacción ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$. En la gráfica se muestran los cálculos referentes a los distintos potenciales utilizados para obtener la función de onda del helio: Argonne v_{18} (A), Argonne v_{18} con interacción de tres cuerpos (A + 3c), gaussianas (G) y gaussianas con interacción de tres cuerpos (G + 3c). Los datos experimentales son los de Jans *et al.* de la referencia [15]. Cinemática I: $\epsilon_i = 527.9$ MeV, $\theta_e = 52.2^\circ$, $|\vec{q}| \simeq 430$ MeV. Cinemática II: $\epsilon_i = 509.3$ MeV, $\theta_e = 36.0^\circ$, $|\vec{q}| \simeq 300$ MeV.

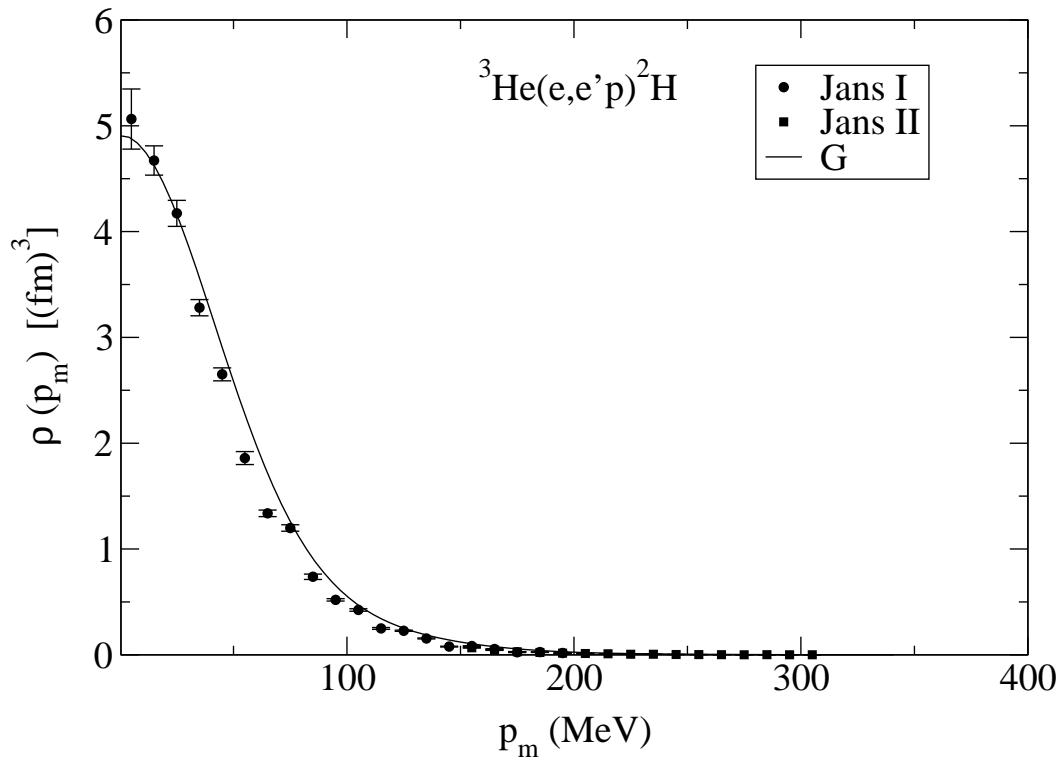


Figura 7.5: Distribución de momentos para la reacción ${}^3\text{He}(e,e'p){}^2\text{H}$. En la gráfica se muestran el cálculo referentes a la función de onda del ${}^3\text{He}$ calculada a partir del potencial nucleón-nucleón formado por gaussianas (G). Los datos experimentales son los de Jans *et al.* de la referencia [15]. Cinemática I: $\epsilon_i = 527.9$ MeV, $\theta_e = 52.2^\circ$, $|\vec{q}| \simeq 430$ MeV. Cinemática II: $\epsilon_i = 509.3$ MeV, $\theta_e = 36.0^\circ$, $|\vec{q}| \simeq 300$ MeV.

