



ESTUDIO DE LAS FLUCTUACIONES ESPECTRALES EN SISTEMAS DE PARTÍCULAS SIN INTERACCIÓN

Memoria presentada por

Laura Muñoz Muñoz

para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados

Septiembre 2004

Director:

Joaquín Retamosa Granada

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	v
Índice de tablas	IX
1. Introducción	1
2. Caos cuántico	5
2.1. Caos en mecánica clásica	6
2.1.1. Integrabilidad	7
2.1.2. Características de la dinámica caótica	7
2.2. Caos en mecánica cuántica	8
2.2.1. Límite semiclásico	9
2.2.2. Parte fluctuante de la densidad de estados	10
2.3. Teoría de matrices aleatorias	13
2.3.1. Análisis espectrales	14
2.4. El reescalado	22
2.5. El ruido 1/f	26
3. Sistemas de N partículas sin interacción	31
3.1. Espectros de partícula independiente	34
3.1.1. Espectro GOE	34
3.1.2. Espectro GUE	35
3.1.3. Espectro Poisson	36
3.2. El espectro del sistema de N partículas	37
3.3. El reescalado	39
3.3.1. Cálculo de la densidad de estados del sistema	40
3.3.2. Parte suave de la densidad de estados del sistema	42

3.4. Estudio de las propiedades de las fluctuaciones del espectro del sistema	50
3.4.1. La distribución de espaciamentos a primeros vecinos	54
3.4.2. La rigidez espectral	61
3.4.3. El estadístico δ_n	67
3.5. Comparación con un sistema físico: el billar de Robnik	72
3.5.1. Estudio de las propiedades de las fluctuaciones del espectro del sistema	74
3.6. Justificación teórica	88
4. Conclusiones	95
A. Teoría de matrices aleatorias	99
A.1. Matrices aleatorias gaussianas	99
A.2. Distribuciones de autovalores	101
A.3. Densidad media de estados	101
A.4. Funciones de correlación a k puntos	102
B. Densidad de estados del sistema de N partículas	105
B.1. Cálculo de la densidad de estados	105
B.1.1. Caso $N = 3$	106
B.1.2. Caso $N = 4$	107
B.2. Parte suave de la densidad de estados	110
B.2.1. Caso $N = 2$	110
B.2.2. Caso $N = 3$	114
B.2.3. Caso $N = 4$	117

Índice de figuras

2.1.	Curvas teóricas para la distribución de espaciamientos a primeros vecinos de espectros tipo GOE, GUE, GSE y Poisson. . .	18
2.2.	Densidad acumulada de un espectro de tipo Poisson reescalado (azul), junto con una recta de pendiente 1 (roja): $\mu(\varepsilon) = \varepsilon$. . .	20
2.3.	Procedimiento de reescalado. La densidad acumulada, $m(E)$, se representa en azul y la parte suave de ésta, $\overline{m}(E)$, en rojo. A cada nivel E_i le corresponde un nivel reescalado $\varepsilon_i = \overline{m}(E)$. . .	25
3.1.	Configuraciones posibles de 2 partículas en un espectro de partícula independiente (izquierda) y espectro del sistema de 2 partículas (derecha).	38
3.2.	Parte suave de la densidad de estados del sistema de 2 partículas: aproximación (parte proveniente de la parte suave de $\rho(E)$) y curvas exactas para GOE, GUE y Poisson.	45
3.3.	Ajustes por polinomios de la densidad de estados, $g^{(3)}(E)$, y la densidad acumulada, $m^{(3)}(E)$, del espectro GOE-3.	52
3.4.	Desviación típica del ajuste de la densidad acumulada de los espectros GOE- N ($N = 2 - 5$) a polinomios de distintos grados.	53
3.5.	Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente tipo GOE.	55
3.6.	Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros GOE-2 (a) y GOE-3 (b).	56
3.7.	Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente tipo GUE.	57
3.8.	Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros GUE-2 (a) y GUE-3 (b).	58
3.9.	Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente tipo Poisson.	59

3.10. Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros Poisson-2 (a) y Poisson-3 (b).	60
3.11. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente tipo GOE.	61
3.12. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros GOE-2 (a) y GOE-3 (b).	63
3.13. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente tipo GUE.	64
3.14. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros GUE-2 (a) y GUE-3 (b).	65
3.15. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente tipo Poisson.	66
3.16. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros Poisson-2 (a) y Poisson-3 (b).	68
3.17. Espectro de potencias de los espectros GOE- N y el espectro de partícula independiente tipo GOE.	69
3.18. Espectro de potencias de los espectros GUE- N y el espectro de partícula independiente tipo GUE.	70
3.19. Espectro de potencias de los espectros Poisson- N y el espectro de partícula independiente tipo Poisson.	71
3.20. Forma del billar de Robnik para distintos valores del parámetro de deformación λ	73
3.21. Ajustes por polinomios de la densidad de estados, $g^{(3)}(E)$, y la densidad acumulada, $m^{(3)}(E)$, del espectro Robnik_0.45 – 3.	75
3.22. Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente Robnik_0.00.	76
3.23. Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros Robnik_0.00 – 2 (a) y Robnik_0.00 – 3 (b).	77
3.24. Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente Robnik_0.45.	78
3.25. Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros Robnik_0.45 – 2 (a) y Robnik_0.45 – 3 (b).	79
3.26. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente Robnik_0.00.	81
3.27. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros Robnik_0.00 – 2 (a) y Robnik_0.00 – 3 (b).	82
3.28. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente Robnik_0.45.	83
3.29. $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros Robnik_0.45 – 2 (a) y Robnik_0.45 – 3 (b).	84
3.30. Espectro de potencias de los espectros Robnik_0.00 – N y el espectro de partícula independiente Robnik_0.00.	86
3.31. Espectro de potencias de los espectros Robnik_0.45 – N y el espectro de partícula independiente Robnik_0.45.	87

3.32. Fracción del espacio de fases ocupado por el sistema en el punto máximo para los casos del billar bidimensional y tridimensional.	93
A.1. Densidad media de estados obtenida a partir de 100 matrices aleatorias tipo GOE de dimensión 1600 (azul) y curva teórica (rojo).	102

Índice de tablas

3.1. Número de partículas, N , número de niveles del espectro de partícula independiente, m , y dimensión del espectro del sistema, M , de los 15 casos estudiados.	51
3.2. Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas GOE- N	55
3.3. Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas GUE- N	57
3.4. Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas Poisson- N	59
3.5. Número de partículas, N , número de niveles del espectro de partícula independiente, m , y dimensión del espectro del sistema, M , de los 10 casos estudiados.	74
3.6. Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas Robnik_0.00 - N	78
3.7. Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas Robnik_0.45 - N	80

Capítulo 1

Introducción

El objeto de este trabajo es el estudio de los sistemas de partículas idénticas sin interacción en el contexto del *caos cuántico*.

El término *caos* surgió en mecánica clásica en la segunda mitad del s. XX para designar un nuevo tipo de dinámica compleja que presenta una serie de características concretas, tales como la separación exponencial de dos trayectorias inicialmente muy próximas o la pérdida de predecibilidad a largo plazo [1]. En contraposición al término *caótico* tenemos el término *integrable* para designar una dinámica más regular de características completamente distintas.

Con el nacimiento de la mecánica cuántica surgió la pregunta de si existiría algún tipo de dinámica que pudiese definirse como *caótica* en el contexto de la mecánica cuántica. Después de todo la mecánica clásica debe emerger como límite de la mecánica cuántica en la región semiclassical, es decir, a escalas grandes comparadas con la longitud de onda de De Broglie [2]. Así el término *caos cuántico* nos sugiere en principio el estudio de un cierto tipo de dinámica con una serie de características definidas en el contexto de la mecánica cuántica. Sin embargo, existen una serie de dificultades que no permiten definir el *caos* mediante propiedades intrínsecamente cuánticas. Por ejemplo, en mecánica cuántica se pierde por completo el concepto de trayectoria.

Por otro lado, sí cabe el estudio cuántico comparativo de sistemas que clásicamente son caóticos o integrables. Este estudio se llevó a cabo y se llegó a la conclusión de que los espectros cuánticos de energías de los sistemas clásicamente caóticos y los de los sistemas clásicamente integrables podían distinguirse en base al tipo de fluctuaciones espectrales [3, 4]. Es de-

cir, las fluctuaciones de los espectros de sistemas clásicamente integrables siguen la estadística de Poisson, según mostró el trabajo pionero en el campo de Berry y Tabor [3], mientras que las fluctuaciones de los espectros de sistemas clásicamente caóticos coinciden con las predichas por la teoría de matrices aleatorias, según conjeturaron Bohigas y sus colaboradores [4]. Por eso, el término *caos cuántico* nació para designar el estudio del comportamiento mecano-cuántico de los sistemas que clásicamente son caóticos. Esta definición dista mucho de la que en principio podríamos haber esperado, por eso, el término *caos cuántico* generó en su origen mucha controversia como nombre de esta nueva disciplina.

Sin embargo, a pesar de que la investigación no se dirigió principalmente por las vías que nuestra intuición en un principio nos podría indicar, el *caos cuántico* ha constituido un campo de investigación muy activo en el que se han hecho importantes progresos en las dos últimas décadas. Tanto es así, que hoy disponemos de una serie de herramientas que nos permiten estudiar las fluctuaciones de los espectros cuánticos de energía de sistemas que no tienen un análogo clásico claro, como son los que nos ocupan en este trabajo. Según el tipo de fluctuaciones que presente el sistema podremos incluirlo en uno de los dos tipos de sistemas cuánticos cuya distinción se ha podido establecer gracias al estudio comparativo de los sistemas clásicamente caóticos frente a los clásicamente integrables: sistemas cuyas fluctuaciones espectrales siguen la estadística de Poisson o sistemas cuyas fluctuaciones espectrales coinciden con las predichas por la teoría de matrices aleatorias.

Los sistemas que son objeto de estudio en este trabajo están compuestos por varias partículas idénticas que no interaccionan entre sí. Debido al carácter bosónico o fermiónico de las mismas el sistema no tiene un análogo clásico claro. Pero a pesar de que la definición de *caos cuántico* sugiere lo contrario podemos llevar a cabo un estudio de este tipo de sistemas en el contexto de esta disciplina. Simplemente hay que utilizar las herramientas desarrolladas para el estudio de la estadística de las fluctuaciones que, según hemos señalado, tienen como único requisito imprescindible disponer de un espectro de energías.

El estudio se centrará concretamente en la relación entre las propiedades de las fluctuaciones del espectro de partícula independiente y las del correspondiente espectro del sistema de N partículas. El hamiltoniano de este tipo

de sistemas puede escribirse como

$$H = \sum_{q=1}^N h_q, \quad (1.1)$$

donde h_q es el hamiltoniano individual de una partícula y N es el número de partículas. Es decir, no hay términos de interacción. Por tanto, lo que tenemos es un espectro individual de cada partícula (espectro de partícula independiente) y el espectro del sistema en el que la energía total viene dada por la suma de las energías de todas las partículas:

$$E = \sum_{q=1}^N e_q, \quad (1.2)$$

donde e_q es la energía que tiene la partícula q por estar en un determinado nivel del espectro de partícula independiente.

Lo que se pretende es considerar distintos tipos de espectros de partícula independiente (caóticos e integrables) para ver si el espectro del correspondiente sistema de N partículas presenta las mismas propiedades en su estadística de fluctuaciones o por el contrario éstas se pierden.

Hasta ahora el estudio de sistemas de partículas idénticas en el contexto del caos cuántico se ha centrado en sistemas con interacción o bien en la transición de un hamiltoniano sin interacción (que se ha considerado siempre regular) al hamiltoniano completo con interacción. Es decir, que toda la atención se ha enfocado hacia sistemas con interacción, considerando siempre que el sistema antes de introducir la interacción presenta un comportamiento regular, integrable. Por eso nosotros nos hemos centrado en sistemas sin interacción y nos hemos preguntado qué ocurriría en el caso de que el espectro de partícula independiente puede elegirse entre diversos tipos, qué ocurriría con el espectro del sistema, qué propiedades presentarían sus fluctuaciones y si éstas tendrían que ver o no con las del espectro de partícula independiente a partir del cual se ha generado.

En el siguiente capítulo se presenta una introducción a la disciplina del caos cuántico y se describen las herramientas desarrolladas en este campo para el estudio de las propiedades de las fluctuaciones de los espectros cuánticos de energía. Estas herramientas se aplican a los sistemas de N partículas idénticas sin interacción, que se describen en el capítulo 3. En el capítulo 4 se exponen las conclusiones del análisis. Los detalles sobre la teoría de matrices aleatorias se recogen en el apéndice A y la mayor parte de los cálculos

de la densidad de estados del sistema de N partículas, que se describe en el capítulo 3, se recogen en el apéndice B con el fin de aligerar el contenido de esa parte.

Capítulo 2

Caos cuántico

Las características propias del movimiento caótico tienen definiciones consistentes en el contexto de la mecánica clásica. En cambio, no puede hablarse de dinámica caótica en el contexto de la mecánica cuántica. Por tanto, la primera pregunta que podríamos hacernos es si tiene sentido hablar de caos cuántico, si existe tal disciplina y en ese caso cuál sería su definición. La respuesta es que, por paradójico que parezca, tal disciplina existe, lleva investigándose casi 30 años y, sin embargo, aún no existe una definición precisa de la misma.

Los conceptos, definiciones y criterios originalmente desarrollados en mecánica clásica no son fácilmente trasladables a la mecánica cuántica. Para empezar la existencia del caos clásico es debida al carácter no lineal de las ecuaciones de la dinámica newtoniana. La ecuación de Schrödinger, en cambio, es lineal.

Por otro lado, en mecánica cuántica tienen cabida los sistemas clásicamente integrables, como el átomo de hidrógeno, pero también los clásicamente no integrables, como el átomo de helio. Además, el principio de correspondencia establece que en la región semiclásica, es decir, a escalas grandes comparadas con la longitud de onda de De Broglie, la mecánica clásica debe emerger como límite de la mecánica cuántica. Por lo tanto, parece razonable que se trate de indagar en el contexto de la mecánica cuántica sobre las posibles características y criterios que permitan distinguir un comportamiento análogo a lo que es el caos en mecánica clásica, es decir, sobre el origen mecano-cuántico, si es que existe, de la distinción entre sistemas caóticos e integrables en el límite clásico. A continuación entraremos un poco más en detalle en estas cuestiones y después pasaremos a describir las herramientas de que dispone-

mos y que utilizaremos en este trabajo para analizar las señales del caos en el comportamiento de los sistemas cuánticos.

2.1. Caos en mecánica clásica

Las leyes de la mecánica clásica son deterministas, esto es, conocidas sus condiciones iniciales con exactitud el movimiento de una partícula puede predecirse para cualquier instante de tiempo. Este punto de vista determinista predominó en la Física desde el s.XVII, en que Newton estableció sus leyes, hasta finales del s.XIX.

Con el nacimiento de la mecánica estadística se comenzó a utilizar una descripción probabilística de los sistemas complejos con muchos grados de libertad. Se vio que esta era la única manera posible de describir este tipo de sistemas: utilizando unas pocas variables significativas, que dan cuenta del comportamiento “en media” de todos sus componentes, dado que el estudio del movimiento exacto de cada partícula era un problema inabordable. Sin embargo, este nuevo tipo de descripción se vio sólo como una nueva técnica útil que solucionaba el problema del manejo de muchos grados de libertad, es decir, no se trataba de un problema de principio: las leyes de Newton describían correctamente el movimiento individual de cada partícula aunque las herramientas de cálculo desarrolladas hasta entonces no permitieran en la práctica tal descripción, que, de hecho, tampoco permiten las herramientas actuales.

A principios del s.XX surgió la mecánica cuántica en el intento de explicar el movimiento de las partículas microscópicas, que no tenía cabida bajo las leyes de la mecánica clásica. Y se reveló como una teoría más completa, capaz de describir el movimiento tanto en el mundo macroscópico como en el microscópico. Al tratarse de una teoría intrínsecamente probabilística no dejaba ya lugar para el mecanicismo.

Finalmente, durante la segunda mitad del s.XX, surgió en el seno de la propia mecánica newtoniana una nueva barrera para la idea del mecanicismo: se comprobó que no sólo los sistemas con muchos grados de libertad sino también sistemas muy sencillos podían mostrar una dinámica muy compleja con unas características que impedían cualquier predicción a largo plazo. Esta complejidad aparece debido al carácter no lineal de las ecuaciones de la dinámica newtoniana y a pesar de su carácter determinista. Por eso recibe el nombre de *caos determinista*.

2.1.1. Integrabilidad

En mecánica clásica puede hablarse de dos tipos de sistemas: los sistemas integrables, que presentan un comportamiento sencillo y predecible, frente a los sistemas caóticos, que presentan un comportamiento muy complejo. Se dice que un sistema hamiltoniano con N grados de libertad es integrable cuando existen N constantes del movimiento independientes; en tal caso el teorema de integrabilidad de Liouville garantiza que las ecuaciones del movimiento son resolubles por cuadraturas. Además, la trayectoria del sistema está confinada en un toro N -dimensional en el espacio de fases $2N$ -dimensional y el movimiento es equivalente a N movimientos periódicos en una dimensión cada uno con su propia frecuencia, se dice que es multiperódico.

Una pequeña perturbación en un hamiltoniano integrable conlleva la pérdida de la integrabilidad. El teorema KAM describe cómo es la transición de la integrabilidad al caos en función de la intensidad de la perturbación, cómo van deformándose y desapareciendo los toros invariantes dando lugar a un sistema en el que las trayectorias no están confinadas en toros sino que recorren todo el espacio de fases [5].

2.1.2. Características de la dinámica caótica

Que no seamos capaces de encontrar las N constantes del movimiento que garantizan la integrabilidad de un sistema no implica que éstas no existan, de hecho, generalmente son difíciles de encontrar. Por tanto, es conveniente conocer otros aspectos característicos del caos que nos permitan identificarlo más fácilmente. La más conocida de estas características es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales producida por la separación exponencial de las trayectorias en el espacio de fases. El parámetro que mide este efecto de forma cuantitativa es el exponente de Lyapunov, definido como sigue [1]:

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{d(\mathbf{x}_0, t)}{d(\mathbf{x}_0, 0)}, \quad (2.1)$$

donde $d(\mathbf{x}_0, t)$ es la separación, en el instante t , entre dos trayectorias con condiciones iniciales en un entorno de \mathbf{x}_0 .

Otra característica, ligada a la anterior, es la pérdida de predecibilidad. La pérdida de información que experimenta un sistema por unidad de tiempo queda cuantificada en la llamada entropía de Kolmogorov K [6], que sirve además para estimar el tiempo máximo hasta el que es posible predecir el movimiento de un sistema caótico.

El caos clásico puede encontrarse también en el espectro de Fourier. Según hemos comentado, el movimiento de un sistema integrable es multiperiódico y por tanto su espectro de frecuencias presenta picos centrados en las frecuencias características del sistema. El movimiento caótico, por el contrario, no presenta ningún tipo de regularidad, es aperiódico y por tanto su espectro de frecuencias no presenta picos, es continuo.

2.2. Caos en mecánica cuántica

Podemos intentar definir el caos en mecánica cuántica de la misma manera que se hace en mecánica clásica: en base al concepto de integrabilidad. A pesar de que los conceptos clásicos pueden trasladarse a la mecánica cuántica la definición que resulta no es en absoluto consistente, llevando a conclusiones como que el análogo cuántico de un sistema clásicamente integrable es caótico o viceversa [7].

Podemos intentar definirlo entonces en base a alguna de sus características, como la sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero aquí surgen problemas de concepto: la separación exponencial de las trayectorias con condiciones iniciales próximas no tiene sentido en mecánica cuántica, ya que ni lo tiene el propio concepto de trayectoria ni pueden determinarse las condiciones iniciales con exactitud debido al principio de incertidumbre. En este punto podríamos optar por cambiar la separación de las trayectorias por separación de las funciones de onda. Sin embargo, esto tampoco nos lleva a un resultado satisfactorio: la unitariedad del operador de evolución temporal implica que el grado de solapamiento de dos funciones de onda del sistema permanece constante en el tiempo:

$$\langle \Psi(t_0) | \Phi(t_0) \rangle = \langle \Psi(t) | \Phi(t) \rangle, \quad \forall t. \quad (2.2)$$

Una tercera posibilidad consiste en estudiar pequeñas perturbaciones en el hamiltoniano, en lugar de en las condiciones iniciales [8]. Pero esta opción no ha resultado tampoco por el momento en una definición consistente, aunque la investigación en esta línea continúa abierta.

Podemos concluir entonces que no parece posible encontrar una definición satisfactoria del caos en mecánica cuántica en base a la analogía con la mecánica clásica. Sin embargo, como comentamos anteriormente, el caos debería manifestarse de alguna manera en la mecánica cuántica, ya que la mecánica clásica debe emerger como límite de la mecánica cuántica en la re-

gión semiclásica. Pasamos a continuación entonces a describir brevemente el estudio del límite semiclásico y veremos qué conclusiones se pueden extraer.

2.2.1. Límite semiclásico

A la hora de comparar resultados clásicos y cuánticos hay dos posibles puntos de vista: el límite de la mecánica cuántica para escalas grandes y la cuantización de sistemas clásicos. El primero cronológicamente fue lógicamente este último, es lo que se llama la *mecánica cuántica antigua*. A partir de sistemas clásicos integrables se consiguió obtener unas reglas de cuantización (reglas de Sommerfeld-Wilson-Ishiwara (SWI) [9]), que permitían decidir cuáles energías de todo el continuo clásico eran cuánticamente posibles, dando lugar a un espectro cuántico discreto de energía. Posteriormente, tras el desarrollo de la mecánica cuántica, una vez conocida la ecuación de Schrödinger, se llegó a estas mismas reglas de cuantización SWI pero por el otro camino mencionado: buscando el límite de la ecuación de Schrödinger para escalas grandes. El cálculo semiclásico que conduce a este resultado es la aproximación WKB (Wentzel, Kramer, Brillouin [10]).

Para sistemas no integrables, sin embargo, no es posible esta cuantización. Ya en 1917 Einstein [11] advirtió que la cuantización SWI no tenía sentido en sistemas no integrables. Y la aproximación WKB presenta las mismas dificultades. Este problema lo resolvió Gutzwiller [12] mediante el cálculo semiclásico de su fórmula para un observable puramente cuántico, como es la densidad de estados, a partir de magnitudes puramente clásicas, como son las órbitas periódicas del sistema análogo clásico. La densidad de estados se define para un espectro discreto de energía $\{E_i\}$ como

$$g(E) = \sum_i \delta(E - E_i), \quad (2.3)$$

siendo $g(E)dE$ el número de estados en el intervalo de energía comprendido entre E y $E + dE$.

La fórmula de Gutzwiller para la densidad de estados, válida tanto para sistemas integrables como para sistemas caóticos, es la siguiente:

$$g(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \cos\left(\frac{1}{\hbar} S_r(E) - \frac{\mu_r \pi}{2}\right), \quad (2.4)$$

donde la suma se extiende a todas las órbitas periódicas clásicas del sistema, incluyendo las de longitud nula, las amplitudes A_r dependen del periodo y de

la estabilidad de la órbita frente a pequeñas perturbaciones, S_r es la acción clásica y μ_r es el llamado índice de Maslov, que viene dado por diversas contribuciones que dependen de ciertas propiedades de las órbitas, por ejemplo, en los billares una de las contribuciones tiene que ver con las reflexiones en las paredes: por cada reflexión μ_r aumenta en 2 unidades para condiciones de contorno tipo Dirichlet y no cambia para condiciones de contorno tipo Neumann.

Entre las órbitas que contribuyen a la suma, aquellas que tienen longitud nula dan una contribución particular a la densidad de estados; realizando el correspondiente cálculo se obtiene

$$g_0(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int dpdq \delta[E - H(p, q)], \quad (2.5)$$

que corresponde a la porción del espacio de fases accesible para una partícula clásica con energía E y se la llama *parte suave* de la densidad de estados, ya que presenta un comportamiento que varía suavemente con la energía. La parte que forman el resto de contribuciones de las órbitas de longitud no nula presenta un comportamiento oscilatorio y recibe el nombre de *parte fluctuante* de la densidad de estados. Por tanto, la densidad de estados $g(E)$ de un sistema cuántico puede separarse en una parte suave, $\bar{g}(E) = g_0(E)$, que daría un comportamiento medio propio del sistema clásico, y una parte fluctuante, $\tilde{g}(E)$, que sería propia exclusivamente del sistema cuántico:

$$g(E) = \bar{g}(E) + \tilde{g}(E). \quad (2.6)$$

De hecho, veremos a continuación que serán precisamente las fluctuaciones, concretamente sus propiedades estadísticas, las que nos servirán para dar una definición del caos en mecánica cuántica.

2.2.2. Parte fluctuante de la densidad de estados

La fórmula de Gutzwiller presenta en la práctica serios problemas de divergencia, haciendo muy difícil la tarea de calcular un espectro cuántico a partir de la suma en órbitas periódicas. Esto es debido a la proliferación del número de órbitas periódicas con la longitud, que es de tipo polinomial en sistemas integrables y exponencial en sistemas caóticos [12].

Esta proliferación en el número de órbitas, por otro lado, nos permite establecer que en el límite de órbitas periódicas largas (a partir de una cierta longitud) las propiedades del sistema individual ya no son relevantes y hay

que aplicar métodos estadísticos. Entonces será la parte fluctuante de la densidad de estados (que es la que proviene, según la fórmula de Gutzwiller, de contribuciones de órbitas de longitud no nula) la que será susceptible de un estudio estadístico. Mediante este estudio se ha llegado a los dos resultados más importantes en caos cuántico [3, 4], que establecen que *la parte fluctuante de la densidad de estados es universal*: una vez fijadas las simetrías espacio-temporales del problema, depende únicamente de si el sistema clásico es integrable o caótico pero no de las propiedades individuales del mismo.

En 1973 Percival [13] ya conjeturó que existen dos tipos de espectro de energías para un sistema con más de un grado de libertad: uno regular cuando el sistema análogo clásico es caótico y otro irregular cuando es integrable. La principal diferencia entre ambos tipos de espectro es la correlación entre los niveles. Si el sistema clásico es integrable los niveles no están correlacionados, de manera que pueden aparecer degeneraciones en el espectro. Esto implica que si se estudia la *dinámica de niveles* del sistema, es decir, si se introduce un parámetro variable en el hamiltoniano y se estudia cómo va cambiando el espectro al variar el parámetro, se observa que los niveles evolucionan de una manera tal que pueden darse cruces entre ellos. En cambio si el sistema clásico es caótico aparece correlación entre los niveles y al estudiar su dinámica no se dan cruces entre ellos; en su lugar, aparecen los llamados *cruces evitados*: los niveles pueden aproximarse mucho pero siempre acaban volviéndose a separar, por eso se dice que estos sistemas presentan *repulsión entre niveles*.

Después, en 1977, Berry [3] estudió mediante la aproximación semiclásica sistemas clásicamente integrables con el fin de demostrar o falsar la conjetura de Percival. Y consiguió demostrar que las correlaciones en estos sistemas son de tipo Poisson, es decir, que los niveles están efectivamente descorrelacionados. A pesar de realizarse en el límite semiclásico este resultado se ha mostrado, numéricamente, igualmente aplicable en sistemas puramente cuánticos.

El resultado análogo para sistemas caóticos se debe a Bohigas, Giannoni y Schmidt [4], que en 1984 conjeturaron que las correlaciones en este tipo de sistemas coincidían con las predichas por la *teoría de matrices aleatorias*. En los años siguientes se han ido obteniendo muchos resultados experimentales y numéricos que corroboran esta conjetura, pero aún no ha sido demostrada con rigor.

Es importante hacer notar en este punto que estamos dando ya implícitamente una definición de caos cuántico: ya que, según hemos visto, no podemos caracterizar el caos desde un principio con propiedades intrínsecamente

cuánticas, lo que sí podemos hacer es estudiar cuánticamente sistemas cuyo análogo clásico conocemos y tratar de encontrar rasgos cuánticos que diferencien los sistemas en función de si su análogo clásico es integrable o caótico. Es decir, llamamos caos cuántico al estudio cuántico de los sistemas clásicamente caóticos; esta es la definición más utilizada en la actualidad.

Una vez establecidos los rasgos del caos cuántico de esta manera, podrían servirnos para caracterizar el caos en sistemas cuánticos que no tienen un análogo clásico claro, como son los sistemas de varias partículas idénticas, que nos ocupan en este trabajo. En este tipo de sistemas, debido al carácter bosónico o fermiónico de las partículas, no existe un límite clásico bien definido. De aquí la importancia de encontrar características del caos puramente cuánticas, que permitan distinguirlo sin necesidad de recurrir al límite clásico.

El estudio de las propiedades estadísticas de las fluctuaciones del espectro cuántico incluye correlaciones de corto y de largo alcance (correlaciones entre niveles de energía próximos o alejados, respectivamente). De la fórmula de Gutzwiller se puede deducir que las órbitas largas determinan el comportamiento de las correlaciones de corto alcance, mientras que las cortas determinan el de las correlaciones de largo alcance. Por ejemplo, en el caso de los billares la acción S_r para una órbita de longitud l_r es $S_r = \hbar k l_r$, donde el número de ondas k se relaciona con la energía mediante $E = \hbar^2 k^2 / 2m$. Introduciendo esta expresión de la acción en la fórmula de Gutzwiller (2.4), vemos que cada órbita de longitud l_r aporta una contribución oscilatoria de periodo $\Delta k = 2\pi/l_r$. Entonces las órbitas de longitud grande son responsables de las correlaciones de la energía ($k = k(E)$) de corto alcance y las órbitas de longitud pequeña son responsables de las correlaciones de largo alcance.

Por tanto, si, según hemos señalado, se puede esperar universalidad sólo a partir de una cierta longitud o un cierto periodo mínimo T , esto implica una restricción para las correlaciones de largo alcance: éstas serán universales sólo para ventanas de energía $\Delta E < \hbar/T$. En la práctica este periodo T no tiene en realidad una definición exacta y se suele tomar el valor del periodo de la órbita más corta, T_{min} , de manera que lo que se puede asegurar es que no hay universalidad para ventanas $\Delta E > \hbar/T_{min}$.

2.3. Teoría de matrices aleatorias

La teoría de matrices aleatorias fue desarrollada en los años 50 y 60 por Wigner, Dyson, Mehta y otros con el objetivo de sistematizar el estudio de los espectros de los núcleos complejos. Pero el interés en esta teoría se renovó enormemente cuando Bohigas, Giannoni y Schmidt [4] conjeturaron que debía ser aplicable a todos los sistemas caóticos.

La idea inicial fue, dado el desconocimiento de los detalles de la interacción nuclear, prescindir de los mismos y realizar una descripción estadística. Es decir, renunciar al estudio en detalle de un núcleo concreto y tratar de encontrar propiedades que caractericen el conjunto de espectros nucleares en general. Para llevar esto a cabo el punto de partida de la teoría de matrices aleatorias consiste en reemplazar el hamiltoniano del sistema por una colectividad de matrices aleatorias con las mismas propiedades de simetría. El problema es similar al de la descripción de los sistemas complejos con muchos grados de libertad que dio lugar al nacimiento de la mecánica estadística. La diferencia es que en mecánica estadística se consideran colectividades de sistemas para un solo hamiltoniano, que es conocido, y en este caso consideramos colectividades de hamiltonianos para un sistema.

Se consideran principalmente tres tipos de hamiltonianos o clases de universalidad, que dan lugar a la definición de otras tantas colectividades:

- Los hamiltonianos sin simetría bajo inversión temporal pueden ser representados por matrices hermíticas, que son invariantes bajo transformaciones unitarias. Forman la colectividad GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*).
- Los hamiltonianos con simetría bajo inversión temporal y simetría bajo rotaciones pueden ser representados por matrices reales y simétricas, que son invariantes bajo transformaciones ortogonales. Estas matrices pueden representar también hamiltonianos con simetría bajo inversión temporal y sin simetría bajo rotaciones, siempre que el espín sea entero. Forman la colectividad GOE (*Gaussian Orthogonal Ensemble*).
- Los hamiltonianos con simetría bajo inversión temporal, sin simetría bajo rotaciones y espín semientero pueden ser representados por matrices cuaterniónicas reales, que son invariantes bajo transformaciones simplécticas. Forman la colectividad GSE (*Gaussian Symplectic Ensemble*).

En el apéndice A se describe la forma que tienen las matrices de cada una de las colectividades, así como la distribución de probabilidad de sus autovalores y la densidad media de estados a que da lugar cada una de ellas.

2.3.1. Análisis espectrales

Con el objetivo de analizar las fluctuaciones de los distintos tipos de espectros, tanto de matrices aleatorias como cualesquiera otros obtenidos experimental o numéricamente, se definen los estadísticos espectrales. Según la definición de Mehta [14], un estadístico espectral es un número W tal que pueda calcularse directamente a partir del espectro de niveles y cuya media $\langle W \rangle$ y varianza $V_W = \langle (W - \langle W \rangle)^2 \rangle$ sean conocidas mediante un modelo teórico.

El primer paso, previo a cualquier tipo de análisis estadístico, es la separación de la parte suave y la parte fluctuante de la densidad de estados, ya que, según señalamos en 2.2.2, es esta última la que realmente nos interesa. Es la que va a presentar un comportamiento universal propio del sistema cuántico, según vimos. El algoritmo que nos permite esta separación se denomina *reescalado*¹ y será descrito en detalle en la siguiente sección. A partir de ahora supondremos que el reescalado ha sido ya efectuado satisfactoriamente y que, por tanto, estaremos analizando correctamente las fluctuaciones espectrales.

Hasta ahora hemos utilizado E para referirnos a la energía. A partir de ahora utilizaremos ε para referirnos a la energía en espectros reescalados y seguiremos utilizando E para espectros sin reescalar. De la misma manera, utilizaremos la letra ρ para referirnos a la densidad de estados de los espectros reescalados en lugar de g , que hemos utilizado hasta ahora para los espectros sin reescalar.

Los dos estadísticos más utilizados en el estudio del caos cuántico, que serán los utilizados en este trabajo, son la distribución de espaciamientos a primeros vecinos $P(s)$ y la rigidez espectral Δ_3 . El primero mide correlaciones de corto alcance y el segundo, correlaciones de largo alcance.

Distribución de espaciamientos a primeros vecinos

Dada una secuencia de niveles $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\dots,m}$, ordenada en orden creciente de energía, los espaciamientos a primeros vecinos se definen como

$$s_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m - 1. \quad (2.7)$$

¹Traducción libre del inglés *unfolding*

Nótese que los espaciamentos son siempre positivos, al estar la secuencia de niveles ordenada ($i < j \Rightarrow \varepsilon_i \leq \varepsilon_j$).

La distribución de probabilidad de estos espaciamentos es un estadístico que nos sirve para caracterizar la repulsión de niveles: si en un espectro de energía existe repulsión de niveles la probabilidad de que existan espaciamentos nulos (o lo que es lo mismo, la probabilidad de que dos niveles de energía tengan el mismo valor) es cero; en cambio, si no existe repulsión los niveles están descorrelacionados y la probabilidad de que dos de ellos tengan el mismo valor no es cero, es decir, hay una cierta probabilidad de que existan espaciamentos nulos.

Este es el estadístico que utilizó Berry [3] para demostrar que en los sistemas integrables los niveles están descorrelacionados. Consiguió demostrar que la distribución de espaciamentos a primeros vecinos en este tipo de sistemas seguía una ley de tipo Poisson:

$$P(s) = e^{-s}, \quad (2.8)$$

que es la distribución a que da lugar una secuencia de variables aleatorias independientes. En ella se observa que efectivamente $P(0) \neq 0$.

La $P(s)$ correspondiente a las colectividades gaussianas puede calcularse a partir de las distribuciones de autovalores correspondientes, pero dicho cálculo es muy complicado. En lugar de considerar matrices de dimensión arbitraria Wigner lo realizó para matrices de dimensión 2 y obtuvo las expresiones siguientes [15]:

$$P(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), & \text{GOE} \\ \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right), & \text{GUE} \\ \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right), & \text{GSE} \end{cases} \quad (2.9)$$

que resultan ser muy buenas aproximaciones para matrices de dimensión arbitraria. En ellas observamos que sí existe repulsión ($P(0) = 0$).

Estas son las distribuciones de espaciamentos a primeros vecinos propias de los sistemas caóticos, según la conjetura de Bohigas, Giannoni y Schmidt [4] o conjetura BGS. En principio la conjetura fue formulada sólo para el GOE, es decir, para los sistemas caóticos con las simetrías propias de esta colectividad (hamiltonianos con simetría bajo inversión temporal y simetría

bajo rotaciones o sin simetría bajo rotaciones pero con espín entero), que son los que Bohigas y sus colaboradores estudiaron. Analizaron espectros experimentales de una gran cantidad de núcleos atómicos distintos [17, 18] y encontraron que la distribución de espaciamientos a primeros vecinos podía ser perfectamente descrita por la curva de Wigner para el GOE. Conocían un estudio análogo con niveles atómicos [19], cuyo resultado era el mismo: acuerdo entre la predicción del GOE y el experimento. Y por último, analizaron el espectro de un billar de Sinaí [4] y obtuvieron de nuevo una distribución de Wigner para los espaciamientos.

A la vista de todos estos resultados formularon su conjetura. Pero antes de escribirla tal como fue formulada en [4] es necesario introducir primero unos conceptos sobre jerarquía del caos.

No todos los sistemas caóticos lo son en el mismo grado. Se ha desarrollado una detallada jerarquía de posibles comportamientos de los sistemas caóticos. Existen tres clases básicas de sistemas. A continuación explicaremos brevemente sus diferencias sin entrar en definiciones rigurosas que requerirían la introducción de conceptos matemáticos demasiado complicados para lo que nos interesa aclarar en esta sección. En orden creciente del grado de caoticidad, los tres tipos de sistemas son los siguientes:

- (a) Sistemas ergódicos. Un sistema es ergódico si el promedio espacial de las variables que lo caracterizan es igual a su promedio temporal. La ergodicidad implica que el espacio de fases accesible no puede dividirse en subconjuntos invariantes bajo la acción del sistema (*hipótesis ergódica*). En los sistemas ergódicos todas las órbitas (excepto las estables, si las hay) llenan uniformemente el espacio de fases, no hay toros invariantes y pueden existir órbitas periódicas estables (pequeñas perturbaciones no provocan una separación exponencial de la órbita inicial).
- (b) Sistemas *mixing*. Un sistema es *mixing* si cada subconjunto del espacio de fases se dispersa de forma homogénea bajo la acción del sistema. La propiedad matemática de *mixing* implica que las trayectorias que se separan se vuelven a encontrar una y otra vez. Las trayectorias cercanas se separan localmente pero la dinámica está confinada globalmente en una región finita del espacio de fases y, necesariamente, las trayectorias se aproximan unas a otras arbitrariamente cerca infinitas veces.
- (c) Sistemas K . Los sistemas K se caracterizan por que su entropía de Kolmogorov es positiva. No existen órbitas estables, cualquier par de órbitas próximas se separan exponencialmente.

Todos los sistemas K son *mixing* y ergódicos. Y todos los sistemas *mixing* son ergódicos.

La conjetura BGS es la siguiente: *Las fluctuaciones de los espectros de sistemas con simetría bajo inversión temporal cuyos análogos clásicos son sistemas K presentan las mismas propiedades que las predichas por el GOE.* Posteriormente se han encontrado multitud de resultados experimentales que la corroboran en sistemas tan distintos como un átomo de hidrógeno en un campo magnético intenso [20], el espectro de excitación de una molécula de NO_2 [21], el espectro de microondas de una cavidad caótica tridimensional [22] o el espectro de vibración de una placa con forma de estadio [23]. A pesar de que en un principio fue formulada para sistemas K , multitud de resultados posteriores mostraron que era igualmente válida para sistemas ergódicos en general. Por tanto, hoy se acepta que un sistema cuántico es caótico cuando su análogo clásico es ergódico ².

Ahora la pregunta es si la conjetura BGS es válida también para las otras dos clases de universalidad. Es decir, si en sistemas caóticos que presenten las simetrías propias de las colectividades GUE o GSE las propiedades de las fluctuaciones de sus espectros coincidirán con las predichas para la colectividad correspondiente. Pues bien, según los resultados numéricos hay pocas dudas de que es así. Un ejemplo muy ilustrativo puede encontrarse en [24]. En el terreno experimental la situación es menos favorable: Por el momento no existen ejemplos para el caso del GSE y sólo dos, ambos con billares de microondas [25, 26], para el del GUE. En ellos el excelente acuerdo con las curvas teóricas corrobora la validez de la conjetura BGS para el caso del GUE.

De cualquier manera queda claro que es mucho más fácil encontrar situaciones experimentales de sistemas caóticos con las simetrías propias del GOE que de las otras dos clases de universalidad, lo que hace del GOE la colectividad más popular de las tres.

En la figura 2.1 se representan las curvas de las distribuciones de espaciamientos de las tres colectividades gaussianas, GOE, GUE y GSE, y la correspondiente a la ley de Poisson. En ella podemos observar cómo existe repulsión en los casos del GOE, GUE y GSE ($P(0) = 0$) y no hay repulsión en el caso de Poisson. Además, para valores pequeños de s la curva que crece más despacio es la del GSE, la siguiente sería la del GUE y la que crece más

²Nótese que hasta ahora, en lo que se refiere a la conjetura BGS, hemos empleado 'sistemas clásicos caóticos' para referirnos a lo que rigurosamente deberíamos haber llamado 'sistemas clásicos ergódicos'.

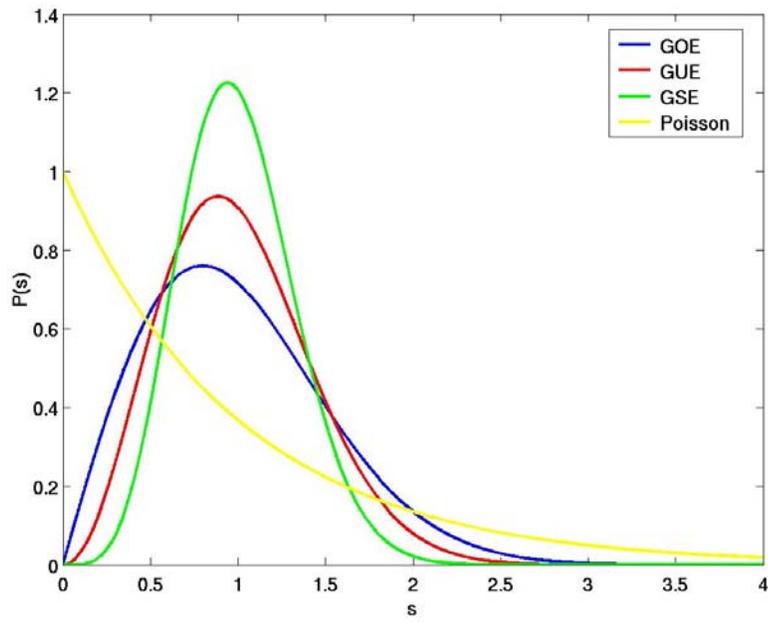


Figura 2.1: Curvas teóricas para la distribución de espaciamientos a primeros vecinos de espectros tipo GOE, GUE, GSE y Poisson.

deprisa es la del GOE, ya que según las expresiones (2.9) el comportamiento de éstas para s pequeño es

$$P(s) \sim \begin{cases} s, & \text{GOE} \\ s^2, & \text{GUE} \\ s^4, & \text{GSE} \end{cases} \quad (2.10)$$

Por eso, el exponente de s en estas expresiones (ν) se denomina *exponente de repulsión* y se dice que el GOE presenta repulsión lineal ($\nu = 1$), el GUE repulsión cuadrática ($\nu = 2$) y el GSE repulsión cuártica ($\nu = 4$). Se le llama también *índice de universalidad*, puesto que distingue las tres clases de universalidad. En el caso de niveles descorrelacionados el valor es $\nu = 0$.

La mayoría de sistemas reales no son ni integrables ni completamente caóticos, sino que tienen un espacio de fases mixto. En estos sistemas la distribución de espaciamentos a primeros vecinos presenta un comportamiento intermedio entre la ley de Poisson y la de Wigner. Existen distintas aproximaciones para tratar este tipo de situaciones. Entre ellas está la aproximación de Brody [27, 28], que es puramente fenomenológica. La distribución de espaciamentos de Brody es una función que interpola entre el régimen integrable y el caótico, concretamente entre la ley de Poisson y la de Wigner-GOE:

$$P(s) = (\nu + 1)a_\nu s^\nu \exp(-a_\nu s^{\nu+1}), \quad (2.11)$$

donde $a_\nu = [\Gamma(\frac{\nu+2}{\nu+1})]^{\nu+1}$ y Γ es la función gamma, definida como sigue:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0. \quad (2.12)$$

ν es el parámetro de Brody: para $\nu = 0$ se tiene la distribución de Poisson y para $\nu = 1$ la de Wigner-GOE.

Rigidez espectral

La rigidez espectral es el estadístico más utilizado para medir las correlaciones de largo alcance. Se define a partir de la densidad acumulada de estados, que contabiliza el número de estados con energía por debajo o igual a una dada ε :

$$\mu(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} dx \rho(x) = \sum_i \Theta(\varepsilon - \varepsilon_i), \quad (2.13)$$

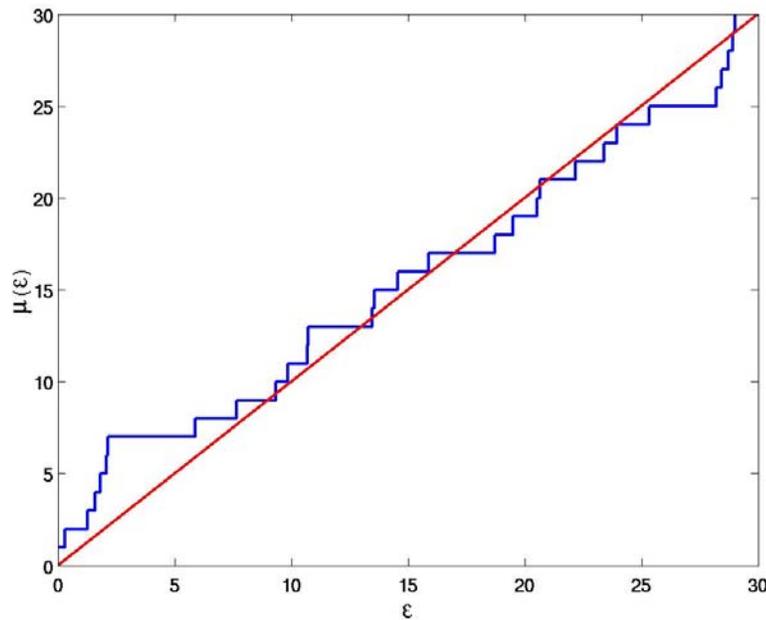


Figura 2.2: Densidad acumulada de un espectro de tipo Poisson reescalado (azul), junto con una recta de pendiente 1 (roja): $\mu(\varepsilon) = \varepsilon$.

donde $\rho(x)$ es la densidad de estados, definida en la ecuación (2.3). Es decir, que la forma de la función $\mu(\varepsilon)$ es la de una escalera con escalones de una unidad en cada valor de la energía correspondiente a un autovalor, como se muestra en la figura 2.2.

Para comprender bien qué estamos midiendo con este estadístico es necesario señalar que en un espectro reescalado, el espaciamiento medio entre niveles es igual a 1:

$$\langle s \rangle = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} s_i = 1, \quad (2.14)$$

como se explicará en la siguiente sección. De modo que, teniendo esto en cuenta, sabemos que en un espectro reescalado la densidad acumulada de estados será una escalera cuya pendiente media valdrá 1. Si hacemos un ajuste de la densidad acumulada a una recta en un intervalo de longitud L ,

$[\varepsilon - L/2, \varepsilon + L/2]$, el valor de la χ^2 obtenida en el ajuste, es decir,

$$\Delta_3(L) = \min_{a,b} \int_{\varepsilon-L/2}^{\varepsilon+L/2} dx (\mu(x) - a - bx)^2, \quad (2.15)$$

es la rigidez espectral, que, como se ha anticipado en la notación, depende sólo de la distancia L entre los dos niveles entre los cuales se quiere estudiar la correlación y es independiente de la posición concreta de los mismos en el espectro ε ³.

Por tanto, según su definición, la rigidez espectral mide cuánto se desvía el espectro estudiado de un espectro uniforme (equiespaciado). Cuanto más uniforme es el espectro más se parece la densidad acumulada a una recta y, por tanto, menor es la χ^2 obtenida en el ajuste. Por tanto, un valor pequeño de la Δ_3 nos indica que el espectro es bastante uniforme, que tiene una cierta estructura rígida, de ahí el nombre del estadístico. Esta estructura aparece debido a las correlaciones, a la repulsión de niveles. En el caso de los espectros de niveles descorrelacionados, que se comportan como variables aleatorias independientes, no es de esperar que haya una organización de los niveles que le confiera ningún tipo de estructura al espectro.

Entonces valores pequeños de la Δ_3 para un valor de L dado indican que existe repulsión entre pares de niveles separados una distancia L . Por tanto, con este estadístico se pueden medir correlaciones entre niveles que están alejados, a diferencia de la $P(s)$, que mide las correlaciones únicamente entre primeros vecinos.

En el caso de espectros de niveles descorrelacionados, que corresponden a los sistemas integrables, se obtiene

$$\langle \Delta_3(L) \rangle_{\nu=0} = \frac{L}{15}. \quad (2.16)$$

En el caso de las colectividades gaussianas, que corresponden a los sistemas caóticos, según la conjetura BGS,

$$\langle \Delta_3(L) \rangle_{\nu} = \frac{1}{\nu\pi^2} \log(L) + b_{\nu} + \mathcal{O}(L^{-1}) \quad L \gg 1, \quad \nu = 1, 2, 4, \quad (2.17)$$

³Esto es así mientras nos reframos al comportamiento universal de las fluctuaciones. En lo referente a fenómenos no universales la Δ_3 sí puede depender de ε . Por ejemplo, el fenómeno de la saturación de Berry, que se describirá más adelante, es debido al límite a la universalidad, que venía impuesto por las órbitas periódicas del sistema. Y este fenómeno aparece en la Δ_3 a distintos valores de L según el valor de ε escogido.

donde ν es el índice de universalidad y b_ν depende también de la clase de universalidad.

Observamos en (2.16) y (2.17) que el valor teórico de la Δ_3 se da en realidad como el promedio sobre una colectividad. Por tanto, si queremos comparar la Δ_3 obtenida a partir de un espectro con un valor teórico debemos calcularla como un promedio a lo largo del espectro. El procedimiento más estándar, introducido por Bohigas et al. [4], es utilizar los intervalos $[0, L]$, $[L/2, 3L/2]$, $[L, 2L]$, \dots y promediar la Δ_3 sobre todos ellos.

Como era de esperar, el crecimiento de la $\langle \Delta_3 \rangle$ con L es mucho más lento para sistemas caóticos, que son los que presentan repulsión de niveles, que para sistemas integrables.

Es importante recordar en este punto que, según se señaló en la sección 2.2.2, no es de esperar un comportamiento universal de las fluctuaciones para ventanas de energía muy grandes. Es decir, que no podemos esperar predecir el comportamiento de las correlaciones de muy largo alcance: tendrá sentido comparar la $\langle \Delta_3 \rangle$ con la teoría sólo para valores suficientemente pequeños de L , que dependerán de cada sistema. Lo que ocurre cuando se estudian valores mayores de L fue descrito teóricamente por Berry [30] y es un fenómeno denominado *saturación*: a partir de un cierto valor de L la Δ_3 se separa de la curva teórica (ya sea ésta la correspondiente a un sistema integrable o caótico) para tomar un valor constante.

2.4. El reescalado

Hemos visto que la densidad de estados de un sistema cuántico puede separarse en una parte suave, que daría un comportamiento medio propio del sistema clásico, y una parte fluctuante, que sería propia exclusivamente del sistema cuántico. Además, la parte fluctuante es universal (dentro de un cierto rango: $\Delta E < \hbar/T_{min}$) y depende sólo de si el sistema clásico es integrable o caótico (ergódico), mientras que la parte suave depende de las propiedades individuales del mismo. Por tanto, para poder estudiar las características universales del espectro es necesario separar primero la parte suave de la densidad de estados. Este es el proceso que se conoce como reescalado.

El reescalado permite comparar las fluctuaciones de espectros de sistemas distintos o de distintas partes de un espectro, de otra manera esto no sería posible. Por ejemplo, si estamos estudiando los espectros (sin reescalar) de dos sistemas distintos en uno de los cuales la densidad de estados es mucho

mayor que en el otro podemos pensar que el primero presenta menor repulsión de niveles que el segundo cuando, en cambio, esto puede deberse simplemente a que en el primero la parte suave de la densidad de estados es mayor que en el segundo, lo que no tiene realmente nada que ver con las propiedades de las fluctuaciones.

Lo que debemos buscar es un cambio de variable en la energía de manera que el nuevo espectro tenga una densidad media unidad, o lo que es lo mismo, un espaciamiento medio entre niveles igual a 1. Llamemos E_i a las variables antiguas (espectro sin reescalar) y ε_i a las nuevas (espectro reescalado), con $i = 1, 2, \dots, m$. En las variables antiguas la densidad acumulada de estados puede escribirse así:

$$m(E) = \overline{m}(E) + \tilde{m}(E), \quad (2.18)$$

donde $\overline{m}(E)$ es la parte suave de la densidad acumulada, definida a partir de la parte suave de la densidad de estados, según la ecuación (2.13), como

$$\overline{m}(E) = \int_{-\infty}^E dx \overline{g}(x), \quad (2.19)$$

lo que implica que

$$\overline{g}(E) = \frac{d\overline{m}(E)}{dE}. \quad (2.20)$$

Y $\tilde{m}(E)$ es la parte fluctuante.

Hasta ahora habíamos llamado m al número total de niveles del espectro. Por eso hemos elegido también esta letra para referirnos a la densidad acumulada, puesto que ésta representa también número de niveles, concretamente, es el número de niveles que hay hasta un cierto valor E de la energía. Por tanto, a partir de ahora cuando aparezca m como una función, con una energía como variable independiente, nos estaremos refiriendo a la densidad acumulada de estados, y cuando aparezca m como un número concreto nos referiremos al número total de niveles. Así no habrá posibilidad de confusión.

Utilizando el siguiente cambio de variable:

$$\varepsilon = \overline{m}(E), \quad (2.21)$$

podemos definir un nuevo espectro $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ sin más que aplicar el cambio a la secuencia de niveles antigua $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$:

$$\varepsilon_i = \overline{m}(E_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.22)$$

Puesto que el número de niveles debe ser igual antes y después del cambio debe cumplirse que

$$\mu(\varepsilon) = m(E(\varepsilon)). \quad (2.23)$$

donde $\mu(\varepsilon)$ es la densidad acumulada en la nueva variable ε .

Por tanto, la ecuación (2.18) en la nueva variable se escribe

$$\mu(\varepsilon) = m(E(\varepsilon)) = \varepsilon + \tilde{m}(E(\varepsilon)) = \bar{\mu}(\varepsilon) + \tilde{\mu}(\varepsilon) \quad (2.24)$$

Llamaremos $\rho(\varepsilon)$ a la densidad de estados en la nueva variable, como ya señalamos en 2.3.1. La nueva densidad media de estados, según la ecuación (2.20), es

$$\bar{\rho}(\varepsilon) = \frac{d\bar{\mu}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 1, \quad (2.25)$$

que es exactamente lo que buscábamos.

Por otro lado, podemos obtener también la expresión de la nueva parte fluctuante de la densidad de estados, $\tilde{\rho}(\varepsilon)$:

$$\tilde{\rho}(\varepsilon) = \frac{d\tilde{\mu}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d\tilde{m}(E)}{dE} \frac{dE}{d\varepsilon} = \frac{\tilde{g}(E)}{g(E)}. \quad (2.26)$$

Así, podemos decir que la nueva parte fluctuante es igual a la antigua normalizada y esto nos ayuda a comprender que, según hemos comentado, al reescalar sea posible comparar las fluctuaciones de sistemas distintos o de distintas partes de un espectro.

La figura 2.3 muestra gráficamente el procedimiento de reescalado.

El procedimiento de reescalado requiere entonces el conocimiento de la función $\bar{m}(E)$ y esta es la principal dificultad. En el caso de las matrices aleatorias sí conocemos una expresión para la densidad media (véase apéndice A), pero en la mayoría de los casos esto no es así, y la densidad media debe determinarse únicamente a partir de la información que proporciona el espectro. Los métodos utilizados en estos casos pueden ser locales o globales.

Los métodos locales son aquellos en los que se determina la densidad media de forma local en un entorno de cada nivel. El más simple es el llamado *reescalado local*, que supone la densidad media aproximadamente constante en una ventana de v niveles a cada lado de E_i :

$$\bar{g}_L(E_i) = \frac{2v}{E_{i+v} - E_{i-v}}. \quad (2.27)$$

El problema de este tipo de métodos es que introducen una longitud característica (v en el caso del reescalado local) en un problema que carece de ella.