este caso utilizaremos también los datos de [15] cuya cinemática es (Cinemática II):

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= 509.3 \text{ MeV} \\ \theta_e &= 36.0^\circ \\ |\vec{q}| &\simeq 300 \text{ MeV}\end{aligned}$$

En la figura 7.4 representamos la distribución de momentos que obtenemos para cada una de las funciones de onda del helio, junto con los datos experimentales de [15]. De nuevo se observa que el acuerdo con el experimento es bastante bueno, y de nuevo el potencial formado por gaussianas es el que nos da un mejor resultado. Mostramos también el resultado para este potencial en escala no logarítmica en la figura 7.5.

7.4 Resumen final y conclusiones

Hemos calculado la sección eficaz del proceso ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ utilizando unas funciones de onda para el helio y el deuterón obtenidas a partir de potenciales nucleón-nucleón. Al conocer ambas funciones de onda, el factor espectroscópico no es ya un parámetro libre, el propio modelo permite calcular su valor y no es necesario ajustar los cálculos teóricos para la sección eficaz con los datos experimentales como en el caso de haber utilizado un modelo de campo medio; conseguimos así eliminar uno de los parámetros del cálculo.

A pesar de haber considerado aproximación de impulso y ondas planas tanto para el electrón como para el protón detectado, el acuerdo con los datos experimentales es bastante satisfactorio.

Hemos realizado los cálculos para cuatro funciones de onda distintas del ${}^3\text{He}$, obteniendo un mejor resultado con un potencial nucleón-nucleón sin interacción a tres cuerpos. Si nos fijamos en la tabla 5.1 vemos que este potencial (gaussianas) es el que da lugar a un mayor radio cuadrático medio, más próximo al valor experimental, exceptuando el Argonne v_{18} , pero éste da una energía de ligadura mucho menor que la experimental. Esto quiere decir que en un estudio de dispersión de electrones, como el que se lleva a cabo en este trabajo, la propiedad estática más relevante del núcleo blanco es su tamaño.

En un futuro se podría mejorar este cálculo incorporando el término de intercambio y considerando ondas distorsionadas para el electrón y para el protón detectado. Tal vez así consigamos un mejor ajuste para los datos a alto momento perdido.

Podemos concluir que el modelo que aquí se propone es adecuado para estudiar núcleos ligeros y da lugar a un buen ajuste con los datos experimentales.

Apéndice

Apéndice A

Coeficientes de acoplo de momento angular

A.1 Coeficientes de Clebsch-Gordan y símbolos- $3j$

Un tensor de determinado rango se puede, en general, expresar como producto de dos tensores utilizando los coeficientes de acoplo de momento angular:

$$(T_{j_1} \times U_{j_2})_{j_3 m_3} \equiv \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle T_{j_1 m_1} U_{j_2 m_2} \quad (\text{A.1})$$

donde el coeficiente de Clebsch-Gordan, $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle$, es no nulo siempre que $m_3 = m_1 + m_2$ y $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$.

Es frecuente representar los coeficientes de acoplo de dos tensores esféricos en términos de los símbolos- $3j$ de Wigner, que se relacionan con los coeficientes de Clebsch-Gordan mediante un simple factor:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 -m_3 \rangle \quad (\text{A.2})$$

En función de los símbolos- $3j$, la simetría en los argumentos de los coeficientes de acoplo se expresa:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Las relaciones de ortogonalidad entre los coeficientes son:

$$\sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \Delta(j_1 j_2 j_3) \frac{\delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3}}{2j_3 + 1} \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \Delta(j_1 j_2 j_3) \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m_3 \end{pmatrix} \\ & = \Delta(j_1 j_2 j_3) \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde:

$$\Delta(j_1 j_2 j_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } |j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

A.2 Coeficientes de Racah y símbolos-6j

Consideremos ahora el acoplo de tres tensores esféricos, como por ejemplo, tres momentos angulares j_1, j_2, j_3 para dar un momento resultante J [6]. Observamos primero que no hay una única forma de llevar a cabo este acoplo; podemos acoplar primero j_1 y j_2 para dar j_{12} , que a su vez acoplamos a j_3 para dar J , o, de un modo alternativo, acoplar j_1 al resultante, j_{23} , de acoplar j_2 y j_3 .