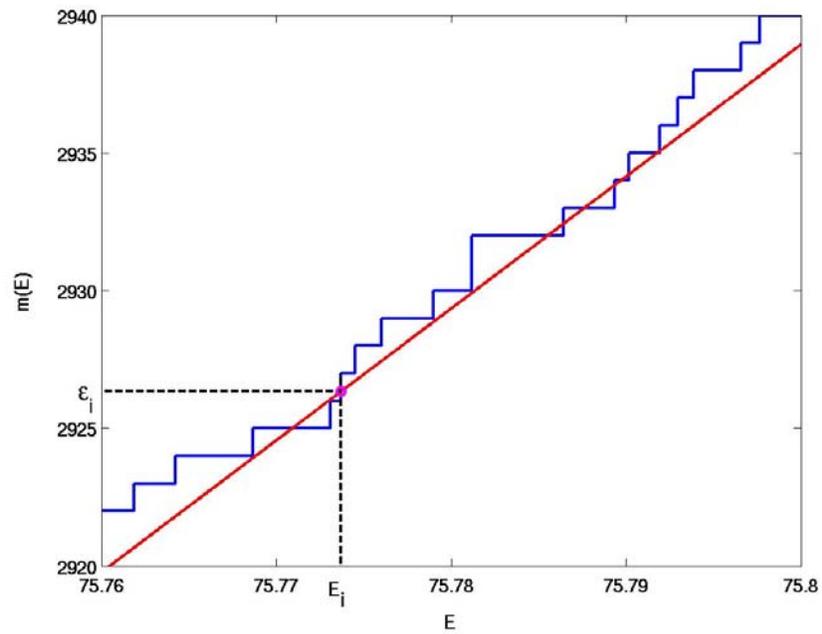


Figura 2.3: Procedimiento de reescalado. La densidad acumulada, $m(E)$, se representa en azul y la parte suave de ésta, $\bar{m}(E)$, en rojo. A cada nivel E_i le corresponde un nivel reescalado $\varepsilon_i = \bar{m}(E)$.

Y esto produce efectos espurios en el análisis de las correlaciones, ya que introduce correlaciones de largo alcance ficticias [29], lo que puede llevar a una interpretación errónea de la Δ_3 . Por ejemplo, puede hacer aparecer una *saturación* donde realmente no la hay.

Los reescalados locales, al modificar las correlaciones de largo alcance, pueden hacer que la Δ_3 sature, llevándonos a confundir este efecto con la saturación de Berry cuando en realidad es sólo consecuencia de un reescalado inadecuado. En resumen, estos métodos pueden llevarnos a conclusiones equivocadas en el análisis de las fluctuaciones espectrales y, por tanto, es más conveniente utilizar otro tipo de métodos.

En los métodos globales se calcula la densidad media utilizando el espectro completo. Lo que se hace habitualmente es intentar ajustar la densidad acumulada a una función suave. En algunos casos, se conoce una forma funcional que depende de un cierto número de parámetros y que se obtiene a partir de conocimientos teóricos del sistema. En otros casos, no se dispone siquiera de esta información y lo que suele hacerse es ajustar la densidad utilizando un conjunto de funciones ortonormales como, por ejemplo, los polinomios de Chebyshev. En esta situación hay que tener mucho cuidado con el número de parámetros libres que se manejan, ya que si se utilizan demasiados parámetros en el ajuste puede que la densidad media obtenida esté incluyendo parte de las fluctuaciones.

Por tanto, el procedimiento de reescalado, a no ser que se conozca la expresión exacta de la densidad media, no es una tarea nada trivial y debe realizarse con sumo cuidado si se quiere conseguir un análisis correcto de las fluctuaciones espectrales.

2.5. El ruido $1/f$

Recientemente se ha propuesto un nuevo enfoque a la hora de abordar el problema del caos cuántico [31], basado en los métodos tradicionales del análisis de series temporales. El registro de la evolución temporal de una determinada magnitud constituye una serie temporal. Existen muchos fenómenos en la naturaleza que se estudian mediante series temporales; fenómenos tan dispares como los latidos del corazón, el flujo de un río o la actividad de las manchas solares [32].

Una de las técnicas más habituales en el análisis de series temporales es la transformación de Fourier, mediante la cual se obtiene la representación

de la señal temporal en el espacio de frecuencias:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}, \quad (2.28)$$

donde $\tilde{f}(\omega)$ es la señal transformada y $f(t)$ es la señal original, que puede recuperarse a partir de la transformada mediante

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}. \quad (2.29)$$

En lugar de analizar directamente la transformada de Fourier, que es compleja y en la práctica no resulta de utilidad, se define el *espectro de potencias*⁴ como el módulo al cuadrado de ésta:

$$P(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|^2. \quad (2.30)$$

Cuando una señal es tal que su espectro de potencias verifica

$$\langle P(\omega) \rangle \propto \omega^{-\alpha}, \quad (2.31)$$

donde el valor medio indica promedio sobre diversas realizaciones de un mismo suceso, se dice que la señal es autosimilar. Es decir, que la forma de la señal es invariante bajo cambios de escala:

$$\langle P(\lambda\omega) \rangle \propto \omega^{-\alpha}. \quad (2.32)$$

Se dice también que la señal presenta un ruido $1/f^\alpha$. El tipo de ruido más importante es el ruido $1/f$ ($\alpha = 1$), ya que aparece en una gran variedad de fenómenos en la naturaleza y no se conoce un mecanismo físico sencillo capaz de explicar esta ubicuidad.

Estas técnicas de análisis se han aplicado en el campo del caos cuántico tomando como punto de partida la asimilación del espectro cuántico a una serie temporal. Concretamente se parte de la secuencia de espaciamentos a primeros vecinos:

$$s_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (2.33)$$

⁴Traducción literal del inglés *power spectrum*

A partir de la secuencia de espaciamentos se define un nuevo estadístico para caracterizar las fluctuaciones espectrales:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = \sum_{i=1}^n w_i, \quad n = 1, \dots, m-1. \quad (2.34)$$

La cantidad w_i mide la separación del espaciamento s_i de su valor medio $\langle s \rangle = 1$ (recuérdese que se considera en todo momento el espectro reescalado). La δ_n mide, por tanto, la separación de la energía de excitación de su valor medio n :

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^n \langle s \rangle = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_1 - n. \quad (2.35)$$

La función δ_n tiene una similitud formal con una serie temporal. Si comparamos el espectro de niveles de energía con el proceso de dispersión de una partícula, podemos considerar el índice i de los espaciamentos como un tiempo discreto y las fluctuaciones en los espaciamentos w_i como el análogo de los desplazamientos de la partícula entre la colisión en el instante i y la siguiente. La δ_n sería entonces el análogo del desplazamiento total de la partícula en el instante n .

Considerando entonces la δ_n como una señal temporal podemos calcular su transformada de Fourier y su espectro de potencias. Cuando se trata de una señal discreta, como es este caso, se define una transformada de Fourier discreta:

$$\widehat{\delta}_k = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_n \delta_n \exp\left(\frac{-2\pi i k n}{m}\right). \quad (2.36)$$

El espectro de potencias sería

$$P_k = \left| \widehat{\delta}_k \right|^2 \quad (2.37)$$

Y la existencia de un ruido $1/f^\alpha$ se expresa con

$$\langle P_k \rangle \propto \frac{1}{k^\alpha}, \quad (2.38)$$

Esta técnica de análisis se aplicó [31] al espectro de un sistema cuántico caótico (según los criterios establecidos hasta ahora), como es el núcleo atómico, y se encontró que éste presentaba un ruido $1/f$. Para comprobar que no se

trataba de una propiedad particular de los núcleos atómicos se analizaron también las colectividades de matrices aleatorias GOE, GUE y GSE, obteniendo el mismo resultado. Esto llevó a proponer la siguiente conjetura: *El espectro de energía de los sistemas cuánticos caóticos está caracterizado por un ruido 1/f.*

Un aspecto interesante de esta conjetura es que permite caracterizar el caos cuántico sin más información que el espectro de energía del sistema, es decir, sin necesidad de hacer referencia a las propiedades de otros sistemas, como ocurre con la conjetura BGS, que hace referencia al GOE. El ruido 1/f es universal para todos los sistemas cuánticos caóticos independientemente de sus simetrías. Además, incluye a este tipo de sistemas en una extensa clase de sistemas de muy diversos campos que presentan ruido 1/f.

Por otro lado, los espectros de los sistemas cuánticos integrables vienen caracterizados por un ruido $1/f^2$, lo que es un resultado inmediato una vez establecida la analogía del espectro con una serie temporal. Según el resultado de Berry [3] la secuencia de espaciamentos a primeros vecinos del espectro de un sistema cuántico integrable se comporta como un conjunto de variables aleatorias independientes. La δ_n , por tanto, es en ese caso una suma de n variables aleatorias independientes y es un resultado conocido que el espectro de potencias de una señal como ésta presenta un ruido $1/f^2$. En [31] se analiza también una colectividad de matrices cuyos espectros están constituidos por niveles descorrelacionados (colectividad GDE) y se encuentra efectivamente un ruido $1/f^2$.

El cálculo teórico del espectro de potencias de la δ_n ha sido realizado recientemente en el marco de la teoría de matrices aleatorias [33], obteniéndose la siguiente expresión:

$$\langle P_k^\delta \rangle_\nu = \frac{m^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{K_\nu \left(\frac{k}{m} \right) - 1}{k^2} + \frac{K_\nu \left(1 - \frac{k}{m} \right) - 1}{(m-k)^2} \right\} + \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi k}{m} \right)} + \alpha,$$

$$k = 1, 2, \dots, m-1, \quad m \gg 1, \quad \nu = 0, 1, 2, 4, \quad (2.39)$$

donde K_ν es el factor de forma espectral, distinto para cada colectividad, definido como

$$K_\nu(\tau) = \left\langle \left| \int d\varepsilon \tilde{\rho}(\varepsilon) e^{-i2\pi\varepsilon\tau} \right|^2 \right\rangle_\nu \quad (2.40)$$

y α vale 0 para sistemas integrables y $-1/12$ para sistemas caóticos.

Introduciendo en (2.39) las expresiones conocidas del factor de forma para los casos GOE, GUE y Poisson

$$K_{\nu=1}(\tau) = \begin{cases} 2\tau - \tau \log(1 + 2\tau), & \tau \leq 1 \\ 2 - \tau \log\left(\frac{2\tau + 1}{2\tau - 1}\right), & \tau \geq 1 \end{cases} \quad (2.41)$$

$$K_{\nu=2}(\tau) = \begin{cases} \tau, & \tau \leq 1 \\ 1, & \tau \geq 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

$$K_{\nu=0}(\tau) = 1, \quad (2.43)$$

se obtienen (tomando el caso $\tau \leq 1$, ya que $k/m \leq 1$) expresiones explícitas de $\langle P_k^\delta \rangle$ para los tres casos. A frecuencias bajas, es decir, en el límite $k \ll m$ estas expresiones pueden aproximarse por

$$\langle P_k^\delta \rangle = \begin{cases} \frac{m}{2\pi^2 k}, & \nu = 1 \\ \frac{m}{4\pi^2 k}, & \nu = 2 \\ \frac{m}{4\pi^2 k^2}, & \nu = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

donde efectivamente encontramos los ruidos $1/f$ y $1/f^2$.

Además de la aplicación de técnicas de análisis desarrolladas en el campo de las series temporales, la analogía entre éstas y los espectros de energía permite también establecer analogías entre las propiedades de unos y otras.

Hemos visto que los espectros caóticos se caracterizan por presentar repulsión de niveles y que esto se manifiesta en una organización del espectro que le confiere una cierta estructura rígida. Es decir, que las desviaciones de los espaciamientos s_i de su valor medio $\langle s \rangle = 1$ son pequeñas y una desviación tiende a ser compensada por las desviaciones de los espaciamientos vecinos, de manera que es difícil encontrar en la secuencia una serie larga de espaciamientos todos por encima o por debajo del espaciamiento medio.

En una serie temporal, la *antipersistencia* es una propiedad que implica que una tendencia al aumento o al descenso en el pasado conduce a la tendencia opuesta en el futuro. Por tanto, la antipersistencia en las series temporales es análoga a la rigidez espectral en los espectros de energía. Un espectro muy rígido da lugar a un espectro de potencias que presenta ruido $1/f$. Por otro lado, es conocido que una serie temporal cuyo espectro de potencias presenta ruido $1/f$ es muy antipersistente. Por tanto, la analogía entre ambas propiedades es consistente.

Capítulo 3

Sistemas de N partículas sin interacción

El caos cuántico se ha definido como el estudio cuántico de los sistemas que clásicamente son caóticos. Los sistemas de varias partículas idénticas, debido al carácter bosónico o fermiónico de las mismas, no tienen un límite clásico claro. Por tanto, el estudio cuántico de este tipo de sistemas no puede basarse en un estudio previo de su análogo clásico.

Afortunadamente, en el nivel de desarrollo actual de la disciplina del caos cuántico, disponemos ya de una serie de herramientas que nos permiten estudiar el grado de caos y complejidad del sistema a partir únicamente de su espectro cuántico de niveles de energía. Dichas herramientas han sido descritas en el capítulo anterior, en el cual se ha visto cómo el estudio de sistemas con análogo clásico ha permitido establecer criterios para distinguir el caos en mecánica cuántica a partir de los espectros de niveles de energía. Más concretamente, a partir de la estadística de las fluctuaciones espectrales.

En este capítulo utilizaremos estas herramientas para estudiar sistemas de N partículas idénticas sin interacción. Es decir, sistemas con un hamiltoniano del tipo

$$H = \sum_{q=1}^N h_q, \quad (3.1)$$

donde h_q es el hamiltoniano individual de una partícula.

Muy poca atención ha sido prestada a este tipo de sistemas en la literatura científica sobre caos cuántico. El núcleo atómico fue el primer sistema estudiado en el contexto del caos cuántico, el primero donde se comprobaron

las predicciones de la teoría de matrices aleatorias [17]. El núcleo es el paradigma de sistema cuántico complejo. Es un sistema de muchas partículas en interacción que puede estudiarse teóricamente mediante el *modelo de capas*. Este modelo es la teoría más completa de que se dispone en la actualidad para describir el núcleo y sus excitaciones a baja energía. El hamiltoniano nuclear puede escribirse así:

$$H = \sum_{q=1}^A T(q) + \sum_{q<r}^A W(q, r), \quad (3.2)$$

donde T es la energía cinética, W representa una interacción a dos cuerpos y A es el número total de nucleones ($A=Z(\text{protones})+N(\text{neutrones})$).

El modelo de capas consiste en considerar una primera aproximación en la que cada nucleón se mueve independientemente en un potencial medio (obtenido a partir de un cálculo Hartree-Fock autoconsistente), que estaría creado por el resto de los nucleones; y se añade un término (*interacción residual*) para tener en cuenta las interacciones entre las partículas. El hamiltoniano puede escribirse entonces así:

$$H = \sum_{q=1}^A [T(q) + U(q)] + \left[\sum_{q<r}^A W(q, r) - \sum_{q=1}^A U(q) \right] = H_0 + H_1, \quad (3.3)$$

donde U representa el campo medio autoconsistente. La primera parte del hamiltoniano, H_0 , representa el movimiento de partículas independientes y la segunda parte, H_1 , es la interacción residual.

Se ha comprobado que es realmente la interacción residual la que introduce el caos en el sistema. En el campo medio los nucleones se mueven en órbitas de forma regular. El grado de caoticidad de los núcleos depende de diversos factores, el principal de los cuales es la relación entre la intensidad del campo medio y la intensidad de la interacción residual. Por tanto, la transición de la regularidad al caos en este sistema puede estudiarse mediante la introducción gradual de la interacción residual. Es decir, pasando gradualmente del hamiltoniano de partículas independientes, H_0 , que daría lugar a un espectro cuyas fluctuaciones siguen la estadística de Poisson, al hamiltoniano completo, $H = H_0 + H_1$, que daría lugar a un espectro cuyas fluctuaciones tienen las mismas propiedades que las predichas por la teoría de matrices aleatorias.

La mayoría de los problemas relacionados con caos cuántico en sistemas de varias partículas que pueden encontrarse en la literatura científica son de

este tipo. Es decir, se trata de sistemas de partículas en interacción cuyo hamiltoniano puede expresarse como un término sin interacción, H_0 , más un término de interacción a dos cuerpos, H_1 . Ambos pueden escribirse en general en términos de operadores creación y destrucción de la siguiente manera:

$$H_0 = \sum_i e_i a_i^+ a_i, \quad (3.4)$$

$$H_1 = \sum_{i<j,k<l} U_{ij,kl} a_l^+ a_k^+ a_i a_j. \quad (3.5)$$

Los estados del sistema (estados de varias partículas) para el hamiltoniano sin interacción, construidos a partir de los estados de una partícula, $|I\rangle = a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ \dots a_{i_N}^+ |0\rangle$, son autoestados de H_0 :

$$H_0 |I\rangle = E_I^0 |I\rangle, \quad E_I^0 = \sum_i e_i n_i^{(I)}, \quad (3.6)$$

donde $n_i^{(I)} = \langle I | a_i^+ a_i | I \rangle$ son los números de ocupación de los niveles. Para encontrar los autoestados del sistema con interacción habría que diagonalizar el hamiltoniano completo.

Mediante hamiltonianos de este tipo se estudian sistemas como núcleos [34, 35], átomos [36], electrones en metales-aislantes [37] o sistemas fermiónicos en general [38, 39, 40]. En todos los casos se considera que el hamiltoniano sin interacción, H_0 , es regular. Es decir, el sistema cuántico regido por este hamiltoniano es integrable y, por tanto, su espectro presenta fluctuaciones que siguen la estadística de Poisson. Esto implica que, utilizando el modelo de la ecuación (3.4) las energías e_i de partícula independiente pueden escogerse aleatoriamente en un rango adecuado al problema.

Entonces, lo que suele estudiarse es el tipo de fluctuaciones que presenta el sistema con el hamiltoniano completo, o bien distintos aspectos de la transición del hamiltoniano sin interacción al hamiltoniano completo, como por ejemplo, el valor crítico de la interacción para el cual puede considerarse que se ha pasado al régimen caótico.

En este trabajo nos centraremos, como ya hemos señalado, en sistemas sin interacción. Es decir, estudiaremos exclusivamente hamiltonianos del tipo (3.4). Pero elegiremos distintos tipos de espectro de partícula independiente $\{e_i\}$ y estudiaremos el espectro de energías del sistema $\{E_I^0\}$ a que da lugar. La pregunta es: ¿Hasta qué punto las propiedades del espectro de partícula independiente se trasladan al espectro de energías del sistema? Es decir, si

el espectro de un sistema de una partícula presenta cierto tipo de fluctuaciones, ¿siguen siendo de ese tipo las fluctuaciones del espectro al introducir más partículas en el sistema? ¿O por el contrario cambian o se rompen las correlaciones entre los niveles? ¿Dependen las propiedades del espectro del sistema del número de partículas considerado?

Concretamente, en este trabajo tomaremos dos espectros de dos matrices aleatorias, uno tipo GOE y otro tipo GUE, que corresponden a los sistemas caóticos, y un espectro tipo Poisson, que corresponde a los sistemas integrables. Y finalmente realizaremos una comparación con dos espectros obtenidos numéricamente a partir de un sistema físico, como es el billar de Robnik: uno correspondiente a un caso integrable, que compararemos con el caso de Poisson, y otro correspondiente a un caso caótico, que compararemos con el caso del GOE, que es el que corresponde a este sistema dadas sus propiedades de simetría. Además, consideramos solamente partículas fermiónicas. Esto implica que cada nivel del espectro de partícula independiente sólo puede estar ocupado por una partícula. Es decir, que los números de ocupación $n_i^{(1)}$ sólo pueden tomar los valores 0 o 1.

3.1. Espectros de partícula independiente

En esta sección se explica cómo se generaron y reescalaron los tres espectros de partícula independiente utilizados en el trabajo.

3.1.1. Espectro GOE

La distribución de probabilidad de los elementos de una matriz GOE de dimensión m es la siguiente (apéndice A):

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{m/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{m(m-1)/4} \exp \left[-A \sum_{i,j} H_{ij}^2 \right], \quad (3.7)$$

donde la constante A puede expresarse en función de la varianza de los elementos diagonales o de los no diagonales:

$$\langle H_{ii}^2 \rangle = \frac{1}{2A}, \quad \langle H_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{4A}. \quad (3.8)$$

En vista de las expresiones anteriores, una matriz GOE puede ser generada a partir de distribuciones gaussianas. Al tratarse de matrices simétricas basta

generar la diagonal y la parte triangular superior o inferior (la otra se obtiene por simetría: $H_{ij} = H_{ji}$). La manera de generar una matriz GOE es, por tanto, la siguiente: se generan m números aleatorios con una distribución gaussiana, que serán los que formen la diagonal; y $m(m-1)/2$ números aleatorios con una distribución gaussiana cuya varianza sea la mitad de la utilizada en la generación de la diagonal, que formarán la parte no diagonal. Una vez generada la matriz se diagonaliza y se obtiene así el espectro de niveles, cuyas fluctuaciones tendrán las propiedades descritas en la sección 2.3.1.

En nuestro caso se generó una matriz de dimensión 10.000, tomando $A = 1/2$. Luego la varianza de los elementos diagonales debe ser 1 y la de los no diagonales, $1/2$. Por tanto, los elementos diagonales se generaron mediante una distribución gaussiana de media 0 y varianza 1 y los no diagonales mediante una distribución gaussiana de media 0 y varianza $1/2$.

El reescalado del espectro es sencillo en este caso: la expresión de la densidad media de estados es conocida (ecuación (A.11), apéndice A). No es necesario calcular la expresión de la densidad acumulada, que es más complicada, sino que suele utilizarse directamente

$$\bar{g}\left(\frac{E_i + E_{i+1}}{2}\right) = \frac{\bar{m}(E_{i+1}) - \bar{m}(E_i)}{E_{i+1} - E_i}, \quad (3.9)$$

que es una buena aproximación para la densidad media de estados entre los puntos E_i y E_{i+1} . Utilizando $\varepsilon_i = \bar{m}(E_i)$ se obtiene

$$s_i = \bar{g}\left(\frac{E_i + E_{i+1}}{2}\right) S_i, \quad (3.10)$$

donde $s_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ y $S_i = E_{i+1} - E_i$. Por tanto, siendo conocidos $\bar{g}(E)$ y el espectro $\{E_i\}_{i=1,\dots,m}$ podemos calcular los espaciamientos reescalados s_i , y las energías reescaladas mediante $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + s_i$, tomando $\varepsilon_1 = 0$.

3.1.2. Espectro GUE

La distribución de probabilidad de los elementos de una matriz GUE de dimensión m viene dada por (apéndice A)

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{m/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{m(m-1)/2} \exp \left\{ -A \sum_{i,j} [(H_R)_{ij}^2 + (H_I)_{ij}^2] \right\}, \quad (3.11)$$

donde $(H_R)_{ij}$ y $(H_I)_{ij}$ son las partes real e imaginaria, respectivamente, de H_{ij} . La constante A puede expresarse en función de la varianza de las partes real o imaginaria de los elementos diagonales o no diagonales:

$$\langle (H_R)_{ii}^2 \rangle = \frac{1}{2A}, \quad \langle (H_R)_{ij}^2 \rangle = \langle (H_I)_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{4A}. \quad (3.12)$$

La parte imaginaria de los elementos diagonales es nula puesto que se trata de matrices hermíticas ($H_{ij} = H_{ji}^*$).

A la vista de las expresiones el procedimiento para generar una matriz GUE es prácticamente el mismo que para el GOE, sólo que en este caso hay que generar el doble de números para la parte no diagonal: $m(m-1)/2$ para la parte real de los elementos y $m(m-1)/2$ para la parte imaginaria. Es decir, se generan m números aleatorios con una distribución gaussiana, que formarán la diagonal, y $m(m-1)$ números aleatorios con una distribución gaussiana cuya varianza sea la mitad de la utilizada en la generación de la diagonal, que serán las partes real e imaginaria de los elementos de la parte no diagonal superior o inferior (la otra se obtiene por simetría: $H_{ij} = (H_R)_{ij} + i(H_I)_{ij}$, $H_{ji} = (H_R)_{ij} - i(H_I)_{ij}$).

En nuestro caso generamos una matriz de dimensión 7.000, tomando $A = 1$. Así los elementos diagonales se generaron mediante una distribución gaussiana de media 0 y varianza 1/2 y las partes real e imaginaria de los no diagonales mediante una distribución gaussiana de media 0 y varianza 1/4.

El reescalado es también sencillo. La expresión de la densidad media de estados es la misma que para el GOE, la ley semicircular de Wigner (ecuación (A.11), apéndice A).

3.1.3. Espectro Poisson

Para tener un espectro de niveles descorrelacionados basta con generar una secuencia de números aleatorios con distribución uniforme. Dicho espectro tendrá una densidad media de estados constante dada por

$$\bar{g}(E) = \frac{m}{a-b}, \quad (3.13)$$

donde a y b son los extremos del intervalo en el cual se generan los niveles y m es el número de niveles generados. Por tanto, el reescalado en este caso es también muy sencillo. Para obtener un espectro con densidad media unidad

simplemente hay que multiplicar toda la secuencia de niveles por la densidad (3.13).

En nuestro caso generamos una secuencia de $m = 10.000$ niveles entre $a = -200$ y $b = 200$.

En realidad tanto los parámetros a y b como el parámetro A en los casos del GOE y el GUE no tienen relevancia, ya que lo único que depende de ellos son las densidades medias, pero precisamente al reescalar los espectros eliminamos toda dependencia de la parte suave de la densidad. Por tanto, la elección de estos parámetros no va a influir para nada en los resultados del estudio de las fluctuaciones.

3.2. El espectro del sistema de N partículas

Una vez generado el espectro de partícula independiente, el siguiente paso a llevar a cabo es la obtención del espectro del sistema de N partículas. Las energías del espectro del sistema serán las correspondientes a las distintas configuraciones de las N partículas en el espectro de partícula independiente:

$$E_I = \sum_{i=1}^{\infty} e_i n_i^{(I)}, \quad (3.14)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los niveles del espectro de partícula independiente, e_i es la energía del nivel i -ésimo y $n_i^{(I)}$ es el número de ocupación del mismo en la configuración I . En el caso de fermiones cada nivel sólo puede estar ocupado por una partícula y, por tanto, los únicos valores que puede tomar $n_i^{(I)}$ son 0 y 1.

El espectro de partícula independiente está formado en principio por un número infinito de niveles de energía, como se ha considerado en la ecuación (3.14). A partir de tal espectro construiríamos un espectro del sistema que constaría también de infinitos niveles. Pero lógicamente un espectro infinito no es manejable en la práctica. Lo que haremos será calcular sólo un número finito de niveles del sistema, los M primeros niveles.

Para ello podríamos tomar un número finito m de niveles del espectro de partícula independiente y calcular todas las configuraciones posibles de N partículas en dichos niveles. Sin embargo, mediante este procedimiento no conseguiríamos nuestro objetivo sino que obtendríamos una secuencia incompleta de niveles del espectro del sistema. Esto puede entenderse con un ejemplo sencillo.

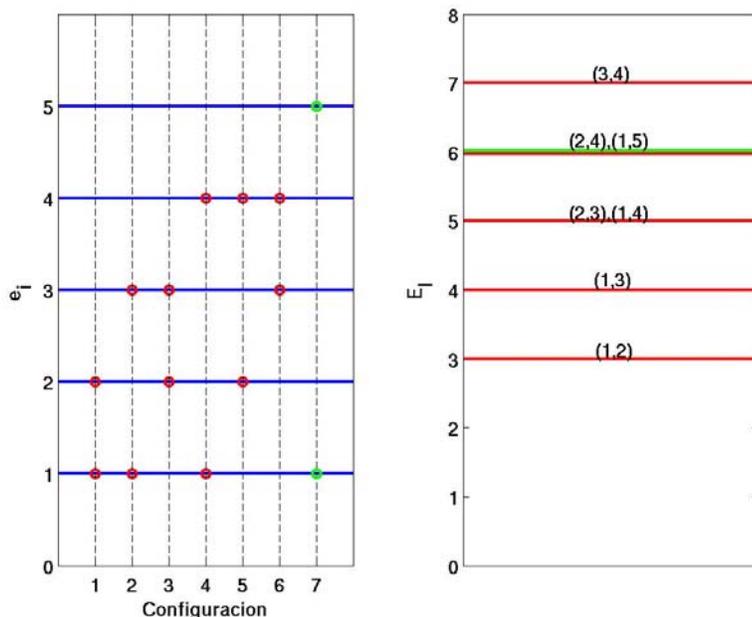


Figura 3.1: Configuraciones posibles de 2 partículas en un espectro de partícula independiente (izquierda) y espectro del sistema de 2 partículas (derecha).

Consideremos un sistema de 2 partículas que vamos a distribuir en $m = 4$ niveles equiespaciados, cuyas energías elegimos por sencillez como $e_i = i$. En la figura 3.1 se representan las configuraciones posibles de las 2 partículas en el espectro de partícula independiente (en rojo) junto con el espectro de niveles del sistema obtenido. Ahora consideremos la configuración en que una de las partículas está en el primer nivel y la otra en el quinto (representada en verde en la figura). La energía de esta configuración vale 6 y, sin embargo, no la estamos teniendo en cuenta, mientras que sí tenemos en cuenta una configuración de energía mayor (la 6: niveles 3^o y 4^o ocupados). Es decir, que hemos perdido un nivel en el espectro del sistema: los $M = 6$ niveles calculados mediante este procedimiento no son los seis primeros niveles sino que son los cinco primeros y el séptimo.

Este problema se soluciona fijando un límite a la energía, que vendrá dado por el número m de niveles considerados: si no consideramos la configuración en que $N - 1$ partículas se encuentran en los $N - 1$ primeros niveles y una en el nivel $m + 1$ no debemos considerar tampoco las configuraciones cuya

energía sea mayor o igual a ésta

$$E_{max} = \sum_{i=1}^{N-1} e_i + e_{m+1}. \quad (3.15)$$

Así obtenemos una secuencia de niveles completa del espectro del sistema de N partículas. De otro modo el análisis de las fluctuaciones no podría llevarse a cabo correctamente.

Para calcular las configuraciones de los M niveles del sistema se implementó un algoritmo en Fortran que fuese generando las posibles configuraciones hasta el límite en energía establecido en cada caso. Para comprobar el correcto funcionamiento del programa se hicieron dos pruebas.

En primer lugar se eliminó la condición del límite en energía, es decir, se calcularon todas las configuraciones posibles de las N partículas en los m niveles considerados. El número de configuraciones total obtenido en este caso debe ser $\binom{m}{N}$, y se comprobó que así era. También se comprobó en casos sencillos (valores bajos de N y m) que las configuraciones obtenidas eran correctas: se construyeron las configuraciones previamente sin ayuda del programa y se comprobó que las obtenidas utilizando el programa coincidían con las primeras.

En segundo lugar se comprobó que, una vez impuesta la condición de energía limitada, comparando con el correspondiente caso de energía sin limitar, las configuraciones eliminadas eran sólo las de energía igual o mayor que el límite.

Una vez comprobado el correcto funcionamiento del programa, éste se modificó para obtener como salida el espectro de niveles del sistema ordenados en orden creciente de energías, que es la forma más práctica para su posterior manejo.

3.3. El reescalado

El paso previo, según hemos visto, a los análisis espectrales es el reescalado del espectro. Para ello necesitamos una expresión de la parte suave de la densidad acumulada de estados, $\overline{m}(E)$, ya que las nuevas energías reescaladas vienen dadas por

$$\varepsilon_i = \overline{m}(E_i). \quad (3.16)$$

Vimos en la sección 2.4 que había varias opciones posibles: o bien la expresión era conocida, o bien se conocía una forma funcional que dependía de una serie

de parámetros, o bien era totalmente desconocida. En nuestro caso vamos a intentar calcular una expresión para la densidad de estados del sistema de N partículas en función de la densidad de estados de una partícula, que es conocida (espectro GOE, GUE o Poisson).

3.3.1. Cálculo de la densidad de estados del sistema

Consideremos el sistema de una sola partícula cuyos autovalores y autoestados son

$$\{e_i, |i\rangle\}_{i \in \mathbb{N}} \quad (3.17)$$

Consideramos que los autoestados forman una base ortonormal:

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.18)$$

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{I}. \quad (3.19)$$

Los estados del sistema de N partículas pueden escribirse como productos directos de los estados de una partícula:

$$|I\rangle = |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle \equiv |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_N\rangle. \quad (3.20)$$

Pero estos estados no son totalmente antisimétricos, como corresponde a un sistema de fermiones. Para obtener los estados antisimétricos aplicamos el operador de antisimetrización a (3.20):

$$|I\rangle_a = \hat{A} |I\rangle, \quad \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^{t_p} \hat{P}, \quad (3.21)$$

donde el sumatorio se extiende a todas las posibles permutaciones de N índices, t_p es el número de transposiciones básicas asociado a la permutación P y \hat{P} es el operador de permutación.

Definiendo los siguientes objetos a partir de un operador \hat{O} :

$$\langle\langle \hat{O} \rangle\rangle = \sum_I \langle I | \hat{O} | I \rangle \quad (3.22)$$

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{N!} \langle\langle \hat{O} \rangle\rangle, \quad (3.23)$$

la densidad de estados puede escribirse:

$$g^{(N)}(E) = \sum_I \delta(E - E_I) = \sum_I \langle I | \delta(E - \hat{H}) | I \rangle = \langle\langle \delta(E - \hat{H}) \rangle\rangle, \quad (3.24)$$

para el caso no antisimetrizado. La densidad antisimetrizada sería entonces, utilizando (3.21),

$$g_a^{(N)}(E) = \left\langle \left\langle \delta(E - \hat{H}) \right\rangle \right\rangle_a = \frac{1}{N!} \left\langle \left\langle \hat{\mathcal{A}}^+ \delta(E - \hat{H}) \hat{\mathcal{A}} \right\rangle \right\rangle = \left\langle \hat{\mathcal{A}}^+ \delta(E - \hat{H}) \hat{\mathcal{A}} \right\rangle. \quad (3.25)$$

Pero teniendo en cuenta

$$[\hat{H}, \hat{\mathcal{A}}] = 0, \quad \hat{\mathcal{A}}^+ \hat{\mathcal{A}} = \sum_P (-1)^{t_p} \hat{\mathcal{P}}, \quad (3.26)$$

la densidad (3.25) queda

$$\begin{aligned} g_a^{(N)}(E) &= \left\langle \sum_P (-1)^{t_p} \hat{\mathcal{P}} \delta(E - \hat{H}) \right\rangle = \frac{1}{N!} \sum_I \left\langle I \left| \sum_P (-1)^{t_p} \hat{\mathcal{P}} \delta(E - \hat{H}) \right| I \right\rangle \\ &= \frac{1}{N!} \sum_I \sum_P (-1)^{t_p} \langle I | \hat{\mathcal{P}} | I \rangle \delta(E - E_I). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Y desarrollando los estados $|I\rangle$ según (3.20):

$$\begin{aligned} g_a^{(N)}(E) &= \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N} \sum_P (-1)^{t_p} \langle i_{p_1}, \dots, i_{p_N} | i_1, \dots, i_N \rangle \delta(E - e_{i_1} - e_{i_2} - \dots - e_{i_N}) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N} \sum_P (-1)^{t_p} \delta_{i_1 i_{p_1}} \delta_{i_2 i_{p_2}} \dots \delta_{i_N i_{p_N}} \delta(E - e_{i_1} - e_{i_2} - \dots - e_{i_N}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde p_1, p_2, \dots, p_N representa una determinada permutación de $1, 2, \dots, N$ y en la segunda igualdad se ha utilizado la ecuación (3.18).

A partir de ahora suprimiremos el subíndice a de la densidad, que indica antisimetrización. Dado que todas las densidades que aparecerán serán antisimetrizadas no hay posibilidad de confusión.

Aplicando la ecuación (3.28) a los casos de 2, 3 y 4 partículas se llega a

las siguientes expresiones (apéndice B):

$$g^{(2)}(E) = \frac{1}{2} \rho(E) * \rho(E) - \frac{1}{4} \rho(E/2) \quad (3.29)$$

$$g^{(3)}(E) = \frac{1}{3!} \left[\rho(E) * \rho(E) * \rho(E) - \frac{3}{2} \rho(E/2) * \rho(E) + \frac{2}{3} \rho(E/3) \right] \quad (3.30)$$

$$g^{(4)}(E) = \frac{1}{4!} \left[\rho(E) * \rho(E) * \rho(E) * \rho(E) - \frac{6}{2} \rho(E/2) * \rho(E) * \rho(E) + \frac{8}{3} \rho(E/3) * \rho(E) + \frac{3}{4} \rho(E/2) * \rho(E/2) - \frac{6}{4} \rho(E/4) \right], \quad (3.31)$$

donde $*$ indica producto de convolución y $\rho(E)$ es la densidad de estados de una partícula.

En el apéndice B se deduce también, a partir de estos cálculos, una expresión general para la densidad de estados del sistema de N partículas.

3.3.2. Parte suave de la densidad de estados del sistema

La parte suave de la densidad de estados se calcula como el promedio de ésta sobre la colectividad.

En la sección anterior hemos escrito la densidad de estados para varias partículas en función de la densidad de estados de una partícula. Por tanto, en primer lugar vamos a definir la densidad de una partícula que vamos a utilizar. Ya hemos señalado que utilizaremos espectros de una partícula tipo GOE, GUE y Poisson. Pero antes de calcular el espectro del sistema realizamos el reescalado del espectro de una partícula, es decir, que la densidad media del mismo es igual a 1. Además, la densidad estará definida en el eje positivo de energías. Por tanto:

$$\rho(E) = \bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E) = \begin{cases} 0, & E < 0 \\ 1 + \tilde{\rho}(E), & E \geq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

En este caso haremos una excepción a la notación que venimos empleando hasta ahora. A pesar de que el espectro de una partícula está reescalado utilizaremos E como variable en lugar de ε . Debemos utilizar E como variable para la densidad de estados de N partículas, ya que el espectro en este caso está todavía sin reescalar. Por tanto, las funciones que aparezcan en la

expresión de la densidad de N partículas tendrán como variable E ; y como la densidad de una partícula $\rho(E)$ aparece en esta expresión, en este caso E debe interpretarse como la variable de la energía del sistema de N partículas y no como la energía sin reescalar del sistema de una partícula.

Caso $N = 2$

En la sección anterior obtuvimos para la densidad de estados del sistema de dos partículas la siguiente expresión:

$$g^{(2)}(E) = \frac{1}{2} \rho(E) * \rho(E) - \frac{1}{4} \rho(E/2). \quad (3.33)$$

Sustituyendo en ella la expresión de $\rho(E)$ (3.32) se obtiene

$$\begin{aligned} g^{(2)}(E) &= \frac{1}{2} [\bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E)] * [\bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E)] - \frac{1}{4} [\bar{\rho}(E/2) + \tilde{\rho}(E/2)] \\ &= \frac{1}{2} \bar{\rho}(E) * \bar{\rho}(E) - \frac{1}{4} \bar{\rho}(E/2) + \frac{1}{2} \tilde{\rho}(E) * \tilde{\rho}(E) + \bar{\rho}(E) * \tilde{\rho}(E) \\ &\quad - \frac{1}{4} \tilde{\rho}(E/2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

En la última igualdad debemos identificar la parte suave y la parte fluctuante de $g^{(2)}(E)$. Podríamos pensar que la parte suave son sólo los dos primeros sumandos, es decir,

$$\overline{g^{(2)}}(E) = \frac{1}{2} \bar{\rho}(E) * \bar{\rho}(E) - \frac{1}{4} \bar{\rho}(E/2) = \frac{1}{2} E - \frac{1}{4}, \quad E \geq 0. \quad (3.35)$$

Para $E < 0$ se obtiene $\overline{g^{(2)}}(E) = 0$, y lo mismo sucede con el resto de valores de N . Por tanto, todas las expresiones de $\overline{g^{(N)}}(E)$ que se den a partir de ahora serán para $E \geq 0$.

Sin embargo, a pesar de que por definición las fluctuaciones promedian a cero, el tercer sumando contiene un producto de dos partes fluctuantes, $\tilde{\rho}(E) * \tilde{\rho}(E)$, que puede dar una contribución no nula a la parte suave. De hecho, así es, como se demuestra en el apéndice B, calculando la parte suave de $g^{(2)}(E)$ directamente como el promedio de la expresión (3.33):

$$\overline{g^{(2)}}(E) = \frac{1}{2} \overline{\rho(E) * \rho(E)} - \frac{1}{4} \bar{\rho}(E/2) \quad (3.36)$$

Una vez calculada la expresión explícita se particulariza para los casos de espectros GUE, GOE y Poisson, obteniendo las siguientes expresiones:

$$\overline{g^{(2)}}_{\text{GUE}}(E) = \frac{E}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1 - \cos(2\pi E) - 2\pi E \text{si}(2\pi E)}{2\pi^2 E}, \quad (3.37)$$

$$\overline{g^{(2)}}_{\text{GOE}}(E) = \frac{E}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1 + \text{si}(\pi E)\text{sen}(\pi E) - \cos(2\pi E) - 2\pi E \text{si}(2\pi E)}{\pi^2 E}, \quad (3.38)$$

$$\overline{g^{(2)}}_{\text{Poisson}}(E) = \frac{E}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{E}{2}, \quad (3.39)$$

donde *si* es la función seno integral definida en el apéndice B. En las tres podemos identificar la parte proveniente de la parte suave de $\rho(E)$, que coincide con la ecuación (3.35). En el caso de Poisson la parte proveniente de la parte fluctuante de $\rho(E)$ es muy sencilla, es una constante ($1/4$). Sin embargo, en los otros dos casos (GUE y GOE) es una función bastante complicada. Si pudiésemos olvidarnos de esa parte la densidad de dos partículas sería simplemente una función lineal en E , y la densidad acumulada, que es la que utilizamos para reescalar, sería una función cuadrática:

$$\overline{m^{(2)}}(E) = \int_0^E dx \overline{g^{(2)}}(x) = \int_0^E dx \left(\frac{E}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{E^2}{4} - \frac{E}{4}, \quad (3.40)$$

que es mucho más sencilla. A continuación veremos que la densidad se complica aún mucho más en los casos de tres y cuatro partículas e intentaremos encontrar argumentos que nos permitan simplificar los cálculos.

En este caso de dos partículas, que será el único en que realicemos el cálculo exacto de la parte suave de la densidad, podemos estudiar la importancia relativa de las correcciones a la primera aproximación (parte proveniente de la parte suave de $\rho(E)$) en las expresiones (3.37), (3.38) y (3.39). En primer lugar podemos representar las tres expresiones junto con la primera aproximación (ecuación (3.35)). En la figura 3.2 se muestra dicha representación en el rango de energía $[0, 10]$ (izquierda) y una ampliación de la misma en el intervalo $[0, 2]$ (derecha). Se observa claramente que, excepto a energías muy bajas, todas las curvas son muy parecidas ¹. De hecho, calculando la diferencia entre la curva correspondiente al GOE o al GUE y la correspondiente a la aproximación se obtiene que para $E = 10$ ésta ya es del orden de 10^{-3} .

¹La curva de Poisson está más separada, ya que tiene una diferencia de $1/4$ con la aproximación. Pero esto no es importante, ya que en adelante veremos que la parte de las densidades de estados que nos interesa eliminar es aquella que no pueda escribirse como un polinomio de grado $N - 1$

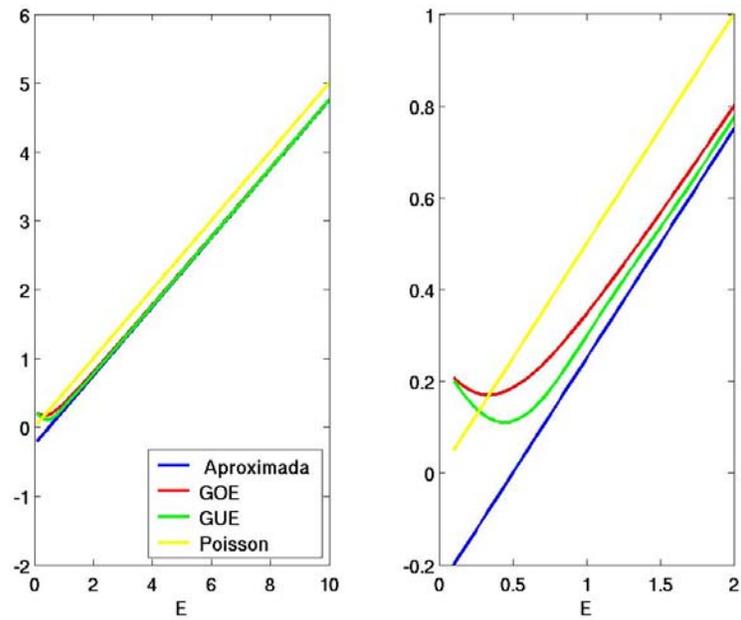


Figura 3.2: Parte suave de la densidad de estados del sistema de 2 partículas: aproximación (parte proveniente de la parte suave de $\rho(E)$) y curvas exactas para GOE, GUE y Poisson.

Por otro lado, podemos calcular los desarrollos asintóticos de las correcciones, $\overline{g_c^{(2)}}(E)$, obteniendo

$$\overline{g_c^{(2)}}(E) = \frac{\text{sen}^2(\pi E)}{\pi^2 E} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\pi^2 E^2}\right) \quad (3.41)$$

para el caso del GUE, y

$$\overline{g_c^{(2)}}(E) = \frac{1}{\pi^2 E} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\pi^3 E^2}\right) \quad (3.42)$$

para el del GOE. Es decir, que, comparadas con la aproximación de la ecuación (3.35), las correcciones son muy pequeñas para energía suficientemente alta.

Lo único importante a tener en cuenta es que nos encontremos en una zona del espectro donde la energía no sea muy baja, ya que las correcciones podrían ser importantes. Pero según veremos más adelante, una vez construido el espectro del sistema de N partículas eliminaremos un cierto número de niveles del principio de la secuencia, de manera que la energía del espectro analizado no será muy baja.

Caso $N = 3$

Para la densidad de estados de tres partículas obtuvimos la siguiente expresión:

$$g^{(3)}(E) = \frac{1}{3!} \left[\rho(E) * \rho(E) * \rho(E) - \frac{3}{2} \rho(E/2) * \rho(E) + \frac{2}{3} \rho(E/3) \right]. \quad (3.43)$$

La parte suave es, por tanto:

$$\overline{g^{(3)}}(E) = \frac{1}{3!} \left[\overline{\rho(E) * \rho(E) * \rho(E)} - \frac{3}{2} \overline{\rho(E/2) * \rho(E)} + \frac{2}{3} \overline{\rho(E/3)} \right]. \quad (3.44)$$

Si consideramos, como en el caso $N = 2$, una primera aproximación en la que la parte suave de $g^{(3)}(E)$ viene dada sólo por las contribuciones de la parte suave de $\rho(E)$ tendríamos (apéndice B)

$$\overline{g^{(3)}}(E) = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} - \frac{3}{2}E + \frac{2}{3} \right]. \quad (3.45)$$

La densidad acumulada sería entonces

$$\overline{m^{(3)}}(E) = \int_0^E dx \overline{g^{(3)}}(x) = \int_0^E dx \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} - \frac{3}{2}E + \frac{2}{3} \right] \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{3!} \left[\frac{E^3}{6} - \frac{3}{4}E^2 + \frac{2}{3}E \right]. \quad (3.47)$$

Considerando el cálculo completo de la ecuación (3.44) llegamos a (apéndice B)

$$\overline{g^{(3)}}(E) = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} - \frac{3}{2}E + \frac{2}{3} + \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \xi_3(\eta, \lambda - \eta, E - \lambda) - \frac{3}{2} \int_0^E d\eta \xi_2(\eta/2, E - \eta) \right], \quad (3.48)$$

donde ξ_3 y ξ_2 son funciones cuyas expresiones se dan en el apéndice B.

Nuevamente el caso de Poisson es el más sencillo (apéndice B):

$$\overline{g^{(3)}}(E) = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} - \frac{3}{2}E + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}E + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} + 1 \right] \quad (3.49)$$

$$\overline{m^{(3)}}(E) = \int_0^E dx \overline{g^{(3)}}(x) = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^3}{6} + E \right]. \quad (3.50)$$

En cambio, en el caso del GUE las expresiones de ξ_3 y ξ_2 resultan muy complicadas y en el del GOE las funciones necesarias para calcularlas ni siquiera pueden encontrarse en la literatura en forma explícita y manejable. Es evidente que al ir considerando más partículas los cálculos van a complicarse cada vez más. Lo que vamos a intentar entonces es evitar el cálculo de estas expresiones provenientes de la parte fluctuante de $\rho(E)$ sin cometer un error muy grande.

En el apéndice B se consideran las integrales de ξ_3 y ξ_2 que aparecen en (3.48) para el caso del GUE. Pero en lugar de calcularlas explícitamente se trata de encontrar cotas inferiores y superiores para las mismas. Y se demuestra que ambas pueden quedar acotadas entre dos polinomios que son a lo sumo de grado 2. Entonces, la contribución de estas integrales a la parte suave de la densidad acumulada quedaría acotada entre polinomios a lo sumo de grado 3. Pero hemos visto que la parte suave de la densidad acumulada en la primera aproximación es también un polinomio de grado 3 (ecuación (3.47)). Por tanto, no cometeríamos mucho error si realizamos el

reescalado ajustando la densidad acumulada del sistema de tres partículas a un polinomio de grado 3:

$$\overline{m^{(3)}}(E) = a_3 E^3 + a_2 E^2 + a_1 E + a_0. \quad (3.51)$$

De cualquier manera, además de estos argumentos teóricos, podemos comprobar numéricamente la bondad del ajuste a una función de este tipo cuando realicemos el reescalado.

Caso $N = 4$

A partir de la expresión obtenida para la densidad de estados de cuatro partículas (3.31) puede obtenerse en primera aproximación (considerando la parte proveniente sólo de la parte suave de $\rho(E)$) la parte suave de la misma (apéndice B) y ésta resulta ser un polinomio de grado 3. La parte suave de la densidad acumulada es entonces un polinomio de grado 4.

Análogamente al caso de tres partículas, se da también en el apéndice B la expresión de la contribución a la parte suave de la densidad proveniente de la parte fluctuante de $\rho(E)$ y se demuestra que ésta puede quedar acotada entre dos polinomios que son a lo sumo de grado 3. Por tanto, la contribución a la parte suave de la densidad acumulada queda acotada entre dos polinomios que son a lo sumo de grado 4. Así, en este caso podemos realizar el reescalado ajustando la densidad acumulada del sistema con un polinomio de grado 4:

$$\overline{m^{(4)}}(E) = a_4 E^4 + a_3 E^3 + a_2 E^2 + a_1 E + a_0. \quad (3.52)$$

Caso general

La parte suave de la densidad de estados del sistema de N partículas viene dada, en primera aproximación, por un polinomio de grado $N - 1$. Esto puede deducirse fácilmente a partir de la expresión general para la densidad de estados (apéndice B)

$$g^{(N)}(E) = \sum_K (-1)^{t_k} \frac{a_k}{\prod_{i=1}^r c_{k_i}} \rho(E/c_{k_1}) * \rho(E/c_{k_2}) * \cdots * \rho(E/c_{k_r}). \quad (3.53)$$

La parte suave de la densidad sería entonces

$$\overline{g^{(N)}}(E) = \sum_K (-1)^{t_k} \frac{a_k}{\prod_{i=1}^r c_{k_i}} \overline{\rho(E/c_{k_1}) * \rho(E/c_{k_2}) * \cdots * \rho(E/c_{k_r})}. \quad (3.54)$$

Pero en primera aproximación ésta sería

$$\overline{g^{(N)}}(E) = \sum_K (-1)^{t_k} \frac{a_k}{\prod_{i=1}^r c_{k_i}} \overline{\rho}(E/c_{k_1}) * \overline{\rho}(E/c_{k_2}) * \cdots * \overline{\rho}(E/c_{k_r}). \quad (3.55)$$

El máximo valor que puede tomar r es N y, por tanto, el mayor número de productos de convolución que puede contener un término es $N - 1$. Teniendo en cuenta que $\overline{\rho}(E) = 1$ es obvio que $\overline{g^{(N)}}(E)$ es un polinomio de grado $N - 1$. Entonces la parte suave de la densidad acumulada $\overline{m^{(N)}}(E) = \int_0^E \overline{g^{(N)}}(x) dx$ será un polinomio de grado N .

Ahora bien, si se considera el cálculo completo de la expresión (3.54), siguiendo el procedimiento del apéndice B para tres y cuatro partículas se obtendrían integrales de expresiones que contienen funciones δ de Dirac y funciones de correlación (R_k) o agrupamiento (Y_k) a k puntos, siendo $k \leq N$. Para el caso de Poisson sabemos que $R_k(E_1, E_2, \dots, E_k) = 1 \quad \forall k$ y la parte suave de la densidad de estados seguiría siendo entonces un polinomio de grado $N - 1$. Para el caso del GUE las funciones R_k tienen expresiones más complicadas pero pueden acotarse siempre entre dos constantes. Entonces, de la misma manera que se hizo en el apéndice B para los casos de tres y cuatro partículas, podrían acotarse sin dificultad aunque con gran esfuerzo las contribuciones de la parte proveniente de la parte fluctuante de $\rho(E)$ entre dos polinomios a lo sumo de grado $N - 1$. Por tanto, las contribuciones a la parte suave de la densidad acumulada quedarían acotadas entre dos polinomios a lo sumo de grado N . Entonces esperaríamos no cometer un gran error reescalando el espectro del sistema de N partículas mediante un ajuste de la densidad acumulada del mismo a un polinomio de grado N .

Lo que haremos será realizar el reescalado de esta manera e iremos viendo para los distintos números de partículas ($N = 2 - 6$) y los distintos tipos de espectro (GOE, GUE y Poisson) cómo de buenos son los ajustes realizados y si podemos considerar entonces que estamos llevando a cabo un reescalado razonablemente correcto.

Volviendo al caso de dos partículas, podemos analizar un poco más en profundidad el método que hemos utilizado para encontrar las cotas a la parte de la densidad proveniente de la parte fluctuante de $\rho(E)$, ya que en ese caso son conocidas las expresiones exactas. Por ejemplo, en el caso del GUE, las cotas resultan ser

$$\frac{1}{4} - \frac{E}{2} \leq \overline{g_c^{(2)}}(E) \leq \frac{1}{4}. \quad (3.56)$$

Por tanto, diríamos que la parte suave de la densidad, que es la suma de la ecuación (3.35) y la corrección, queda acotada por

$$0 \leq \overline{g^{(2)}}(E) \leq \frac{E}{2}. \quad (3.57)$$

Y según vemos en la figura 3.2 estas cotas son bastante burdas. La corrección no es del orden de la aproximación sino que es mucho más pequeña que ésta. Por tanto, probablemente el resto de cotas encontradas para los casos de tres y cuatro partículas sean también muy burdas y las correcciones sean realmente mucho más pequeñas.

3.4. Estudio de las propiedades de las fluctuaciones del espectro del sistema

En esta sección se exponen los resultados del estudio de las fluctuaciones de los distintos espectros de sistemas de N partículas en términos de los estadísticos descritos en las secciones 2.3.1 y 2.5.

De ahora en adelante trabajaremos con 15 espectros: para cada uno de los 3 espectros de partícula independiente generamos 5 espectros de sistemas de N partículas, con $N = 2 - 6$. La notación será la siguiente: E.p.i.(espectro de partícula independiente)- N (número de partículas). Así, por ejemplo, con GOE-2 nos referiremos al sistema de 2 partículas cuyo espectro de partícula independiente es de tipo GOE.

Para construir cada uno de los espectros del sistema se toma un número m de niveles del espectro de partícula independiente tal que el número de niveles del espectro del sistema de N partículas sea aproximadamente $M \simeq 1.000.000$. De esta manera tenemos un número suficientemente grande de niveles para que al realizar promedios espectrales la estadística sea significativa.

En la tabla 3.1 se muestran los números m de niveles utilizados para generar cada uno de los 15 espectros y las dimensiones M de los espectros obtenidos. A continuación se eliminan los primeros niveles de cada espectro de manera que todos tengan la misma dimensión, $M = 1.000.000$.

El siguiente paso, previo al análisis de las fluctuaciones, es el reescalado del espectro. Dado que el estudio de los estadísticos se realiza en términos de promedios espectrales, en primer lugar tenemos que dividir el espectro en

	GOE				
N	2	3	4	5	6
m	2003	330	153	103	83
M	1.002.878	1.009.585	1.011.440	1.023.002	1.059.512
	GUE				
N	2	3	4	5	6
m	2001	328	152	103	84
M	1.001.347	1.001.139	1.020.148	1.012.444	1.010.883
	Poisson				
N	2	3	4	5	6
m	1995	312	142	106	90
M	1.005.805	1.002.614	1.017.184	1.018.528	1.017.054

Tabla 3.1: Número de partículas, N , número de niveles del espectro de partícula independiente, m , y dimensión del espectro del sistema, M , de los 15 casos estudiados.

varios intervalos. En este caso dividiremos el espectro de 1.000.000 de niveles en 100 intervalos de 10.000. Sin embargo, es más conveniente realizar el reescalado en intervalos más grandes que los utilizados para los promedios espectrales, ya que el mal comportamiento de los polinomios de ajuste en los bordes de los intervalos puede dar lugar a efectos espurios en los estadísticos. Así, si utilizamos 10 intervalos de 100.000 niveles para realizar el reescalado y luego dividimos cada uno de los intervalos resultantes en 10 intervalos de 10.000 niveles, tenemos los 100 intervalos de 10.000 niveles sobre los que realizar los promedios espectrales y evitamos en gran medida los efectos de los bordes. Además, los intervalos en los que se realiza el reescalado deben ser lo suficientemente grandes como para tener la seguridad de que estamos ajustando sólo la parte suave de la densidad, ya que si el reescalado se realiza en intervalos muy pequeños puede ser que cada uno de los ajustes esté incluyendo parte de las fluctuaciones del correspondiente intervalo.