Estos dos caminos no son independientes. Si consideramos que los operadores de momento angular que queremos acoplar son R, S y T , tenemos:

$$\begin{aligned} & ((R_{j_1} \times S_{j_2})_{j_{12}} \times T_{j_3})_J = \sum_{j_{23}} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)} W(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23}) \\ & \times (R_{j_1} \times (S_{j_2} \times T_{j_3})_{j_{23}})_J \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde $W(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23})$ es el coeficiente de Racah. Éste se puede expresar como suma de productos de cuatro coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned} W(abcd; ef) &= \frac{1}{\sqrt{(2e + 1)(2f + 1)}} \sum_{\alpha \beta \gamma} \langle a \alpha b \beta | e (\alpha + \beta) \rangle \\ & \langle e (\alpha + \beta) d (\gamma - \alpha - \beta) | c \gamma \rangle \langle a \alpha f (\gamma - \alpha) | c \gamma \rangle \\ & \langle b \beta d (\gamma - \alpha - \beta) | f (\gamma - \alpha) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Una forma más usual de expresar estos coeficientes de Racah son los símbolos-6j, que se definen:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + J} W(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23}) \quad (\text{A.9})$$

Las relaciones de simetría para los coeficientes de Racah se pueden expresar en términos de los símbolos-6j de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ j_5 & j_6 & j_4 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.10})$$

La relación de ortogonalidad entre dos símbolos-6j viene dada por:

$$\sum_j (2j+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j'' \\ j_3 & j_4 & j \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_{j'j''}}{2j'+1} \quad (\text{A.11})$$

Una relación con los símbolos-3j es la siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} (-1)^{l_1+l_2+l_3+\mu_1+\mu_2+\mu_3} \\ \left(\begin{matrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & \mu_2 & -\mu_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -\mu_1 & m_2 & \mu_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ \mu_1 & -\mu_2 & m_3 \end{matrix} \right) & \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.3 Símbolos-9j

Si acoplamos cuatro tensores esféricos, de nuevo hay diferentes formas de hacer los acoplos intermedios, que se relacionan entre sí mediante los símbolos-9j:

$$\begin{aligned} ((R_{j_1} \times S_{j_2})_{j_{12}} \times (T_{j_3} \times U_{j_4})_{j_{34}})_J &= \sum_{j_{13} j_{24}} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)} \\ \sqrt{(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{matrix} \right\} & \\ ((R_{j_1} \times T_{j_3})_{j_{13}} \times (S_{j_2} \times U_{j_4})_{j_{24}})_J & \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

El valor de un símbolo-9j se puede expresar como la suma sobre el producto de tres símbolos-6j:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{matrix} \right\} &= \sum_{J'} (-1)^{2J'} (2J'+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ j_{24} & J & J' \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ j_3 & J' & j_{34} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_{12} & j_{34} & J \\ J' & j_1 & j_2 \end{matrix} \right\} & \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Las simetrías de los símbolos-9j son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ j_2 & j_5 & j_8 \\ j_3 & j_6 & j_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_7 & j_8 & j_9 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_7+j_8+j_9} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_6 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

y la relación de ortogonalidad es:

$$\begin{aligned} \sum_{j_{13}j_{24}} (2j_{13} + 1)(2j_{24} + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_{12} \\ j_3 & j_4 & j'_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{pmatrix} \\ = \frac{\delta_{j_{12}j'_{12}} \delta_{j_{34}j'_{34}}}{(2j_{12} + 1)(2j_{34} + 1)} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Una relación útil entre los símbolos-3j y el 9j es la siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ m_{13} & m_{24} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{pmatrix} &= \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4 m_{12} m_{34}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & m_{24} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & J \\ m_{12} & m_{34} & M \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

y un caso particular:

$$\begin{pmatrix} 0 & e & e \\ f & d & b \\ f & c & a \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{b+c+e+f}}{\sqrt{2e+1}\sqrt{2f+1}} \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