Según se explicó en la sección 3.3.2, puede considerarse en primera aproximación que la parte suave de la densidad acumulada del sistema de N partículas es un polinomio de grado N . Para comprobar que la aproximación es buena representamos la densidad acumulada para cada uno de los 15 espectros estudiados y la ajustamos a un polinomio de grado N . El resultado es que la densidad acumulada se ajusta muy bien al polinomio de grado N

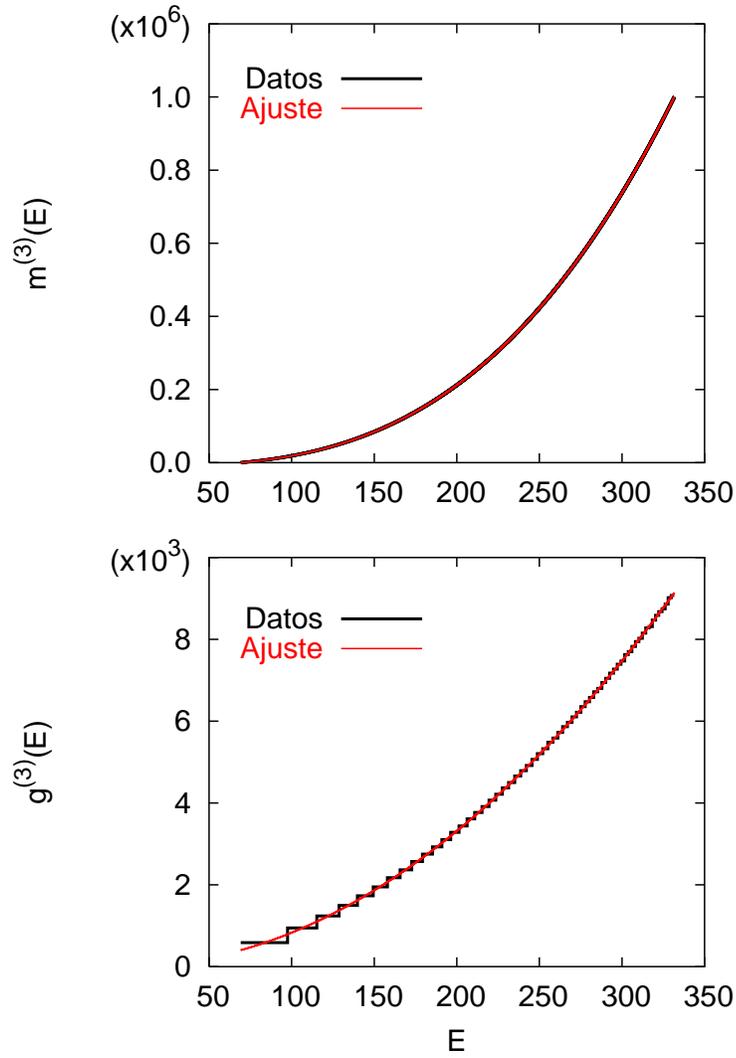


Figura 3.3: Ajustes por polinomios de la densidad de estados, $g^{(3)}(E)$, y la densidad acumulada, $m^{(3)}(E)$, del espectro GOE-3.

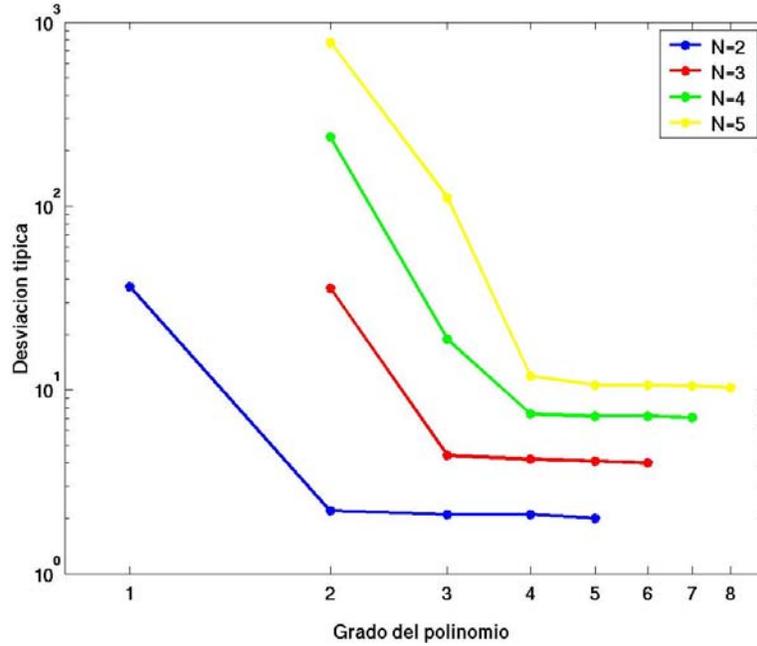


Figura 3.4: Desviación típica del ajuste de la densidad acumulada de los espectros GOE- N ($N = 2 - 5$) a polinomios de distintos grados.

en todos los casos. Como ejemplo se muestra el caso del espectro GOE-3 en la figura 3.3. La gráfica superior muestra el ajuste de la densidad acumulada, $m^{(3)}(E)$, a un polinomio de grado 3, $\overline{m^{(3)}}(E)$; la gráfica inferior muestra la densidad de estados, $g^{(3)}(E)$, con la curva de ajuste que corresponde a la derivada de la curva de ajuste de la densidad acumulada.

Además de lo que puede verse en las figuras se realizó la siguiente comprobación: se realizaron para cada uno de los 15 casos, además del ajuste al polinomio de grado N , ajustes a polinomios de grado $2, \dots, N - 1, N + 1, N + 2$ y $N + 3$. Se calculó el valor de la desviación típica

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^M (m^{(N)}(E_i) - \overline{m^{(N)}}(E_i))^2} \quad (3.58)$$

para cada uno de los ajustes y se observó que éste iba disminuyendo hasta llegar al polinomio de grado N pero se mantenía constante para los polinomios de grado $\geq N$, lo que indica que el ajuste al polinomio de grado N es

mejor que los de grados inferiores pero a partir de N en adelante el ajuste no mejora significativamente. La gráfica 3.4 muestra los valores de la desviación típica para los casos GOE- N ($N = 2 - 5$).

3.4.1. La distribución de espaciamientos a primeros vecinos

La distribución de espaciamientos a primeros vecinos $P(s)$ se calculó para cada uno de los espectros del sistema como el histograma resultante de distribuir los espaciamientos, $s_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$, en 20 intervalos desde $s = 0$ hasta un espaciamiento máximo $s_{max} = 6$.

Puede definirse también la distribución de espaciamientos integrada como

$$I(s) = \int_0^s P(x)dx. \quad (3.59)$$

En las figuras que se mostrarán a continuación la distribución de espaciamientos está normalizada, es decir:

$$\int_0^{s_{max}} P(s)ds = 1 \quad (3.60)$$

$$(3.61)$$

La curva y el histograma negros corresponden a las distribuciones calculadas a partir de los espectros. La curva verde es la correspondiente a la estadística de Poisson (2.8) y la azul es la curva de Wigner para GOE o GUE (2.9). La curva roja corresponde a un ajuste a la función de Brody (2.11), que interpola entre la distribución de Poisson ($\nu = 0$) y la de Wigner para el GOE ($\nu = 1$).

Espectro de partícula independiente tipo GOE

En la figura 3.5 se representa la distribución de espaciamientos a primeros vecinos para el espectro de partícula independiente tipo GOE. En ella se observa que el ajuste coincide prácticamente con la curva teórica de la distribución de Wigner para el GOE (ambas curvas están casi superpuestas). El parámetro de Brody resultado del ajuste es $\nu = 0.961 \pm 0.009$, que está en buen acuerdo con el valor predicho para la colectividad GOE ($\nu = 0.957$ [28]). El valor sería mucho más exacto si se hubiese considerado el promedio de muchos espectros en lugar de uno solo, pero en este caso el único interés está en

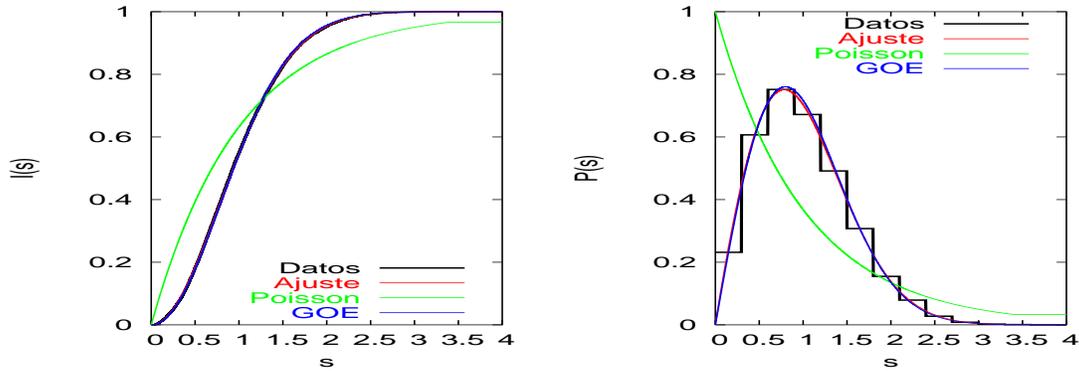


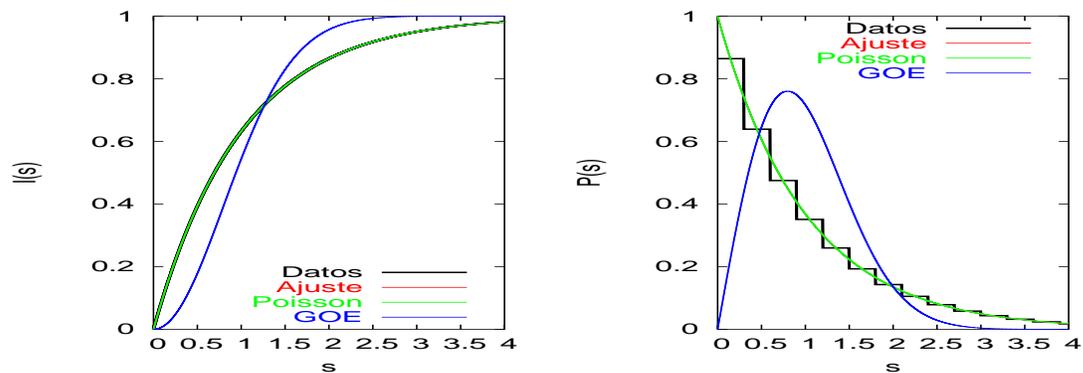
Figura 3.5: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente tipo GOE.

N	ν
2	0.0000 ± 0.0003
3	0.000 ± 0.004
4	0.00000 ± 0.00007
5	0.000 ± 0.004
6	0.0000 ± 0.0001

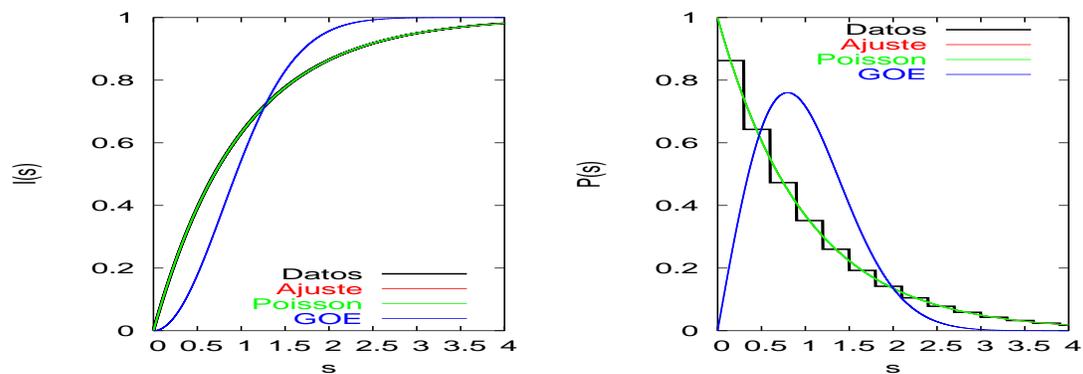
Tabla 3.2: Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas GOE- N .

ver cualitativamente cómo es la forma de la distribución de espaciamientos del espectro de partícula independiente para luego compararla con las distribuciones de espaciamientos de los espectros de sistemas de N partículas a que da lugar.

En la figura 3.6 se representan los casos GOE-2 y GOE-3, el resto son prácticamente iguales. En ella puede verse que las fluctuaciones siguen claramente la estadística de Poisson (la curva de ajuste coincide prácticamente con la curva teórica de Poisson, ambas apenas se distinguen). En la tabla 3.2 se muestran además los valores del parámetro de Brody, ν , donde puede verse que todos son muy próximos a 0.



(a)



(b)

Figura 3.6: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros GOE-2 (a) y GOE-3 (b).

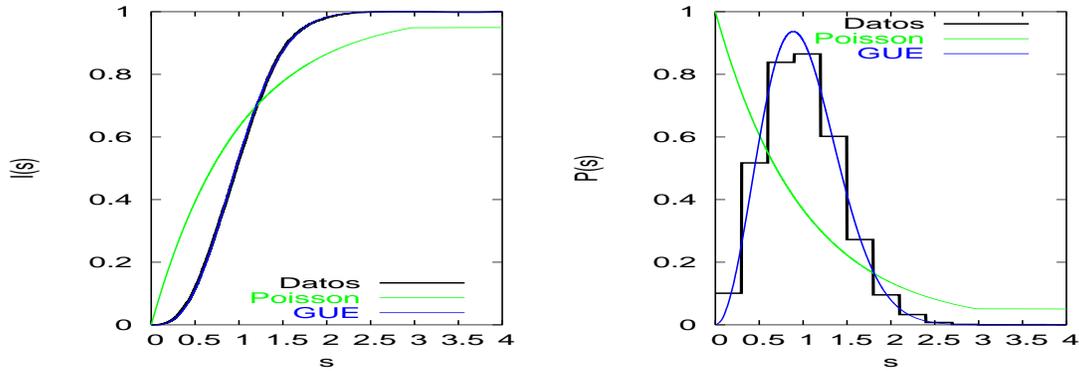


Figura 3.7: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente tipo GUE.

N	ν	
2	0.001	± 0.004
3	0.001	± 0.004
4	0.00000	± 0.00007
5	0.00000	± 0.00006
6	0.00000	± 0.00005

Tabla 3.3: Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas GUE- N .

Espectro de partícula independiente tipo GUE

En la figura 3.7 se representa la distribución de espaciamientos a primeros vecinos para el espectro de partícula independiente tipo GUE. Observamos que la curva teórica para el GUE se ajusta bastante bien a la distribución. En este caso no tiene sentido un ajuste a la función de Brody, ya que esta interpola únicamente entre los casos Poisson y GOE.

En la figura 3.8 se representan los casos GUE-2 y GUE-3, el resto son prácticamente iguales. En ella puede verse que las fluctuaciones siguen de nuevo claramente la estadística de Poisson. En la tabla 3.3 se muestran además los valores del parámetro de Brody, ν , donde puede verse que todos son muy próximos a 0.

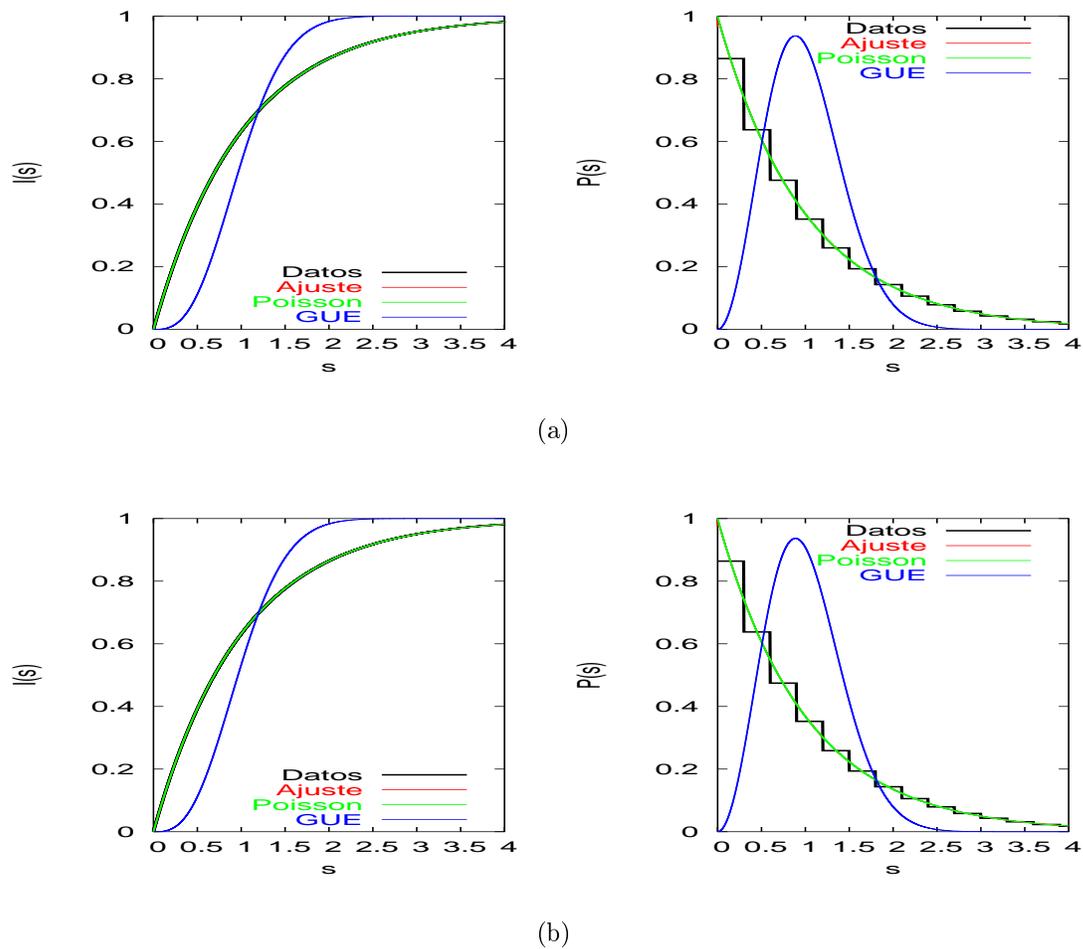


Figura 3.8: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros GUE-2 (a) y GUE-3 (b).

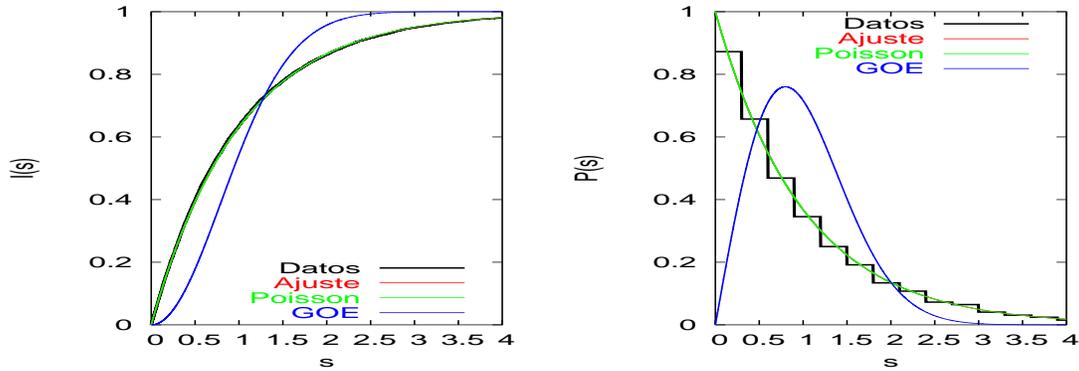


Figura 3.9: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente tipo Poisson.

N	ν
2	0.00000 \pm 0.00005
3	0.00000 \pm 0.00003
4	0.001 \pm 0.003
5	0.008 \pm 0.003
6	0.00000 \pm 0.00007

Tabla 3.4: Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas Poisson- N .

Espectro de partícula independiente tipo Poisson

En la figura 3.9 se representa la distribución de espaciamientos a primeros vecinos para el espectro de partícula independiente tipo Poisson. En este caso el ajuste a la función de Brody coincide con la ley de Poisson. El parámetro de Brody obtenido es $\nu = 0.0000 \pm 0.0003$.

En la figura 3.10 se representan los casos Poisson-2 y Poisson-3, el resto son prácticamente iguales. Nuevamente las fluctuaciones siguen la estadística de Poisson. En la tabla 3.4 se muestran también los valores del parámetro de Brody, ν , donde puede verse que todos son muy próximos a 0.

La conclusión a la que llegamos entonces tras el análisis de este estadístico es que, en lo que se refiere a las correlaciones de corto alcance, las propiedades del espectro de partícula independiente no se trasladan al espectro del sistema, sino que éste presenta las propiedades propias de un espectro tipo

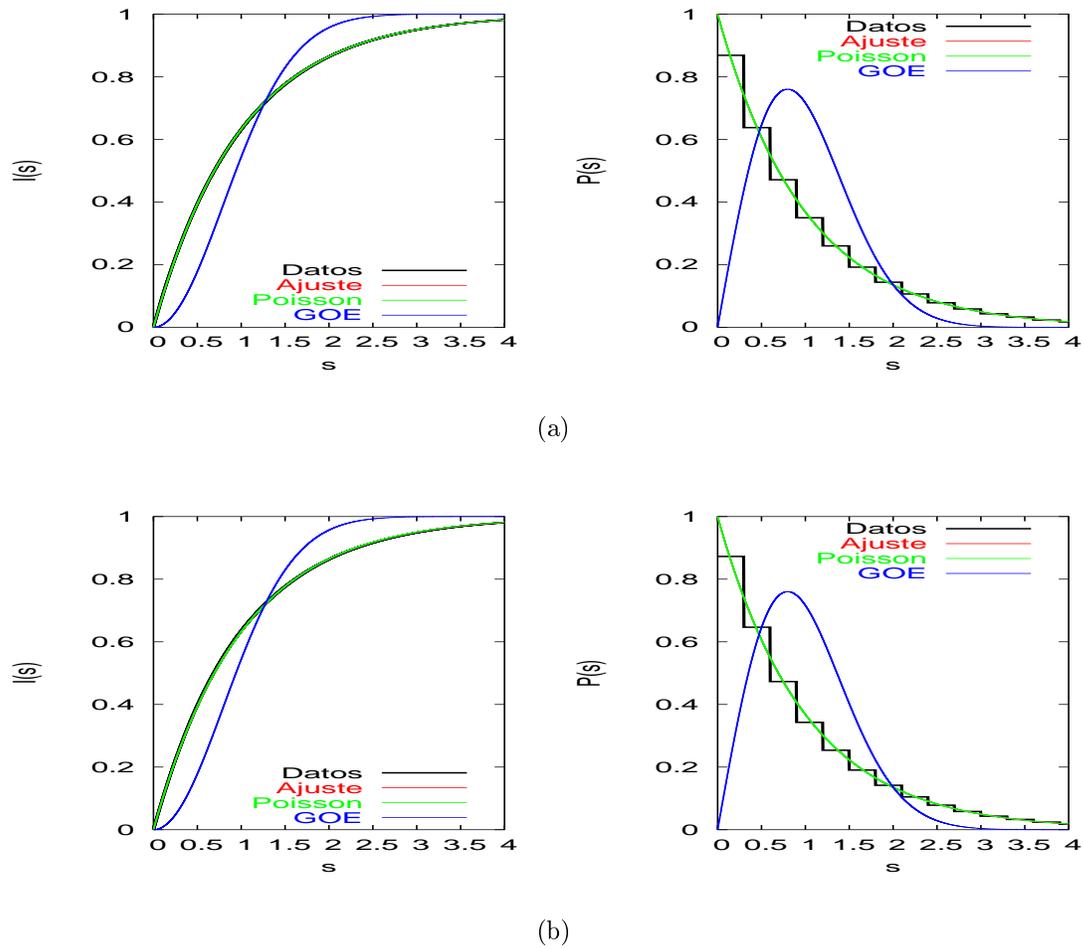


Figura 3.10: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros Poisson-2 (a) y Poisson-3 (b).

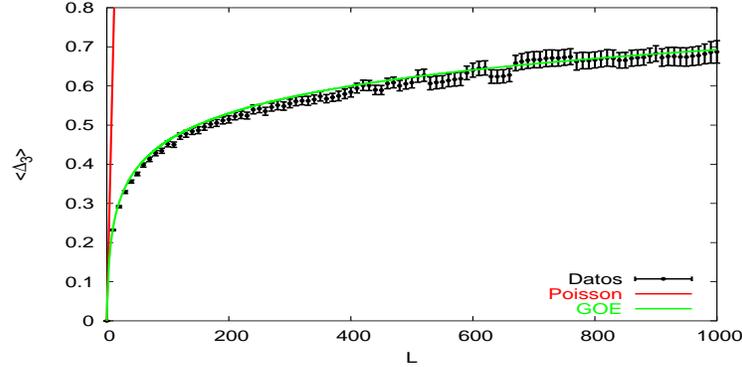


Figura 3.11: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente tipo GOE.

Poisson independientemente del tipo de espectro de partícula independiente a partir del cual se ha generado. Es decir, independientemente del tipo de correlaciones que presente el espectro de partícula independiente, estas desaparecen en el espectro del sistema, que se comporta como uno de niveles descorrelacionados.

3.4.2. La rigidez espectral

Este estadístico nos permite estudiar, según se explicó en la sección 2.3.1, las correlaciones de largo alcance.

Para calcular $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para un valor de L dado hay que tomar, según vimos en 2.3.1, varios intervalos de longitud L en el espectro. El programa utilizado en el cálculo permite establecer unos valores mínimo y máximo para el número de intervalos de longitud L a considerar. Estos dos valores se tomaron como $Min = 10$ y $Max = 1000$, de manera que para valores pequeños de L el número de intervalos será grande e irá decreciendo a medida que aumenta el valor de L . $\langle \Delta_3(L) \rangle$ se calculó para valores entre $L = 10$ y $L = 1000$ con un intervalo de $\Delta L = 10$.

El cálculo de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para cada espectro del sistema de N partículas se llevó a cabo en cada uno de los 100 intervalos de 10.000 niveles en que fue dividido tras el reescalado. Y una vez calculada para cada uno de los 100 intervalos se realiza el promedio, punto a punto, de las 100 funciones $\langle \Delta_3(L) \rangle$ obtenidas.

Espectro de partícula independiente tipo GOE

En la figura 3.11 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ calculada para el espectro de partícula independiente tipo GOE, junto con las curvas teóricas del GOE (2.17) y de Poisson (2.16). En ella puede observarse claramente cómo la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ crece mucho más rápido en el caso de Poisson que en el del GOE, según se señaló en la sección 2.3.1.

En la figura 3.12 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para los casos GOE-2 y GOE-3. Todos los casos ($N = 2 - 6$) son muy similares. Observamos que los puntos se aproximan bastante a la curva de Poisson y están muy lejos de la curva del GOE, que queda muy cerca del eje de abscisas ya que para los valores más altos de L hay una diferencia entre ambas de 2 órdenes de magnitud aproximadamente. Parece que el acuerdo es mejor para los valores más bajos de L y se observan pequeñas desviaciones para los valores más altos.

Estas desviaciones pueden tener que ver con el reescalado. Aunque hemos visto que la aproximación de la parte suave de la densidad acumulada por polinomios es buena, no deja de ser una aproximación y, como vimos en la sección 2.4, un reescalado incorrecto puede introducir correlaciones de largo alcance ficticias.

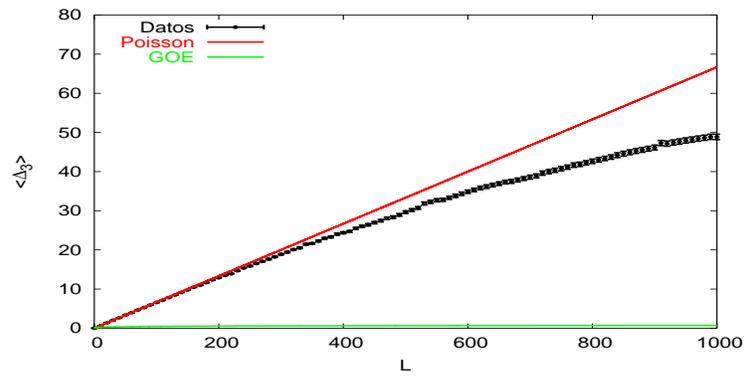
O bien puede ser simplemente que como el número de intervalos utilizado para calcular $\langle \Delta_3(L) \rangle$ disminuye con L , para los valores altos de L la estadística es más pobre y los valores de $\langle \Delta_3(L) \rangle$ menos fiables.

Por último, sucede que en el caso en que la curva teórica es la correspondiente a Poisson, es lógico que las desviaciones sean mayores que en otros casos, debido a que la varianza de la $\Delta_3(L)$ es bastante grande (del orden de la propia $\langle \Delta_3(L) \rangle$) en ese caso, según se explicará en la última parte de esta sección.

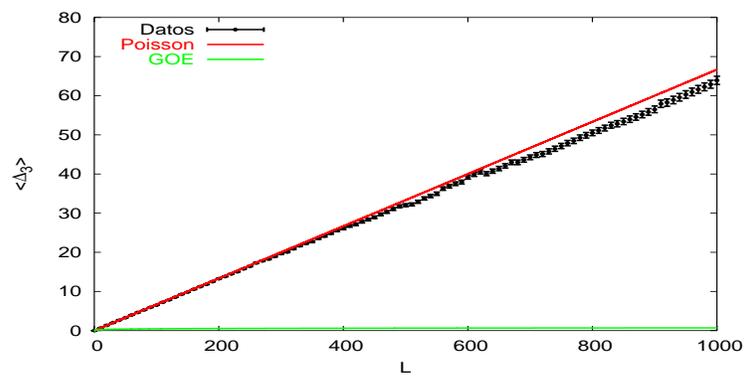
Espectro de partícula independiente tipo GUE

En la figura 3.13 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ calculada para el espectro de partícula independiente tipo GUE, junto con las curvas teóricas del GUE y de Poisson. Aquí también puede observarse cómo la curva del GUE crece mucho más despacio que la de Poisson. Pero además, si la comparamos con la figura 3.11 del espectro GOE podemos ver que el crecimiento en el caso del GUE es ligeramente inferior al del GOE. Esto también es lógico teniendo en cuenta el significado de este estadístico, que se explicó en la sección 2.3.1.

Vimos que la rigidez espectral tiene que ver con la repulsión de niveles,



(a)



(b)

Figura 3.12: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros GOE-2 (a) y GOE-3 (b).

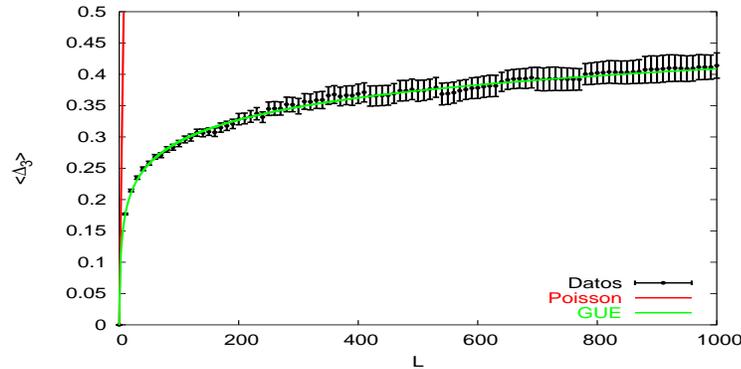


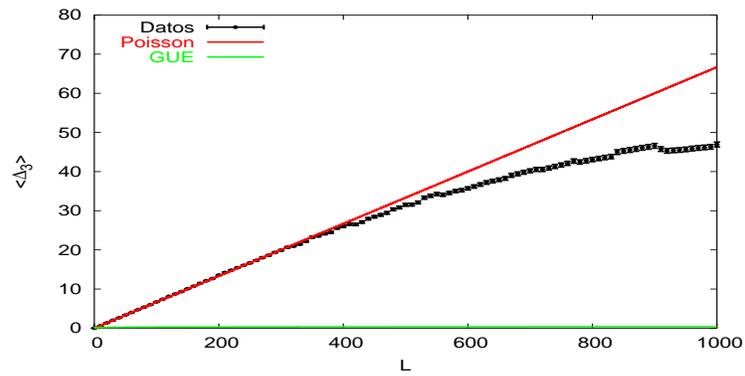
Figura 3.13: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente tipo GUE.

que se da en los espectros de las matrices aleatorias. Cuanto mayor es la repulsión mayor es la organización del espectro y esto corresponde a valores pequeños de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$. Es decir, cuanto mayor es la repulsión menor será la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ y, según se vio en la sección 2.3.1, los espectros tipo GUE presentan mayor repulsión que los espectros tipo GOE.

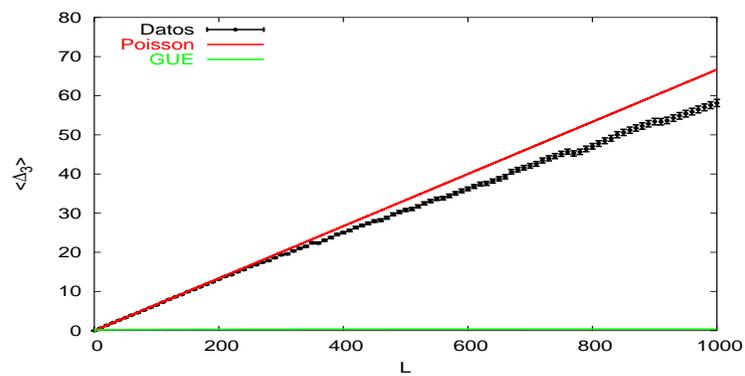
En la figura 3.14 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para los casos GUE-2 y GUE-3. El resto de los casos son muy similares. Observamos de nuevo lo mismo que en el caso del espectro GOE: los puntos se aproximan claramente a la curva de Poisson, quedando muy lejos de la curva correspondiente al GUE, pero existen desviaciones para los valores altos de L . Las posibles explicaciones dadas en el caso del GOE son válidas también en este caso.

Espectro de partícula independiente tipo Poisson

En la figura 3.15 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ calculada para el espectro de partícula independiente tipo Poisson, junto con las curvas teóricas de Poisson y del GOE. Lo que observamos en este caso si comparamos esta figura con las figuras de los otros dos tipos de espectro de partícula independiente, 3.11 y 3.13, es que la dispersión de los puntos es mucho mayor. Es decir, parece que en este caso los puntos se ajustan peor a la curva teórica. Pero lo que ocurre es que también hay que tener en cuenta que si se calcula la varianza de la $\Delta_3(L)$ en el caso de Poisson resulta que ésta es del orden de L , es decir, del mismo orden que la propia $\langle \Delta_3(L) \rangle$, mientras que en los casos de las colectividades gaussianas es una constante muy pequeña e independiente de L [14]. Además, en cualquiera de los tres casos es normal que los puntos no se



(a)



(b)

Figura 3.14: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros GUE-2 (a) y GUE-3 (b).

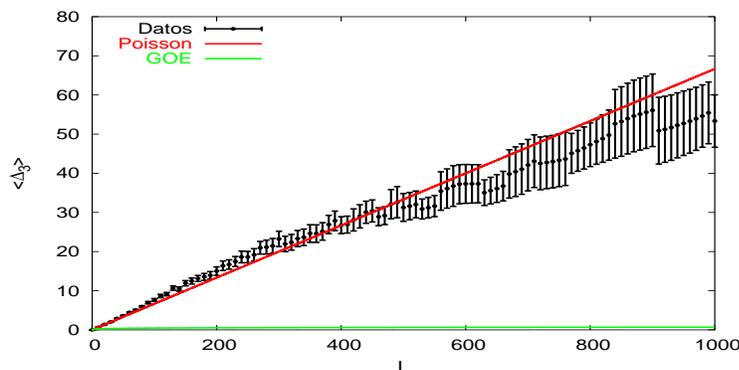


Figura 3.15: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente tipo Poisson.

ajusten perfectamente a la curva ya que en estos casos el número de niveles del espectro es pequeño y éstos no se han dividido en intervalos para calcular promedios, como en el caso de los espectros del sistema de N partículas.

En la figura 3.16 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para los casos Poisson-2 y Poisson-3. Los demás son muy similares. Los puntos se ajustan de nuevo a la curva de Poisson, aunque quizás en este caso la desviación que se produce a valores altos de L es menos acusada que en los dos casos anteriores. Esto podría corroborar la explicación del reescalado. La aproximación de la densidad acumulada por polinomios es exacta en el caso de Poisson, según vimos en la sección 3.3.2. Por tanto, en este caso tenemos mayor seguridad de que el reescalado es correcto.

De cualquier manera, a la vista de la gráfica 3.15 lo que habría que preguntarse es si las desviaciones a altos valores de L de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ que se dan en los espectros del sistema de N partículas son realmente significativas. Es decir, si nuestra referencia del caso Poisson es la figura 3.15 entonces todas las figuras correspondientes a espectros del sistema no son en realidad tan distintas a ella. Lo que ocurre, como hemos señalado, es que hay que tener en cuenta la varianza en cada caso. Si tuviésemos que comparar las curvas de los espectros del sistema con curvas del estilo de las figuras 3.11 o 3.13 entonces las desviaciones que hemos encontrado sí podrían ser significativas, pero como la referencia es la curva de Poisson y la varianza es grande en ese caso, la conclusión es que los puntos de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros del sistema de N partículas pueden ser perfectamente compatibles con la ley de Poisson.

Entonces llegamos a la misma conclusión que con el estudio de las co-

relaciones de corto alcance: independientemente del tipo de correlaciones del espectro de partícula independiente éstas desaparecen en el espectro del sistema de N partículas.

3.4.3. El estadístico δ_n

El último estadístico mediante el cual analizaremos las fluctuaciones de los espectros del sistema es la δ_n , introducida en la sección 2.5.

La δ_n fue calculada en cada uno de los 100 intervalos de 10.000 niveles del espectro reescalado. A continuación se calculó el espectro de potencias de cada una y finalmente se hizo el promedio de los 100 espectros de potencias obtenidos. El espectro de potencias de la δ_n viene dado, según se vio en la sección 2.5, por

$$P^\delta(k) = |\widehat{\delta}_k|^2, \quad (3.62)$$

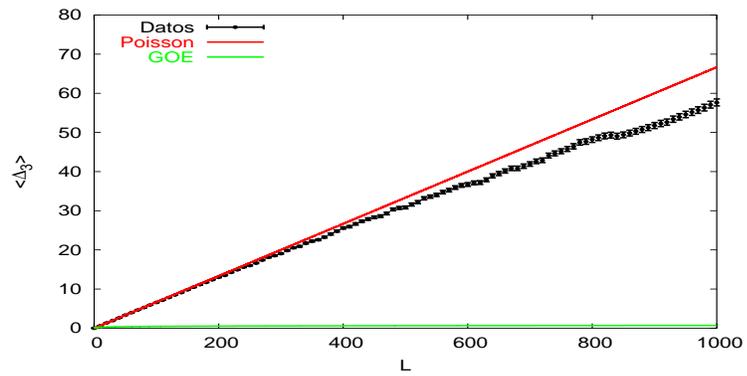
donde $\widehat{\delta}_k$ es la transformada de Fourier discreta de δ_n .

Espectro de partícula independiente tipo GOE

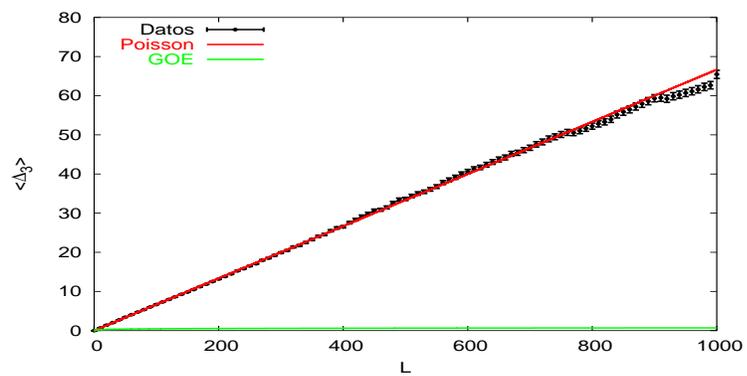
En la figura 3.17 se representa el espectro de potencias de la δ_n del espectro de partícula independiente tipo GOE, junto con la correspondiente curva teórica (2.39), y los espectros de potencias del sistema de N partículas ($N = 2 - 6$), junto con la curva teórica del GOE y la de Poisson (2.39).

Nuevamente se observa que hay acuerdo con la predicción teórica de la estadística de Poisson. Se da una pequeña desviación en el caso GOE-2 a bajas frecuencias. El problema podría venir, al igual que en el caso de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$, del reescalado. En este caso llama la atención que la desviación se dé sólo en el espectro GOE-2. Al final de la sección comentaremos qué conclusiones pueden obtenerse comparando los resultados de los tres tipos de espectro de partícula independiente.

Se puede ver que el ajuste a la curva teórica es algo peor en el caso del espectro de partícula independiente. Esto es lógico teniendo en cuenta que el espectro de potencias se ha calculado en este caso a partir de un único espectro, mientras que en el caso del sistema de N partículas éste se ha calculado como un promedio sobre 100 espectros (intervalos en que se dividió el espectro inicial de 1.000.000 de niveles) y las curvas teóricas, según se vio en la sección 2.5, corresponden a promedios. Por el mismo motivo esto ocurre también, según veremos a continuación, en los casos del GUE y Poisson.



(a)



(b)

Figura 3.16: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros Poisson-2 (a) y Poisson-3 (b).

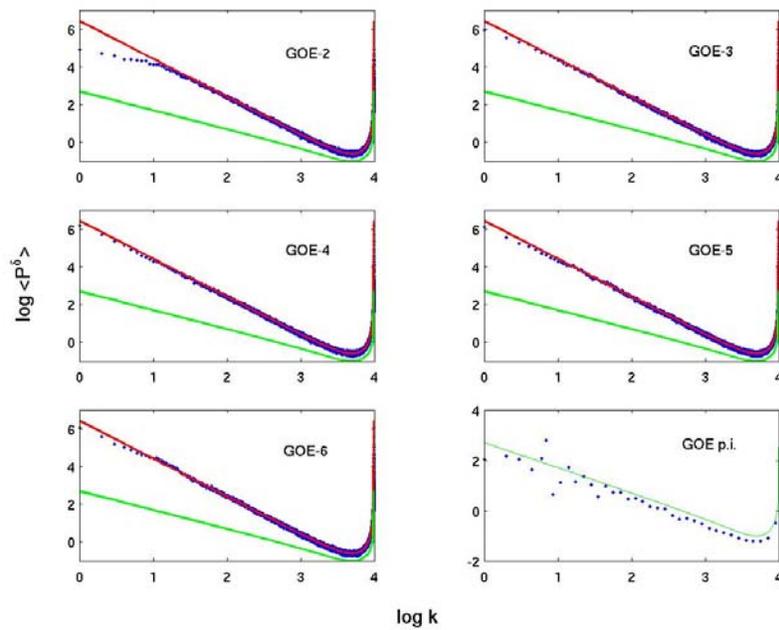


Figura 3.17: Espectro de potencias de los espectros GOE- N y el espectro de partícula independiente tipo GOE.

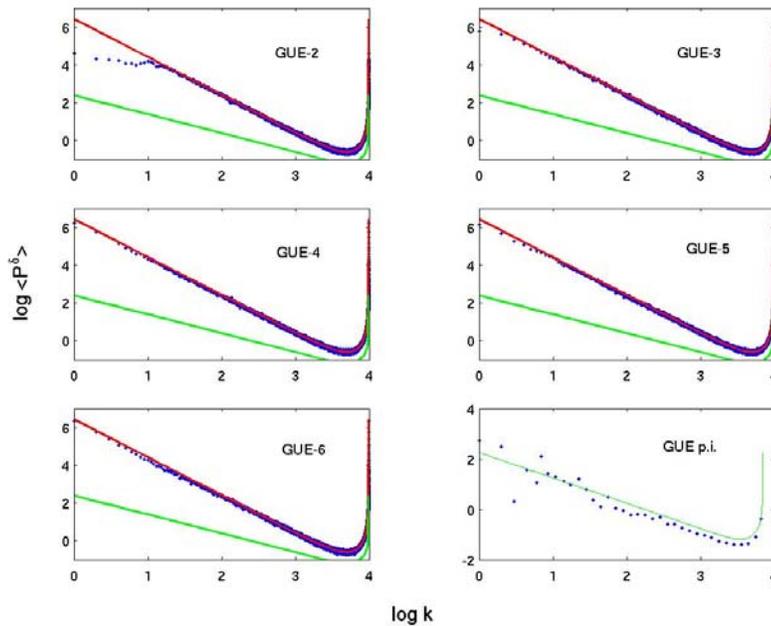


Figura 3.18: Espectro de potencias de los espectros GUE- N y el espectro de partícula independiente tipo GUE.

Espectro de partícula independiente tipo GUE

En la figura 3.18 se representa el espectro de potencias de la δ_n del espectro de partícula independiente tipo GUE, junto con la correspondiente curva teórica (2.39), y los espectros de potencias del sistema de N partículas ($N = 2 - 6$), junto con la curva teórica del GUE y la de Poisson (2.39).

El resultado es bastante parecido al caso del GOE: los puntos se ajustan bastante bien a la curva teórica de Poisson pero aparece de nuevo la pequeña desviación en el caso GUE-2.

Espectro de partícula independiente tipo Poisson

En la figura 3.19 se representa el espectro de potencias de la δ_n del espectro de partícula independiente tipo Poisson y los espectros de potencias del sistema de N partículas ($N = 2 - 6$), junto con la curva teórica para el caso de Poisson (2.39).

Observamos que la desviación que ocurría en los dos casos anteriores

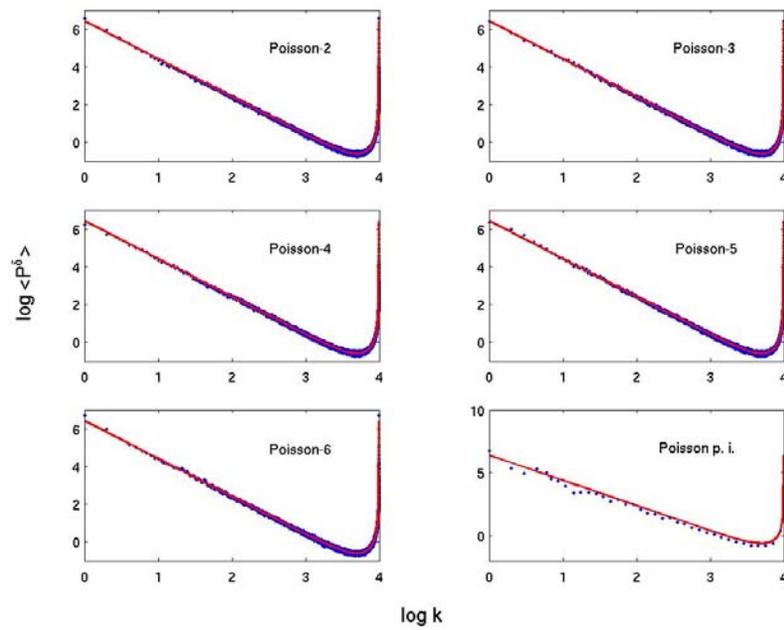


Figura 3.19: Espectro de potencias de los espectros Poisson- N y el espectro de partícula independiente tipo Poisson.

para $N = 2$ aquí no aparece. De nuevo cabe la explicación del reescalado, ya que en el caso de Poisson estamos más seguros de realizar el reescalado correctamente, por tanto, hay más probabilidad de que aparezcan efectos espurios en los otros dos casos, GOE y GUE.

Pero por otro lado, puede ser que el caso $N = 2$ sea realmente un caso especial, es decir, que la desviación no se deba a errores de reescalado o de otros tipos, sino que realmente existan motivos por los que este caso no sigue estrictamente la estadística de Poisson. Por ejemplo que este caso, $N = 2$, aún refleje de alguna manera la procedencia del espectro del sistema, es decir, el espectro de partícula independiente, que es GOE o GUE cuando existe la desviación, mientras que ésta no aparece cuando el espectro de partícula independiente es de tipo Poisson. Podemos pensar entonces que a medida que aumenta N las propiedades del espectro de partícula independiente se van diluyendo más, dando lugar a un espectro de niveles cada vez más descorrelacionados.

3.5. Comparación con un sistema físico: el billar de Robnik

Por último, vamos a llevar a cabo el análisis de las fluctuaciones espectrales en el caso de un sistema físico, como es el billar de Robnik.

Los billares cuánticos son considerados un paradigma en caos cuántico. Consisten en una partícula moviéndose libremente dentro de un contorno rígido, cuya forma determina si el movimiento es regular o caótico, y rebotando elásticamente en las paredes. Por tanto, constituyen uno de los mejores ejemplos de sistemas sencillos que dan lugar a un comportamiento muy rico y complejo.

El billar de Robnik es uno de los sistemas más simples para estudiar la transición orden-caos [41, 42]. El dominio del billar de Robnik viene dado por la transformación conforme cuadrática del disco unidad en el plano complejo w :

$$w = z + \lambda z^2, \quad |z| \leq 1. \quad (3.63)$$

La figura 3.20 muestra la forma del billar para cuatro valores de λ . Para obtener un contorno analítico el parámetro λ debe estar contenido en el intervalo $[0, 1/2)$. Para $\lambda = 0$ el billar es integrable, y a medida que aumenta el valor de λ va apareciendo el caos en el sistema [41]. El caso $\lambda = 0.5$ es

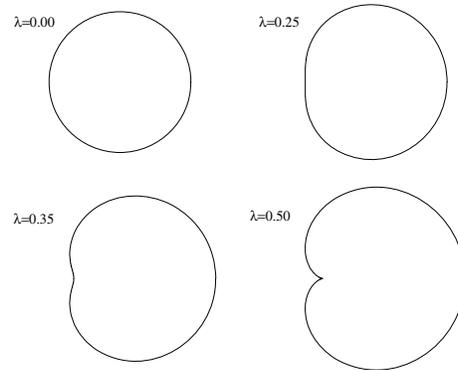


Figura 3.20: Forma del billar de Robnik para distintos valores del parámetro de deformación λ .

el único en que se ha demostrado con rigor que corresponde a un sistema ergódico [43].

A continuación realizamos un estudio análogo al llevado a cabo con los espectros de partícula independiente tipo GOE, GUE y Poisson, tomando dos espectros obtenidos a partir del billar de Robnik: uno con $\lambda = 0.00$, cuyas fluctuaciones deben seguir la estadística de Poisson, y uno con $\lambda = 0.45$, cuyas fluctuaciones deben coincidir con las predichas para la colectividad GOE, ya que es ésta la que corresponde al billar de Robnik ergódico ², según sus propiedades de simetría. Ambos espectros estaban formados por 5.000 niveles de la parte alta del espectro del billar correspondiente.

En primer lugar se reescalaron los espectros utilizando la expresión de la parte suave de la densidad acumulada de estados, que es conocida ya que puede calcularse analíticamente [45]. Los siguientes pasos hasta la obtención del espectro del sistema de N partículas son los que ya se han descrito en este capítulo. Por tanto, en la siguiente sección simplemente daremos los datos relevantes en la construcción de los espectros del sistema y procederemos al análisis de las fluctuaciones de los mismos.

²En realidad es $\lambda = 0.5$, según se ha señalado, el caso correspondiente al sistema ergódico. Lo que ocurre es que este caso, al no ser analítico el contorno, presenta dificultades a la hora de calcular los autovalores del sistema; por eso, suelen utilizarse valores de λ próximos a 0.5 pero que no llegan a alcanzar este valor.

		Robnik, $\lambda = 0.00$				
N		2	3	4	5	6
m		1999	329	158	104	73
M		1.001.112	1.013.873	1.006.155	1.029.483	1.076.981
		Robnik, $\lambda = 0.45$				
N		2	3	4	5	6
m		2001	329	154	102	82
M		1.000.369	1.005.733	1.013.343	1.056.441	1.068.525

Tabla 3.5: Número de partículas, N , número de niveles del espectro de partícula independiente, m , y dimensión del espectro del sistema, M , de los 10 casos estudiados.

3.5.1. Estudio de las propiedades de las fluctuaciones del espectro del sistema

En esta sección trabajaremos con 10 espectros: construimos 5 ($N = 2-6$) a partir del espectro del billar de Robnik integrable ($\lambda = 0.00$) y 5 a partir del espectro del billar de Robnik con $\lambda = 0.45$. La notación empleada será la misma que en los casos anteriores; así, por ejemplo, con Robnik_0.00 – 2 nos referiremos al espectro del sistema de dos partículas construido a partir del espectro de partícula independiente correspondiente al billar de Robnik con $\lambda = 0.00$.

En la tabla 3.5 se muestran los números m de niveles del espectro de partícula independiente utilizados para generar cada uno de los 10 espectros y las dimensiones M de los espectros obtenidos. De nuevo, se eliminaron los primeros niveles de cada espectro de manera que todos tengan la misma dimensión, $M = 1.000.000$.

A continuación se realizó el reescalado de los espectros en 10 intervalos de 100.000 niveles para luego dividir cada uno de ellos de nuevo en 10 y realizar así el análisis de las fluctuaciones en 100 intervalos de 10.000 niveles. Se comprobó que la aproximación del reescalado con polinomios de grado N era también buena en este caso. En la figura 3.21 se muestra el ajuste para el caso del espectro Robnik_0.45 – 3.

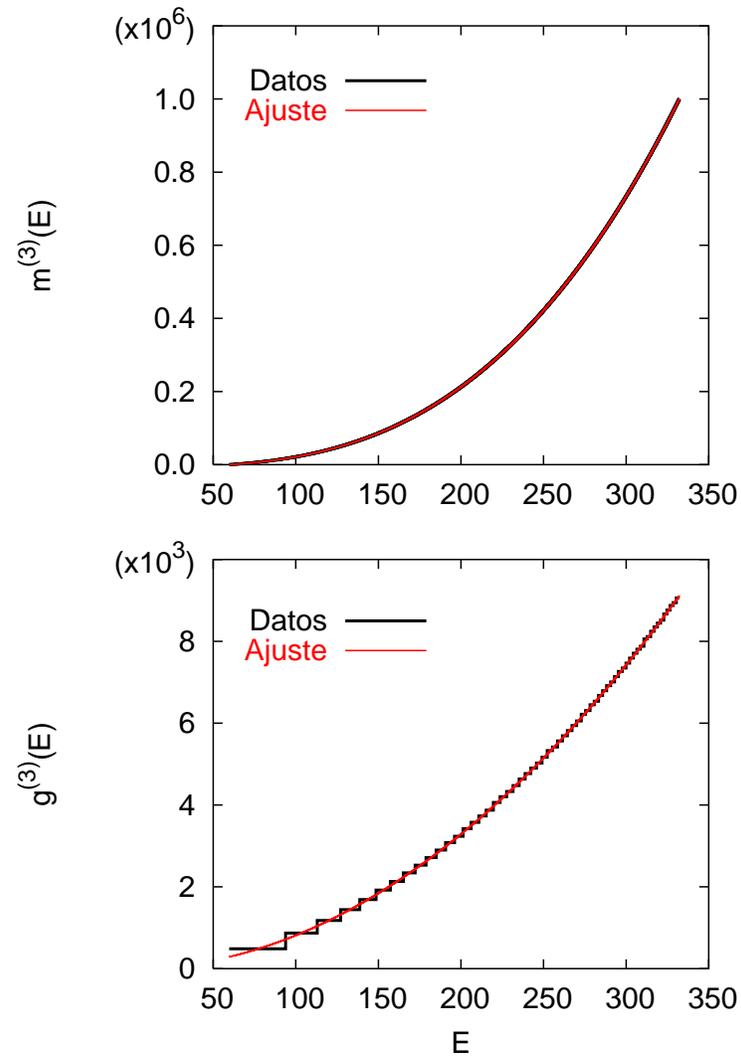


Figura 3.21: Ajustes por polinomios de la densidad de estados, $g^{(3)}(E)$, y la densidad acumulada, $m^{(3)}(E)$, del espectro Robnik_0.45 – 3.

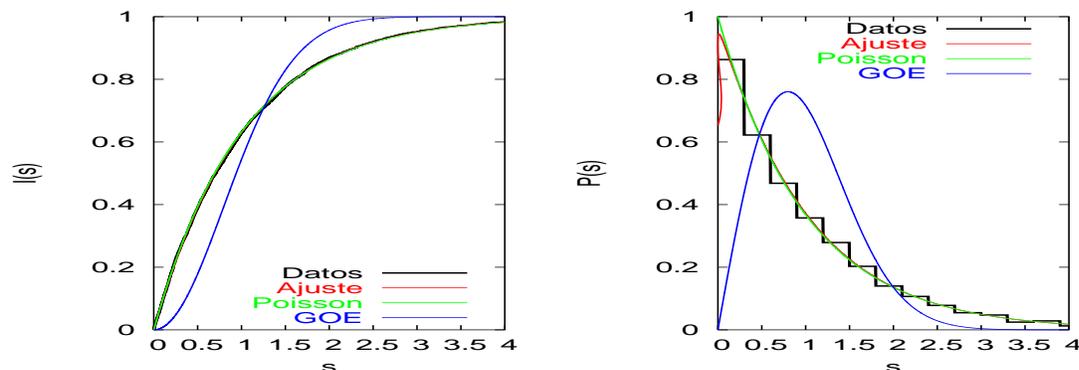


Figura 3.22: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente Robnik_0.00.