A.4 Teorema de Wigner-Eckart

El elemento de matriz de un operador de rango k entre estados con momento angular J y J' se puede separar en dos partes: una invariante bajo rotación del sistema de coordenadas y otra que expresa la dependencia del elemento de matriz en el sistema de coordenadas. Ya que sólo las proyecciones de tensores en el eje de cuantización cambian bajo una rotación de los ejes, la parte invariante del elemento de matriz es

independiente de las proyecciones y, como resultado, es función sólo de la naturaleza del operador y de los estados involucrados. Esto es:

$$\langle J M | T_{kq} | J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \langle J || T_k || J' \rangle \quad (\text{A.19})$$

donde el elemento de matriz con doble barra representa la parte invariante y se conoce como *elemento de matriz reducido*. La dependencia del elemento de matriz en el momento angular la contiene el símbolo-3j, y es independiente del operador y de los estados involucrados, aparte de los rangos de los momentos angulares. Todo el contenido físico del elemento de matriz está en el elemento de matriz reducido.

Apéndice B

Traslaciones

B.1 Caso general

Función escalar

Tenemos una función $f(x)$ que queremos expresar en función de una nueva coordenada, x' , relacionada con x mediante una traslación:

$$x' = x + \varepsilon \quad (\text{B.1})$$

En el nuevo sistema de coordenadas la nueva función es $f'(x')$ y verifica:

$$f'(x') = f(x) \Rightarrow f'(x) = f(x - \varepsilon) \quad (\text{B.2})$$

Trataremos de calcular $f(x - \varepsilon)$.

En mecánica cuántica el operador de traslación para un desplazamiento finito viene dado por [22]:

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = e^{-i \hat{p} \varepsilon} \quad (\text{B.3})$$

que en nuestro caso da lugar a:

$$f'(x) = e^{-i \hat{p} \varepsilon} f(x) \quad (\text{B.4})$$

Suponemos ahora que nuestra función f tiene un momento bien definido, como una onda plana, $f(x) = e^{ipx}$, en ese caso al actuar con el operador de traslación sobre la función llegamos a:

$$e^{i \hat{p} \varepsilon} f(x) = e^{i p(x - \varepsilon)} = f(x - \varepsilon) \Rightarrow f(x) = e^{i p \varepsilon} f(x - \varepsilon) \quad (\text{B.5})$$

Supongamos ahora un sistema de dos partículas en una dimensión. La onda plana que describe este estado es:

$$f(x_1, x_2) = e^{i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \quad (\text{B.6})$$

La generalización de la expresión (B.5) a este caso, es:

$$f(x_1, x_2) = e^{i(p_1+p_2)\varepsilon} f(x_1 - \varepsilon, x_2 - \varepsilon) \quad (\text{B.7})$$

$$f(x_1, x_2) = e^{i p_1 \varepsilon} f(x_1 - \varepsilon, x_2) \quad (\text{B.8})$$

$$f(x_1, x_2) = e^{i p_2 \varepsilon} f(x_1, x_2 - \varepsilon) \quad (\text{B.9})$$

Función vectorial

Supongamos ahora una función en tres dimensiones para A partículas, todas ellas con momento bien definido. En este caso será:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = e^{i \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}} f(\vec{r}_1 - \vec{\varepsilon}, \vec{r}_2 - \vec{\varepsilon}, \dots, \vec{r}_A - \vec{\varepsilon}) \quad (\text{B.10})$$

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = e^{i \vec{p}_A \cdot \vec{\varepsilon}} f(\vec{r}_1 - \vec{\varepsilon}, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A - \vec{\varepsilon}) \quad (\text{B.11})$$

con $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_A$.