La distribución de espaciamientos a primeros vecinos

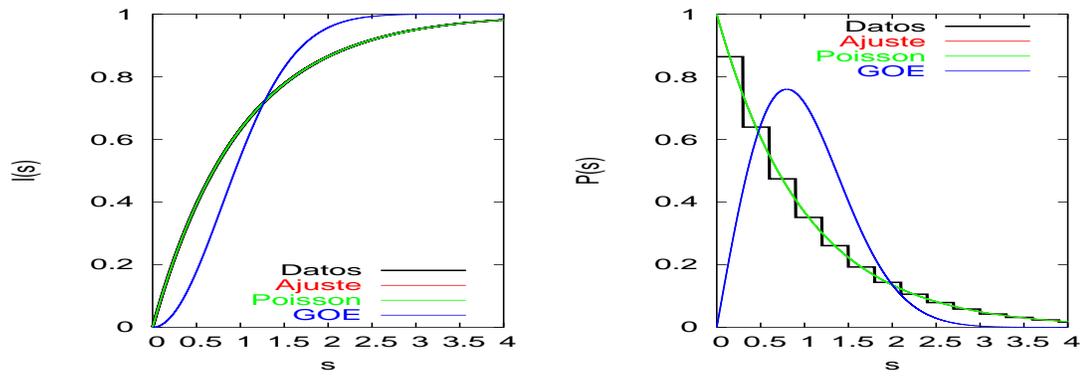
La distribución de espaciamientos se calculó de la misma manera que en los casos anteriores. En las figuras que se muestran a continuación se representan la distribución de espaciamientos y la distribución integrada, junto con las curvas teóricas de Poisson, Wigner-GOE y el ajuste a la función de Brody, que interpola entre ambas.

Espectro de partícula independiente Robnik_0.00

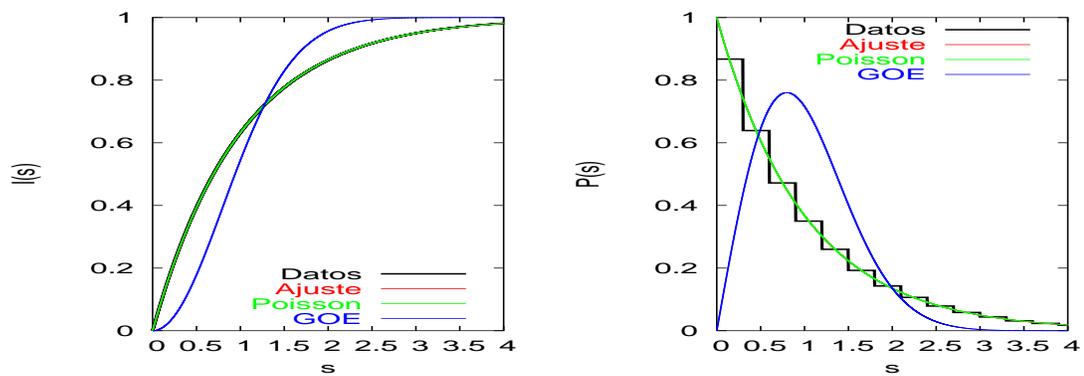
En la figura 3.22 se representa la distribución de espaciamientos a primeros vecinos para el espectro de partícula independiente Robnik_0.00. En ella se observa que el ajuste a la función de Brody coincide con la ley de Poisson, como era de esperar. El parámetro de Brody resultado del ajuste es $\nu = 0.01 \pm 0.01$. En la figura 3.23 se representan los casos Robnik_0.00 – 2 y Robnik_0.00 – 3, el resto son prácticamente iguales. En ella puede verse que las fluctuaciones siguen claramente la estadística de Poisson. En la tabla 3.6 se muestran además los valores del parámetro de Brody, ν , donde puede verse que todos son muy próximos a 0.

Espectro de partícula independiente Robnik_0.45

En la figura 3.24 se representa la distribución de espaciamientos a primeros vecinos para el espectro de partícula independiente Robnik_0.45. En ella se observa que el ajuste a la función de Brody coincide con la curva teóri-



(a)



(b)

Figura 3.23: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros Robnik_0.00 - 2 (a) y Robnik_0.00 - 3 (b).

N	ν	
2	0.000	± 0.004
3	0.00000	± 0.00006
4	0.00000	± 0.00006
5	0.00000	± 0.00003
6	0.00000	± 0.00002

Tabla 3.6: Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas Robnik_0.00 – N .

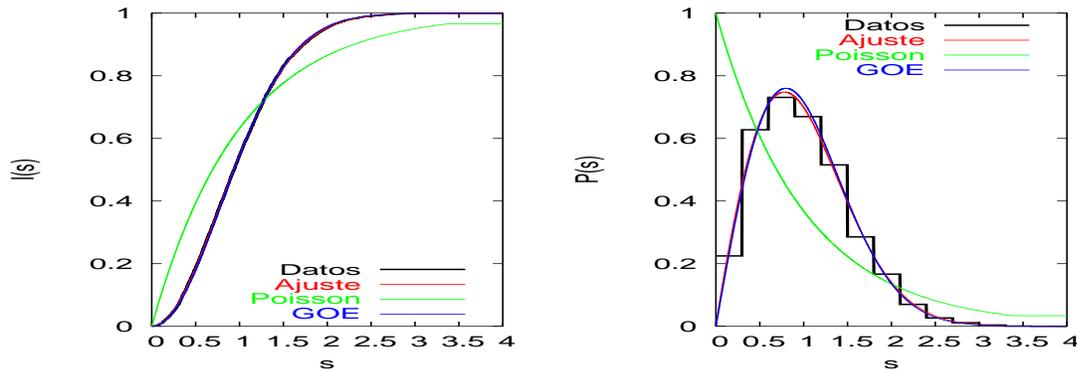
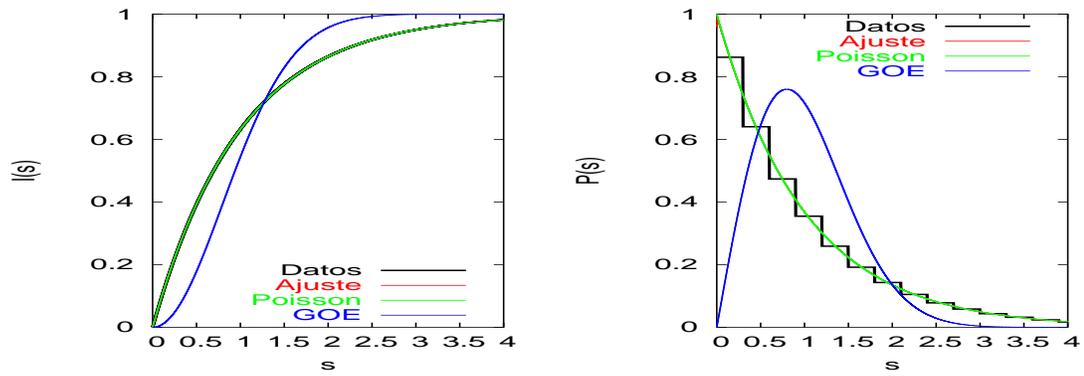


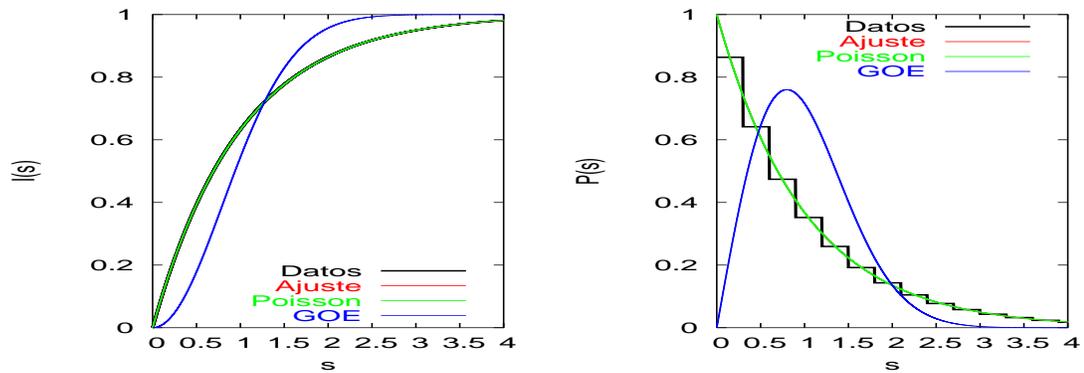
Figura 3.24: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos del espectro de partícula independiente Robnik_0.45.

ca de Wigner-GOE, como era de esperar. El parámetro de Brody resultado del ajuste es $\nu = 0.949 \pm 0.008$. En la figura 3.25 se representan los casos Robnik_0.45 – 2 y Robnik_0.45 – 3, el resto son prácticamente iguales. De nuevo las fluctuaciones siguen claramente la estadística de Poisson. En la tabla 3.7 se muestran además los valores del parámetro de Brody, ν , donde puede verse que todos son muy próximos a 0.

Tras el análisis de este estadístico llegamos a la misma conclusión que en los casos anteriores (espectros GOE, GUE y Poisson): en lo que a las correlaciones de corto alcance se refiere, las propiedades del espectro de partícula independiente no se trasladan al espectro del sistema de N partículas, sino que éste se comporta como un espectro de niveles descorrelacionados independientemente del tipo de espectro de partícula independiente a partir del cual se ha generado.



(a)



(b)

Figura 3.25: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos de los espectros Robnik_0.45 - 2 (a) y Robnik_0.45 - 3 (b).

N	ν	
2	0.001	\pm 0.004
3	0.0000	\pm 0.0002
4	0.000	\pm 0.004
5	0.0000	\pm 0.0001
6	0.00000	\pm 0.00005

Tabla 3.7: Parámetro de Brody para la distribución de espaciamientos de los espectros de los sistemas Robnik_0.45 – N .

La rigidez espectral

El cálculo de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para cada uno de los espectros se llevó a cabo como un promedio de la misma manera que se describe en la sección 3.4.2.

A continuación se analizan los resultados obtenidos en cada uno de los dos casos del billar de Robnik ($\lambda = 0.00$ y $\lambda = 0.45$).

Espectro de partícula independiente Robnik_0.00

En la figura 3.26 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ calculada para el espectro de partícula independiente Robnik_0.00, junto con las curvas teóricas del GOE y de Poisson. Aquí podemos apreciar claramente el fenómeno de la saturación de Berry, que describimos en la sección 2.4: los puntos se ajustan a la curva teórica de Poisson, como corresponde a un sistema integrable, pero al llegar a un cierto valor de L éstos se separan haciéndose constantes a partir de ese momento. Este comportamiento no se ha observado en los casos anteriores (espectros tipo GOE, GUE y Poisson) puesto que, según se explicó, es debido a la influencia de las órbitas periódicas más cortas del sistema, que hacen que el comportamiento de las fluctuaciones sea universal sólo en un cierto rango, $\Delta E < \hbar/T_{min}$, donde T_{min} es el periodo de la órbita más corta del sistema. Puesto que los espectros tipo GOE, GUE y Poisson estudiados anteriormente no se construyeron a partir de ningún sistema físico sino que se calcularon a partir de matrices generadas aleatoriamente, no podemos hablar en esos casos de órbitas periódicas ni, por tanto, de comportamiento no universal.

En la figura 3.27 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para los casos Robnik_0.00 – 2 y Robnik_0.00 – 3. Todos los casos ($N = 2 - 6$) son muy similares. Lo que observamos es exactamente lo mismo que vimos en el caso del espectro tipo Poisson: los puntos están bastante próximos a la curva de Poisson pero existen

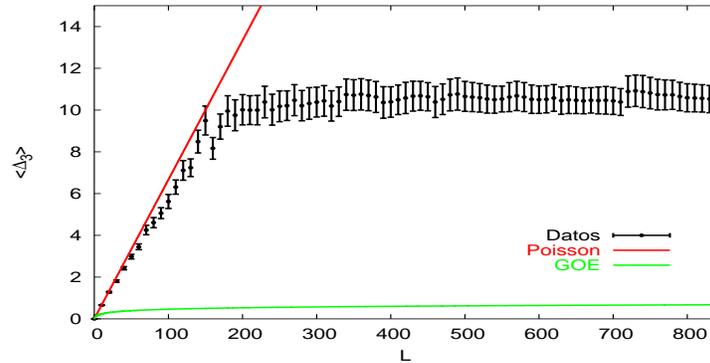


Figura 3.26: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente Robnik_0.00.

pequeñas desviaciones para los valores más altos de L .

Las posibles explicaciones dadas en el caso del espectro tipo Poisson son válidas también en este caso: puede tratarse de un problema de reescalado, ya que la expresión de la parte suave de la densidad acumulada utilizada es una aproximación o puede que los valores de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ calculados para L grande sean menos fiables al ser la estadística más pobre en esos casos. Por otro lado, como se señaló también en la sección 3.4.2, desviaciones más o menos grandes de la curva de Poisson no son tan significativas como podrían serlo esas mismas desviaciones en las curvas del GOE o el GUE, ya que en el caso de Poisson la varianza de la $\Delta_3(L)$ es del orden de la propia $\langle \Delta_3(L) \rangle$.

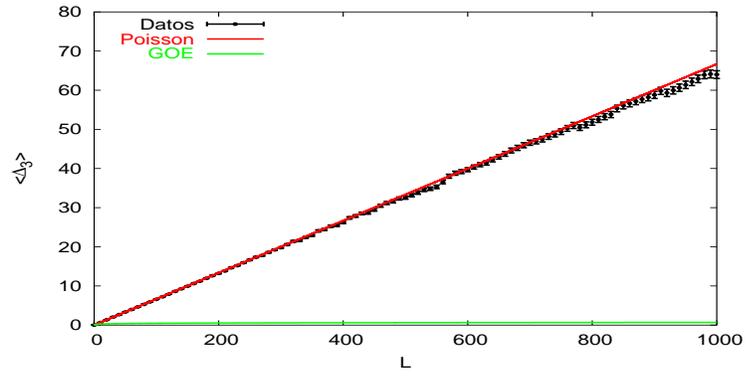
En cuanto a la saturación de Berry, que debería aparecer también en el caso del sistema de N partículas, vemos que no se observa en las gráficas. En realidad lo que ocurre es que la saturación aparece más tarde cuanto mayor es el número de partículas, ya que el valor de L a partir del cual ya no hay universalidad decrece con el número de grados de libertad del sistema [30]:

$$L_{sat} \sim \hbar^{-(dN-1)}, \quad (3.64)$$

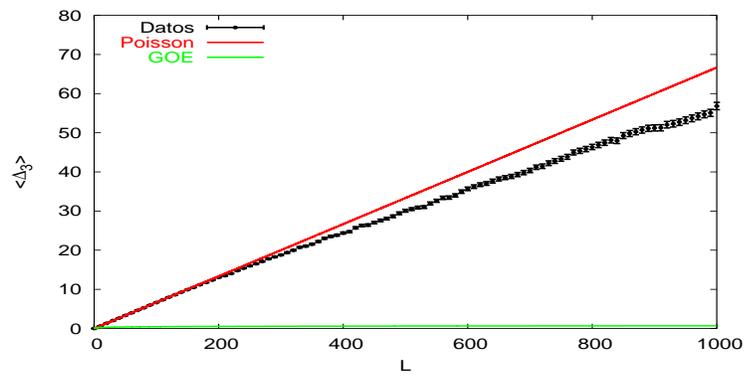
donde d es la dimensión del billar y N el número de partículas.

Espectro de partícula independiente Robnik_0.45

En la figura 3.28 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ calculada para el espectro de partícula independiente Robnik_0.45, junto con las curvas teóricas del GOE y de Poisson. De nuevo podemos apreciar claramente el fenómeno de la saturación de Berry: los puntos siguen la curva del GOE, como era de



(a)



(b)

Figura 3.27: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros Robnik_0.00 - 2 (a) y Robnik_0.00 - 3 (b).

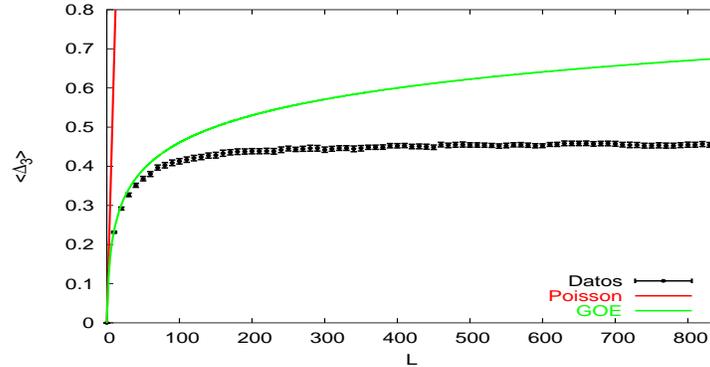


Figura 3.28: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ del espectro de partícula independiente Robnik_0.45.

esperar, hasta un cierto valor de L en que se separan de ella para hacerse constantes a partir de ese momento.

En la figura 3.29 se representa la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ para los casos Robnik_0.45 – 2 y Robnik_0.45 – 3. Todos los casos ($N = 2 - 6$) son muy similares. Nuevamente observamos lo mismo que vimos en el caso del espectro tipo GOE: los puntos están bastante próximos a la curva de Poisson pero existen pequeñas desviaciones para los valores más altos de L . Las explicaciones posibles para estas desviaciones son las mismas que en el caso anterior, Robnik_0.00.

Por tanto, en lo que se refiere a las correlaciones de largo alcance, llegamos de nuevo a la conclusión de que independientemente del tipo de correlaciones que presente el espectro de partícula independiente éstas desaparecen en el espectro del sistema de N partículas, que se comporta como uno de niveles descorrelacionados.

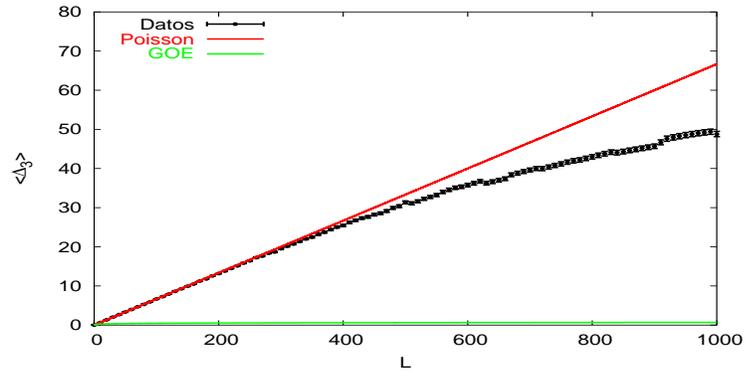
El estadístico δ_n

Este estadístico fue calculado para cada espectro de la manera que se describe en la sección 3.4.3. A continuación se calculó el espectro de potencias, que viene dado por

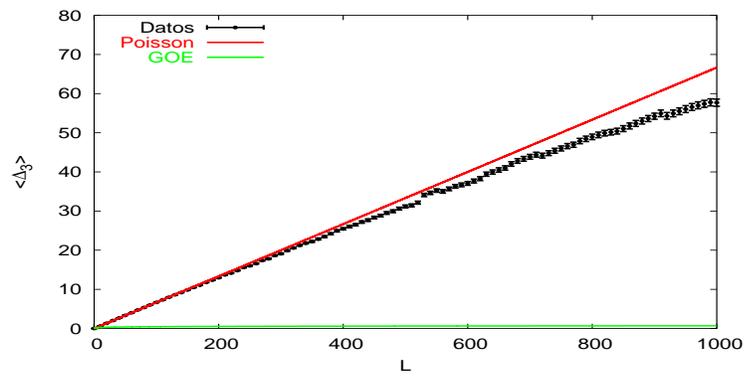
$$P^\delta(k) = |\hat{\delta}_k|^2, \quad (3.65)$$

donde $\hat{\delta}_k$ es la transformada de Fourier discreta de δ_n .

Este estadístico ya ha sido estudiado en el billar de Robnik [44], habiéndose comprobado que presenta un ruido $1/f^\alpha$, donde α varía suavemente desde $\alpha \simeq 2$ cuando $\lambda \simeq 0$ hasta $\alpha \simeq 1$ cuando $\lambda \simeq 1/2$. El resultado es coherente con la descripción que hemos dado del billar de Robnik en función del



(a)



(b)

Figura 3.29: $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los espectros Robnik_0.45 - 2 (a) y Robnik_0.45 - 3 (b).

parámetro λ , ya que $\lambda \simeq 0$ corresponde al caso integrable, que debe presentar un ruido $1/f^2$, mientras $\lambda \simeq 1/2$ corresponde al caso caótico (ergódico), que debe presentar un ruido $1/f$. Es decir, que la transición orden-caos en este sistema puede ser caracterizada por el exponente α además de por el parámetro de deformación λ .

Espectro de partícula independiente Robnik_0.00

En la figura 3.30 se representa el espectro de potencias de la δ_n del espectro de partícula independiente Robnik_0.00 y los espectros de potencias del sistema de N partículas ($N = 2 - 6$), junto con la curva teórica para el caso de Poisson. Como puede verse, el ajuste a la curva teórica es peor en el caso del espectro de partícula independiente, al igual que ocurría en los tres casos anteriores (GOE, GUE y Poisson), debido a que el cálculo del espectro de potencias se ha realizado a partir de un único espectro, mientras que en el caso del sistema de N partículas éste se ha realizado como un promedio sobre 100 espectros (intervalos en que se dividió el espectro inicial de 1.000.000 de niveles) y las curvas teóricas, según se vio en la sección 2.5, corresponden a promedios. Además, puede verse también en este espectro el efecto de la saturación de Berry: la desviación de la curva teórica de la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ a energías altas se refleja aquí como una desviación a frecuencias bajas.

Nuevamente se observa que hay acuerdo con la predicción teórica de la estadística de Poisson. Vemos que la figura es muy parecida a la figura 3.19, correspondiente a los espectros de potencias del caso del espectro de partícula independiente tipo Poisson, como era de esperar.

Espectro de partícula independiente Robnik_0.45

En la figura 3.31 se representa el espectro de potencias de la δ_n del espectro de partícula independiente Robnik_0.45, junto con la correspondiente curva teórica para GOE, y los espectros de potencias del sistema de N partículas ($N = 2 - 6$), junto con la curva teórica del GOE y la de Poisson. Se observa también, lógicamente, la mayor dispersión de los puntos en el caso del espectro de partícula independiente, así como el efecto de la saturación de Berry.

El acuerdo con la predicción teórica de Poisson es de nuevo bastante bueno. Pero aquí observamos de nuevo el efecto que encontrábamos en el caso del espectro GOE-2 y que no aparecía en cambio en el espectro Poisson-2: la desviación de la curva teórica para los valores más pequeños de la frecuencia.

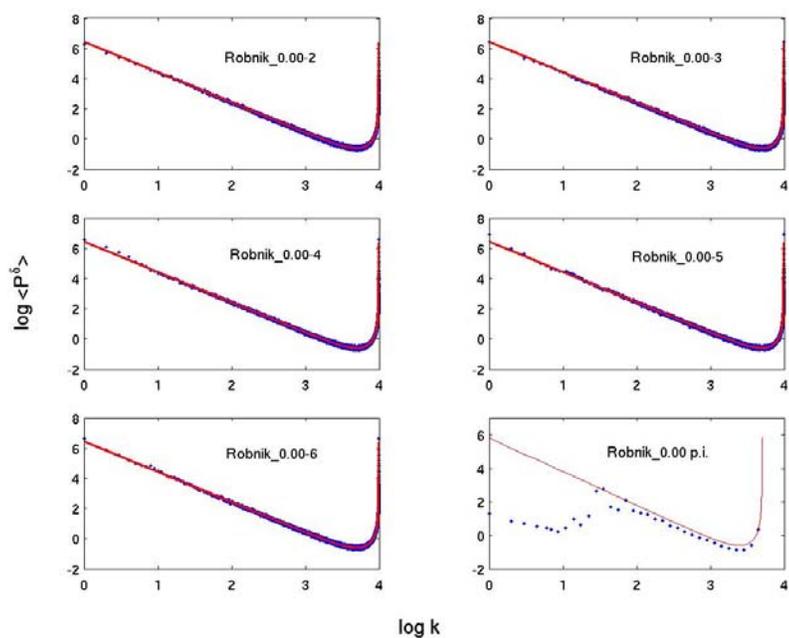


Figura 3.30: Espectro de potencias de los espectros Robnik_0.00 – N y el espectro de partícula independiente Robnik_0.00.

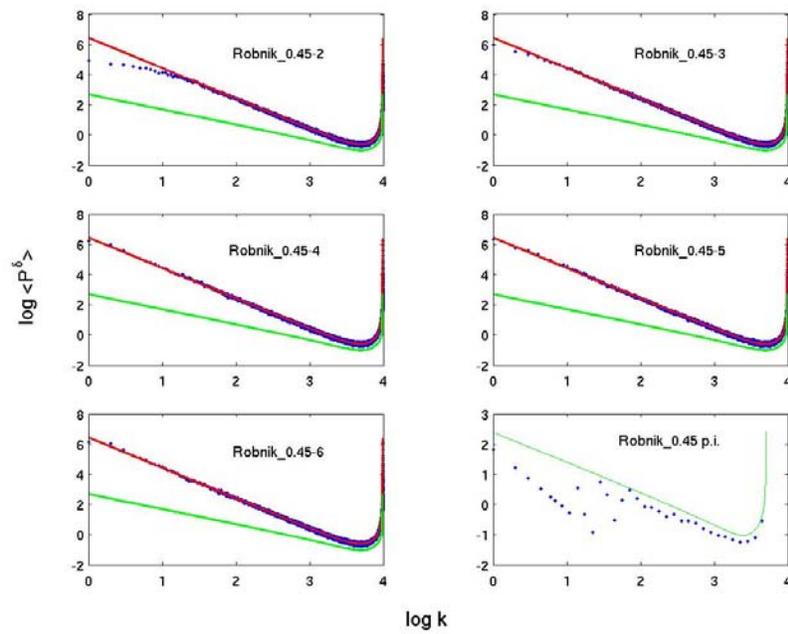


Figura 3.31: Espectro de potencias de los espectros Robnik_0.45 – N y el espectro de partícula independiente Robnik_0.45.

De hecho, la figura es muy parecida a la figura 3.17, correspondiente a los espectros de potencias del caso del espectro de partícula independiente tipo GOE. Las posibles explicaciones de esta desviación son las mismas que las que se dieron en ese caso. Pero ahora de lo que sí estamos seguros es de que, ya sea un problema de reescalado, ya sea que el caso $N = 2$ es realmente un caso aparte, el efecto no depende de propiedades concretas del sistema físico (billar de Robnik) ni de la manera de generar numéricamente las matrices aleatorias, ya que aparece en los dos casos.

3.6. Justificación teórica

La conclusión que hemos extraído a partir de todos los resultados obtenidos es que las propiedades de las fluctuaciones del espectro cuántico de un sistema de N partículas idénticas sin interacción siguen la estadística de Poisson, independientemente del tipo de fluctuaciones que presente el espectro de partícula independiente a partir del cual se ha generado. La pregunta lógica que podemos hacernos es por qué sucede esto, qué interpretación podemos darle y si podemos encontrar algún cálculo teórico que lo justifique.

En el contexto del caos cuántico podría interpretarse de la siguiente manera: el análogo clásico de los sistemas cuánticos de N partículas idénticas sin interacción es integrable. De ser así, lo que podríamos hacer es calcular el límite clásico del sistema cuántico para comprobar que efectivamente se trata de un sistema integrable. El problema de esta interpretación es que, según hemos señalado, los sistemas cuánticos de varias partículas idénticas, debido al carácter bosónico o fermiónico de las mismas, no tienen un análogo clásico claro. Sin embargo, sí hay un cálculo clásico muy sencillo que puede realizarse en el caso de los billares. En la sección 2.3.1 se explicó que no todos los sistemas caóticos lo son en el mismo grado, se habló de jerarquía del caos y se describieron tres tipos de sistemas: ergódicos, mixing y sistemas K. Se señaló que a pesar de que en un principio la conjetura BGS fue formulada para sistemas K más tarde se extendió a sistemas ergódicos y hoy se acepta que un sistema cuántico es caótico si su análogo clásico es ergódico. Lo que demuestra el cálculo que realizamos a continuación es que los sistemas clásicos de N partículas sin interacción no son ergódicos y, por tanto, podemos afirmar que los sistemas análogos cuánticos no son caóticos.

La ergodicidad implica que para tiempos suficientemente largos el sistema ha pasado por todos los puntos de espacio de fases. Es decir, que la fracción

del espacio de fases accesible al sistema es igual a 1.