B.2 Aplicación al proceso ${}^3\text{He}(e, e'p)d$

Función de onda del ${}^3\text{He}$

Tenemos una función de onda correspondiente a un sistema de tres cuerpos, como en el caso del ${}^3\text{He}$, en la cual queremos separar la parte de la misma que depende de las coordenadas intrínsecas del sistema (\vec{x} e \vec{y} de (2.14)). Para ello el primer paso es realizar una traslación con $\vec{\varepsilon} = \vec{R}_F$. Según (B.10) tenemos:

$$\Psi_{He}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = e^{i \vec{p}_3 \cdot \vec{R}_F} \Psi_{He}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{y}) \quad (\text{B.12})$$

A continuación tomamos $\vec{\varepsilon} = \vec{r}_2$ y realizamos la misma operación sobre las coordenadas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , llegando finalmente a:

$$\Psi_{He}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = e^{i \vec{p}_3 \cdot \vec{R}_F} e^{i (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot \vec{r}_2} \Psi_{He}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (\text{B.13})$$

y $\vec{P}_I = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ (ver figura 3.1).

Función de onda del deuterón

En este caso tenemos un sistema de dos cuerpos y nos interesa separar la parte de la función que depende sólo de la coordenada relativa entre las dos partículas:

$$\Psi_d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i \vec{P}_F \cdot \vec{r}_2} \Psi_d(\vec{x}, y) \quad (\text{B.14})$$

con $\vec{P}_F = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

Función de onda del protón

Por último, en el caso del protón consideraremos $\vec{\varepsilon} = \vec{R}_F$ para obtener así una parte de la función de onda que dependa sólo de la coordenada del protón, \vec{r}_3 , con respecto al centro de masas del deuterón:

$$\phi_p(\vec{r}_3) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{R}_F} \phi_p(\vec{y}) \quad (\text{B.15})$$

Apéndice C

Parte hadrónica. Aproximación de impulso

En el capítulo 6 veíamos que bajo aproximación de impulso, el operador corriente nuclear se puede expresar como suma de tres operadores corriente, referidos a cada uno de los nucleones que forman nuestro sistema. En términos de operadores de segunda cuantización, el operador corriente nuclear puede escribirse [11]:

$$\hat{J}^\mu = \sum_{ss'} \sum_{\tau} \int d^3p \int d^3p' \langle \vec{p}' s' \tau | \hat{j}^\mu | \vec{p} s \tau \rangle a_{\vec{p}' s' \tau}^+ a_{\vec{p} s \tau} \quad (\text{C.1})$$

donde se ha tenido en cuenta que el operador corriente a un cuerpo, \hat{j}^μ , es diagonal en el espacio de isospin. El operador $a_{\vec{p} s \tau}$ ($a_{\vec{p} s \tau}^+$) es el operador de aniquilación (creación) de un nucleón con momento \vec{p} , spin s e isospin τ , y $\{\vec{p} s \tau\}$ constituye una base completa de estados monoparticulares. Estos operadores satisfacen las relaciones de anticonmutación:

$$\{a_{\vec{p} s \tau}, a_{\vec{p}' s' \tau}^+\} = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'} \delta_{\tau\tau'} \quad (\text{C.2})$$

$$\{a_{\vec{p} s \tau}, a_{\vec{p}' s' \tau}\} = \{a_{\vec{p} s \tau}^+, a_{\vec{p}' s' \tau}^+\} = 0 \quad (\text{C.3})$$

Teniendo en cuenta (C.1), es sencillo comprobar que el elemento de matriz del operador corriente nuclear tiene la forma:

$$J^\mu(\vec{q}) = \sum_{s_B} \langle \vec{p} s | \hat{j}^\mu | \vec{p}_B s_B \rangle \langle \Psi_F | a_{\vec{p}_B s_B} | \Psi_I \rangle \quad (\text{C.4})$$

donde hemos eliminado el índice de isospin. En la ecuación anterior los nucleones emitido y ligado se describen a través de sus respectivos 3-momentos, \vec{p} y \vec{p}_B , así como por sus terceras componentes de spin, s y s_B . El primer elemento de matriz de esta ecuación es, básicamente, el elemento de matriz de la corriente nuclear calculado

entre los estados inicial y final del protón que sufre la interacción con el electrón, mientras que el segundo representa el solape de la función de onda del núcleo inicial con la función de onda del núcleo residual, lo que hemos llamado *función de onda de cuasipartícula*.

Bibliografía

- [1] M. Abramovitz e I. A. Stegun (eds). *Handbook of Mathematical functions*. Dover, 1970.
- [2] J. D. Bjorken y S. D. Drell. *Relativistic quantum mechanics*. McGraw-Hill, 1964.
- [3] S. Boffi *et al.* *Electromagnetic response of atomic nuclei*. Clarendon press Oxford, 1996.
- [4] Andrea Cobis. *Ph. D. Thesis*. Institute of Physics and Astronomy, University of Aarhus, 1997 (no publicada).
- [5] A. Cobis, D. V. Fedorov y A. S. Jensen. *J. Phys. G* **23** (1997) 401.
- [6] A. R. Edmonds. *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton University Press, 1960.
- [7] J. L. Friar, B. F. Gibson y G. L. Payne. *Phys. Rev. C* **37** (1988) 2869.
- [8] J. M. Eisenberg y W. Greiner. *Excitation mechanisms of the nucleus*. North-Holland, 1988.
- [9] T. de Forest. *Nucl. Phys. A* **392** (1983) 232.
- [10] T. de Forest y J. D. Walecka. *Adv. in Phys.* **15** (1966) 1.
- [11] Eduardo Garrido Bellido. *Tesis doctoral*. Universidad de Salamanca, 1993 (no publicada).
- [12] E. Garrido, D. V. Fedorov y A. S. Jensen. *Phys. Rev. C* **55** (1997) 1327.
- [13] F. Halzen, A. D. Martin. *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons, 1984.
- [14] C. Itzykson y J. B. Zuber. *Quantum field theory*. McGraw-Hill, 1985.
- [15] E. Jans *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 974.

- [16] E. Merzbacher. *Quantum mechanics*. John Willey & Sons, 1970, p.84.
- [17] E. Nielsen, D. V. Fedorov, A. S. Jensen y E. Garrido. *Phys. Rep.* **347** (2001) 373.
- [18] S. C. Pieper, V. R. Pandharipande, R. B. Wiringa y J. Carlson. *Phys. Rev. C* **64** (2001) 014001.
- [19] B. Povh, K. Rith, C. Scholz y F. Zetsche. *Particles and nuclei: an introduction to the physical concepts*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [20] M. A. Preston y R. K. Bhaduri. *Structure of the nucleus*. Addison-Wesley, 1975.
- [21] Roderick V. y Reid Jr. *Ann. Phys.* **50** (1968) 411.
- [22] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Benjamin Cummings, 1985.
- [23] D. Shiner, R. Dixon y V. Vedantham. *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3553.
- [24] José Manuel Udías Moinelo. *Tesis doctoral*. Universidad Autónoma de Madrid, 1993 (no publicada).
- [25] J. M. Udías, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, E. Garrido y J. A. Caballero. *Phys. Rev. C* **48** (1993) 2731.
- [26] J. M. Udías, J. A. Caballero, E. Moya de Guerra, J. E. Amaro y T. W. Donnelly. *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 5451.
- [27] J. M. Udías, J. A. Caballero, E. Moya de Guerra, J. R. Vignote y A. Escuderos. *Phys. Rev. C* **64** (2001) 024614.
- [28] J. M. Udías y J. R. Vignote. *Phys. Rev. C* **62** (2000) 034302.
- [29] R. B. Wiringa, R. A. Smith y T. L. Ainsworth. *Phys. Rev. C* **29** (1984) 1207.
- [30] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks y R. Schiavilla. *Phys. Rev. C* **51** (1995) 38.
- [31] S. S. M. Wong. *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons, 1998.