Vamos calcular la fracción del espacio de fases accesible a un sistema de N partículas sin interacción en un billar. El cálculo tiene sentido puesto que es totalmente independiente de si las partículas son bosónicas o fermiónicas o incluso si ni siquiera son idénticas.

Para hacer el cálculo lo más general posible consideramos un billar d -dimensional, cuyo contorno delimita un volumen V_d . Las variables posición y momento del sistema son

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) \quad (3.66)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) \quad (3.67)$$

El número de estados con energía menor o igual que E o volumen del espacio de fases accesible al sistema con energía menor o igual que E viene dado por

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{1}{N!h^{dN}} \int d\mathbf{Q} \int d\mathbf{P} \delta(E - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) \\ &= \frac{1}{N!h^{dN}} \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{q}_i \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \delta(E - H(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)), \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde $H(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ es el hamiltoniano del sistema:

$$H(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}, \quad (3.69)$$

donde m es la masa de cada una de las partículas.

La integral en las posiciones es inmediata puesto que el integrando no depende de las mismas. La integral para cada una de las partículas es el volumen total del espacio, es decir, el volumen del billar. Por tanto, el resultado de esta integral es V_d^N .

Para calcular la integral en los momentos hacemos un cambio de variable a esféricas. Teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2/2m = E$, o bien, $\sum_{j=1}^{dN} p_j^2 = 2mE$, donde la suma en esta última expresión se extiende a las d componentes cartesianas del momento de cada una de las N partículas, podemos escribir el elemento de volumen en dN dimensiones como

$$dV = \frac{2\pi^{dN/2} r^{dN-1}}{\Gamma(dN/2)} dr, \quad (3.70)$$

que corresponde al elemento de volumen cuando el integrando depende sólo de la coordenada radial r . En este caso, $r^2 = \sum_{j=1}^{dN} p_j^2$. Por tanto, los límites del intervalo de integración son 0 y $R = \sqrt{2mE}$, y la integral queda

$$\Omega(E) = \frac{V_d^N}{N!h^{dN}} \int_0^{\sqrt{2mE}} \frac{2\pi^{dN/2} r^{dN-1}}{\Gamma(dN/2)} dr = \frac{V_d^N}{N!h^{dN}} \frac{2\pi^{dN/2}}{\Gamma(dN/2)} \frac{(2mE)^{dN/2}}{dN}. \quad (3.71)$$

El volumen del espacio de fases accesible al sistema con energía entre E y $E + dE$ viene dado por

$$d\Omega(E) = \frac{d\Omega(E)}{dE} dE = \frac{V_d^N \pi^{dN/2} (2m)^{dN/2}}{N!h^{dN} \Gamma(dN/2)} E^{dN/2-1} dE. \quad (3.72)$$

En sistemas de varias partículas sin interacción cada una de ellas posee una energía fija, que no cambia con el tiempo puesto que al no interactuar unas con otras no intercambian energía. Por tanto, con fracción del espacio de fases accesible al sistema nos referimos a la fracción del espacio de fases que ocupa una trayectoria concreta, es decir, que debemos considerar una determinada configuración $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$.

Así, si el volumen del espacio de fases accesible a la partícula i cuando ésta tiene una energía menor o igual que E_i , que se obtiene fácilmente sin más que particularizar la ecuación (3.71) para $N=1$, es la siguiente:

$$\Omega_i(E_i) = \frac{V_d}{h^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(2mE_i)^{d/2}}{d}, \quad (3.73)$$

la fracción del espacio de fases, $F(E_1, E_2, \dots, E_N)$, que ocupa el sistema es

$$F(E_1, E_2, \dots, E_N) = \frac{d(\prod_{i=1}^N \Omega_i(E_i))}{d\Omega(E)}, \quad (3.74)$$

donde $\sum_{i=1}^N E_i = E$.

El numerador se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d \left(\prod_{i=1}^N \Omega_i(E_i) \right) &= \frac{d(\prod_{i=1}^N \Omega_i(E_i))}{dE} dE = \left(\frac{d\Omega_1(E_1)}{dE} \Omega_2(E_2) \cdots \Omega_N(E_N) \right. \\ &+ \Omega_1(E_1) \frac{d\Omega_2(E_2)}{dE} \Omega_3(E_3) \cdots \Omega_N(E_N) + \cdots \\ &\left. + \Omega_1(E_1) \cdots \Omega_{N-1}(E_{N-1}) \frac{d\Omega_N(E_N)}{dE} \right) dE. \quad (3.75) \end{aligned}$$

Es conveniente expresar las energías de cada partícula como $E_i = \lambda_i E$, donde λ_i representa la fracción de la energía total que corresponde a la partícula i . Por tanto, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. Con esta notación y utilizando la regla de la cadena, cada una de las derivadas que aparecen en (3.75) resultan

$$\frac{d\Omega_i(E_i)}{dE} = \frac{d\Omega_i(E_i)}{dE_i} \frac{dE_i}{dE} = \lambda_i \frac{d\Omega_i(E_i)}{dE_i} = \frac{V_d \pi^{d/2} (2m)^{d/2}}{h^d \Gamma(d/2)} \lambda_i^{d/2} E^{d/2-1}. \quad (3.76)$$

E introduciendo estas expresiones en (3.75) queda

$$d \left(\prod_{i=1}^N \Omega_i(E_i) \right) = \left[\left(\frac{V_d \pi^{d/2} (2m)^{d/2}}{h^d \Gamma(d/2)} \right)^N \left(\frac{2}{d} \right)^{N-1} \left(\prod_{i=1}^N \lambda_i \right)^{d/2} E^{dN/2-1} \right] N dE. \quad (3.77)$$

Utilizando esta última ecuación y la (3.72) la fracción del espacio de fases ocupado por el sistema es

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \left(\frac{2}{d} \right)^{N-1} \frac{\Gamma(dN/2)}{\Gamma(d/2)^N} N \left(\prod_{i=1}^N \lambda_i \right)^{d/2}. \quad (3.78)$$

Ahora vamos a demostrar que, incluso en el máximo, la fracción es menor que 1, además es cada vez más pequeña cuanto mayor es el número N de partículas.

Para calcular el punto $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ donde está el máximo utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange. La ligadura es $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. Por tanto, construimos la siguiente función:

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \alpha) = \left(\frac{2}{d} \right)^{N-1} \frac{\Gamma(dN/2)}{\Gamma(d/2)^N} N \left(\prod_{i=1}^N \lambda_i \right)^{d/2} - \alpha \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right), \quad (3.79)$$

y el máximo vendrá dado por

$$\frac{\partial g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \alpha)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.81)$$

Es decir,

$$k \frac{d}{2} \lambda_i^{d/2-1} (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \cdots \lambda_N)^{d/2} - \alpha = 0 \quad (3.82)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N - 1 = 0, \quad (3.83)$$

donde $k = \left(\frac{2}{d}\right)^{N-1} \frac{\Gamma(dN/2)}{\Gamma(d/2)^N} N$.

Si $\alpha = 0$ basta con que $\lambda_i = 0$ para algún i para tener una solución. Sustituyendo esta solución en (3.78) se obtiene que la fracción del espacio de fases es cero, y como $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \geq 0$ para todo $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ la solución corresponde a un mínimo y, por tanto, no es la que buscamos.

Si $\alpha \neq 0$, multiplicando cada una de las ecuaciones (3.82) por λ_i se obtiene

$$\alpha \lambda_1 = \alpha \lambda_2 = \dots = \alpha \lambda_N, \quad (3.84)$$

cuya única solución, siendo $\alpha \neq 0$, es $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$. Y teniendo en cuenta la ecuación (3.83), la solución es

$$\lambda_i = \frac{1}{N}, \quad \forall i. \quad (3.85)$$

Sustituyendo la solución en (3.78) se obtiene

$$F_{max} = \left(\frac{2}{d}\right)^{N-1} \frac{\Gamma(dN/2)}{\Gamma(d/2)^N} \left(\frac{1}{N}\right)^{dN/2-1}. \quad (3.86)$$

Estamos seguros de que se trata de un máximo absoluto ya que no hay más puntos críticos y sustituyendo otro punto cualquiera en (3.78) el valor obtenido es menor. Este es un valor que nunca se llega a alcanzar en el caso del sistema que hemos estudiado, ya que al ser las partículas fermiónicas nunca podrán ocupar dos de ellas el mismo nivel del espectro y, por tanto, nunca podrán tener todas la misma energía. Por ejemplo, tomemos el caso del billar de Robnik integrable con $N = 5$. Si calculamos las fracciones λ_i de la energía total de cada partícula en el primer estado excitado obtenemos

$$\lambda_1 = 0.037 \quad \lambda_2 = 0.058 \quad \lambda_3 = 0.205 \quad \lambda_4 = 0.322 \quad \lambda_5 = 0.378. \quad (3.87)$$

Y el valor de la fracción del espacio de fases resulta ser 0.0065, mientras que el valor máximo en este caso sería 0.0384. En la figura 3.32 se representa F_{max} para los casos bidimensional (que hemos estudiado en la sección anterior) y tridimensional, como función del número de partículas N . Podemos ver que efectivamente la fracción es menor que 1 y además, decrece muy rápidamente con el número de partículas. Para 10 partículas ya es del orden de 10^{-4} en el caso bidimensional y del orden de 10^{-5} en el caso tridimensional. Por tanto, queda demostrado, que un billar con N partículas sin interacción no es un sistema ergódico.

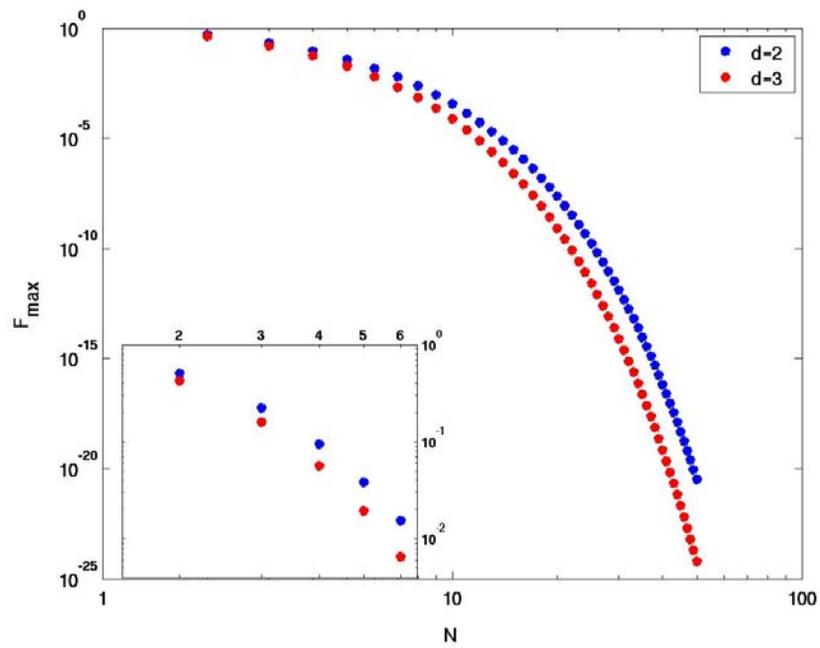


Figura 3.32: Fracción del espacio de fases ocupado por el sistema en el punto máximo para los casos del billar bidimensional y tridimensional.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado los sistemas de N partículas idénticas sin interacción en el contexto del caos cuántico. Es decir, hemos utilizado las herramientas que han sido desarrolladas en este campo para analizar la estadística de las fluctuaciones de los espectros cuánticos de energía de estos sistemas.

Los trabajos de Berry [3] y Bohigas [4] establecieron que hay dos tipos de espectros cuánticos que pueden distinguirse en base al tipo de fluctuaciones que presentan: los espectros de sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es integrable presentan fluctuaciones que siguen la estadística de Poisson y aquellos cuyo análogo clásico es ergódico presentan fluctuaciones cuya estadística es descrita por la teoría de matrices aleatorias. Es decir, que las fluctuaciones espectrales son universales (en un cierto rango), dependiendo sólo de si el análogo clásico del sistema es integrable o ergódico.

Hemos elegido diversos tipos de espectro de partícula independiente y hemos construido a partir de ellos espectros de sistemas de varias partículas. Para realizar el análisis de las fluctuaciones espectrales de los mismos se han utilizados tres estadísticos. Dos de ellos han sido desarrollados en el contexto de la teoría de matrices aleatorias: la distribución de espaciamentos a primeros vecinos ($P(s)$) y la rigidez espectral ($\Delta_3(L)$), y son los más utilizados a la hora de medir las correlaciones de corto y de largo alcance, respectivamente. El tercero ha sido desarrollado gracias a un nuevo enfoque recientemente propuesto a la hora de abordar el problema del caos cuántico basado en los métodos tradicionales del análisis de series temporales [31]: la δ_n , que mide las fluctuaciones de los niveles de energía respecto de su valor medio.

Tras el análisis de los resultados obtenidos hemos encontrado que las fluc-

tuaciones de los espectros de los sistemas de N partículas estudiados siguen siempre la estadística de Poisson, independientemente del tipo de espectro de partícula independiente a partir del cual se hayan generado, ya sea este integrable o caótico.

La interpretación de este resultado es complicada. No podemos decir que el análogo clásico de este tipo de sistemas es integrable, ya que, debido al carácter bosónico o fermiónico de las partículas idénticas, estos sistemas no tienen un límite clásico claro. Por tanto, no podemos basar una demostración teórica en la búsqueda del límite clásico del sistema. Podríamos realizar una demostración teórica en mecánica cuántica, como, por ejemplo, el cálculo de alguno de los estadísticos que caracterizan las fluctuaciones espectrales en estos sistemas para comprobar que el resultado coincide con la predicción de la estadística de Poisson. Pero por el momento, no hemos conseguido realizar ningún cálculo así, que demuestre en general la conclusión a la que hemos llegado. Sólo hemos demostrado, en el caso concreto de los billares, que la fracción del espacio de fases ocupado por el sistema es muy pequeña, tanto más cuanto mayor es el número de partículas. Esto quiere decir que el sistema no es ergódico y, por tanto, su análogo cuántico no puede ser caótico.

Por otro lado, dada la variedad de espectros de partícula independiente estudiados (espectros provenientes de matrices aleatorias generadas numéricamente y espectros obtenidos a partir de un sistema físico, como es el billar de Robnik, tanto integrables como caóticos en ambos casos) no podemos por menos de formular nuestra conclusión como una conjetura: *Los espectros de los sistemas cuánticos de varias partículas idénticas sin interacción presentan fluctuaciones que siguen la estadística de Poisson, independientemente del tipo de fluctuaciones del espectro de partícula independiente a partir del cual se han construido.*

A pesar de que el estudio ha sido realizado para partículas fermiónicas, su extensión a partículas bosónicas es trivial. En la sección 3.3.1 se describió el cálculo de la densidad de estados para un sistema de N fermiones. En ese caso los estados del sistema debían ser totalmente antisimétricos, y se obtenían a partir de los estados no antisimetrizados aplicando el operador de antisimetrización. En el caso de partículas bosónicas los estados del sistema deben ser totalmente simétricos y, por tanto, se obtienen a partir de los estados sin simetrizar aplicando el operador de simetrización. Por tanto, la única diferencia está en los signos que aparecen en las expresiones de la densidad de estados del sistema de N partículas. Por ejemplo, en las expresiones (3.29), (3.30) y (3.31) todos los signos serían positivos en el caso de los bosones.

Pero esto es irrelevante, ya que al realizar el reescalado los propios ajustes nos dan los signos de cada coeficiente, por tanto, basta con saber que se trata de un polinomio de grado N .

En cuanto a los resultados sólo queda señalar que nos ha llamado la atención la pequeña desviación de la predicción de Poisson que se observa en el espectro de potencias de la δ_n en los espectros de energía de los sistemas de 2 partículas construidos a partir de espectros de partícula independiente caóticos y sólo en ellos. No sabemos si puede tratarse de un efecto espurio debido a alguna cuestión técnica como el proceso de reescalado o si realmente el caso $N = 2$ es un caso especial. De cualquier manera este es un punto que podemos intentar aclarar mediante las vías de estudio que tomaremos en adelante.

Por un lado abordaremos el estudio de nuevos sistemas de N partículas, cuyo análisis pueda corroborar nuestra conjetura. En este sentido, el siguiente paso que llevaremos a cabo es repetir el estudio completo, tanto para matrices aleatorias como para espectros de sistemas físicos, considerando partículas bosónicas en lugar de fermiónicas. Además, el que la pequeña desviación de los sistemas de 2 partículas de la que hablábamos aparezca o no en los nuevos espectros que se estudiarán puede darnos pistas sobre su origen, es decir, si se trata de algo general asociado al carácter caótico de todos los espectros o si es un aspecto particular de cierto tipo de espectros.

Por otro lado continuaremos buscando algún tipo de demostración teórica del resultado en el marco de la mecánica cuántica. Si la desviación de los espectros de potencias de los sistemas de 2 partículas es un efecto real y no espurio debemos encontrarlo de alguna manera en los cálculos teóricos.

Por último, iniciaremos un estudio del comportamiento cuántico de los sistemas de N partículas sin interacción basado en la sensibilidad a pequeñas perturbaciones en el hamiltoniano, que se mencionó en la sección 2.2. Concretamente se estudiará la separación de la función de onda correspondiente al hamiltoniano perturbado y la función de onda inicial. Por analogía con la separación de las trayectorias en caos clásico se espera que la separación entre las funciones de onda sea pequeña en todo momento, pero además, se pretende estudiar el comportamiento de esta separación como función del número de partículas, N , para comprobar si la transición del espectro de partícula independiente caótico al espectro del sistema de N partículas integrable es tan brusca en las funciones de onda como ha resultado serlo en el espectro (todos los estadísticos utilizados para el análisis de las fluctuaciones espectrales obedecen a la estadística de Poisson, desde $N = 2$ hasta $N = 6$)

o es más gradual.

Apéndice A

Teoría de matrices aleatorias

En este apéndice describimos los conceptos y expresiones básicas utilizados en la teoría de matrices aleatorias, sin entrar demasiado en los detalles de los cálculos matemáticos, que pueden encontrarse en el libro de Stöckmann [15].

A.1. Matrices aleatorias gaussianas

Los elementos de una matriz perteneciente a una de las colectividades gaussianas se eligen aleatoriamente. Pero no se tiene completa libertad a la hora de fijarlos, ya que deben respetar las simetrías propias de su colectividad. En la colectividad GOE, por ejemplo, las matrices son reales y simétricas, invariantes bajo transformaciones ortogonales. Por tanto, si la matriz es de dimensión m se tienen $m(m+1)/2$ elementos de matriz independientes.

Vamos a obtener la distribución de probabilidad de los elementos de matriz, que nos permitirá saber la manera de generar una de estas matrices. Describimos el cálculo para el caso concreto del GOE.

La distribución de probabilidad $p(H_{11}, \dots, H_{mm})$ de los elementos de matriz no debe depender de la base a la que se aplica. Por tanto,

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = p(H'_{11}, \dots, H'_{mm}). \quad (\text{A.1})$$

H' se obtiene a partir de H mediante una transformación ortogonal ($H' = OHO^T$, $OO^T = 1$). La relación (A.1) implica que la función $p(H_{11}, \dots, H_{mm})$ sólo puede depender de trazas de potencias de H . Además, suponemos que los elementos de matriz no están correlacionados:

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = p(H_{11})p(H_{12}) \cdots p(H_{mm}). \quad (\text{A.2})$$

La única forma funcional que obedece ambas condiciones (A.1) y (A.2) es la siguiente:

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = C \exp[-BTr(H) - ATr(H^2)]. \quad (\text{A.3})$$

Podemos tomar $B = 0$ sin pérdida de generalidad (siempre podemos desplazar la energía media, $Tr(H)/m$, al cero). La constante C se fija utilizando la condición de normalización

$$\int p(H_{11}, \dots, H_{mm}) dH_{11} \dots dH_{mm} = 1. \quad (\text{A.4})$$

La expresión que se obtiene para la distribución de probabilidad es

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{m/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{m(m-1)/4} \exp\left[-A \sum_{i,j} H_{ij}^2\right] \quad (\text{A.5})$$

La constante A se puede expresar en términos de la varianza de los elementos de matriz diagonales o de los no diagonales:

$$\langle H_{ii}^2 \rangle = \frac{1}{2A}, \quad \langle H_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{4A}. \quad (\text{A.6})$$

Análogamente se obtienen las distribuciones para las colectividades GUE y GSE, imponiendo que éstas sean invariantes bajo transformaciones unitarias y simplécticas respectivamente. Las expresiones que se obtienen son:

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{m/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{m(m-1)/2} \exp\left\{-A \sum_{i,j} [(H_R)_{ij}^2 + (H_I)_{ij}^2]\right\}, \quad (\text{A.7})$$

para el GUE, donde $(H_R)_{ij}$ y $(H_I)_{ij}$ son las partes real e imaginaria, respectivamente, de H_{ij} ; y

$$p(H_{11}, \dots, H_{mm}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{m/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{2m(m-1)} \exp\left\{-A \sum_{i,j} [(H_0)_{ij}^2 + (H_x)_{ij}^2 + (H_y)_{ij}^2 + (H_z)_{ij}^2]\right\}, \quad (\text{A.8})$$

para el GSE, donde $(H_0)_{ij}$, $(H_x)_{ij}$, $(H_y)_{ij}$ y $(H_z)_{ij}$ son las componentes cuaterniónicas de H_{ij} .

A.2. Distribuciones de autovalores

La distribución de probabilidad de los elementos de matriz no permite una comparación directa con los datos experimentales, ya que normalmente lo único que se conoce son los autovalores, el espectro de energía. Así que tiene más interés práctico la distribución de autovalores. Esta última se calcula a partir de la primera y las expresiones obtenidas para cada una de las tres colectividades pueden incluirse en una sola:

$$P(E_1, \dots, E_m) \propto \prod_{i < j} |E_i - E_j|^\nu \exp\left(-A \sum_i E_i^2\right), \quad (\text{A.9})$$

donde ν es el índice de universalidad. Toma los valores 1, 2 y 4 para GOE, GUE y GSE, respectivamente. En esta expresión se observa la repulsión de niveles de la que se hablaba en la sección 2.2.2: la probabilidad de que dos autovalores tomen el mismo valor es nula. Es decir, los autovalores están correlacionados, no puede generarse cada uno mediante una variable aleatoria independiente. Para $\nu = 0$ tenemos el caso de autovalores descorrelacionados.

A.3. Densidad media de estados

La densidad de estados de un sistema cuántico se define como

$$g(E) = \sum_i \delta(E - E_i). \quad (\text{A.10})$$

En el caso de las colectividades gaussianas no estamos interesados en la densidad de estados de una sola matriz sino en el promedio sobre toda la colectividad. Es decir, si generamos un conjunto de matrices pertenecientes a una colectividad obtendremos a partir de ellas un conjunto de espectros distintos cuyos niveles de energía seguirán la distribución de probabilidad de la sección anterior para la colectividad correspondiente. Por tanto, el conjunto de densidades de estados que obtendremos a partir de los espectros serán también distintas pero la media de todas ellas será característica de la colectividad.

Wigner [16] derivó la densidad media de estados para las colectividades gaussianas y obtuvo la que se llama la ley del semicírculo de Wigner:

$$\langle g_\nu(E) \rangle = \begin{cases} \frac{2A}{\pi\nu} \sqrt{\frac{\nu m}{A} - E^2} & |E| < \sqrt{\frac{\nu m}{A}} \\ 0 & |E| > \sqrt{\frac{\nu m}{A}} \end{cases}. \quad (\text{A.11})$$

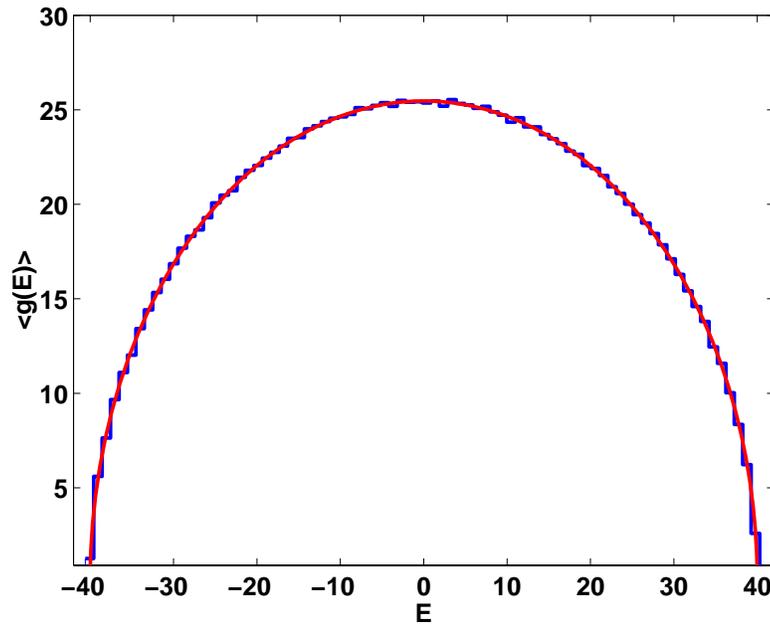


Figura A.1: Densidad media de estados obtenida a partir de 100 matrices aleatorias tipo GOE de dimensión 1600 (azul) y curva teórica (rojo).

En la figura A.1 se muestra un ejemplo numérico obtenido a partir de 100 matrices aleatorias de la colectividad GOE de dimensión 1600.

A.4. Funciones de correlación a k puntos

Algunos de los estadísticos más importantes que miden las correlaciones de largo alcance dependen de la función de correlación a dos puntos. Esta es la densidad de probabilidad de encontrar dos autovalores ε_1 y ε_2 a dos energías dadas, independientemente de la posición del resto de los autovalores. La función más general de correlación a k puntos se define como

$$R_k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \frac{m!}{(m-k)!} \int P(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) d\varepsilon_{k+1} \dots d\varepsilon_m, \quad (\text{A.12})$$

donde el factor que precede a la integral es para tener en cuenta todas las posibles formas de escoger k autovalores de entre un total de m .

El cálculo de las funciones de correlación a dos puntos para las colectividades GOE, GUE y GSE puede encontrarse en el libro de Mehta [14]. El resultado para los casos del GOE y el GUE es el siguiente:

$$Y_2(\varepsilon) = \left(\frac{\text{sen}\pi\varepsilon}{\pi\varepsilon} \right)^2 \quad (\text{GUE}) \quad (\text{A.13})$$

$$Y_2(\varepsilon) = \left(\frac{\text{sen}\pi\varepsilon}{\pi\varepsilon} \right)^2 - \text{si}(\pi\varepsilon) \left(\frac{\cos \pi\varepsilon}{\pi\varepsilon} - \frac{\text{sen}\pi\varepsilon}{(\pi\varepsilon)^2} \right) \quad (\text{GOE}), \quad (\text{A.14})$$

donde $Y_2(\varepsilon)$ es una función equivalente a la función de correlación a dos puntos, que se usa a menudo y se denomina función de agrupamiento:

$$Y_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = R_1(\varepsilon_1)R_1(\varepsilon_2) - R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (\text{A.15})$$

En realidad Y_2 y R_2 no dependen de dos variables, ε_1 y ε_2 , sino sólo de una, su diferencia: $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, que es la que aparece en las ecuaciones (A.13) y (A.14).

La función de correlación a un punto, $R_1(\varepsilon)$, da la probabilidad de encontrar un autovalor a la energía ε . Es decir, es idéntica a la densidad media de estados, $\langle \rho(\varepsilon) \rangle$, que en los espectros reescalados es igual a 1. Por tanto, la ecuación (A.15), puede también escribirse como

$$Y_2(\varepsilon) = 1 - R_2(\varepsilon). \quad (\text{A.16})$$

La función de correlación a dos puntos refleja la repulsión de niveles. De las expresiones (A.13) y (A.14) puede deducirse que

$$R_2(\varepsilon) \sim \begin{cases} \varepsilon & \text{GOE,} \\ \varepsilon^2 & \text{GUE.} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Por tanto, $R_2(0) = 0$. Es decir, que la probabilidad de encontrar dos autovalores con la misma energía es nula, como corresponde a los sistemas con repulsión de niveles. En cambio, para energías muy grandes R_2 se va aproximando a 1. Es decir, que la probabilidad de encontrar dos autovalores muy separados es muy grande, ya que cuanto más separados estén más débiles serán las correlaciones. En el caso de niveles descorrelacionados la función de correlación a dos puntos es $R_2(\varepsilon) = 1$.

Como se ha señalado al principio de la sección, algunos de los estadísticos que miden las correlaciones de largo alcance dependen de la función de correlación a dos puntos. Por ejemplo, la $\Delta_3(L)$, que es el utilizado en este

trabajo y se describe en la sección 2.3.1, puede escribirse en función de $R_2(\varepsilon)$ así:

$$\langle \Delta_3(L) \rangle = \frac{L}{15} - \frac{1}{15L^4} \int_0^L (L - \varepsilon)^3 (2L^2 - 9L\varepsilon - 3\varepsilon^2) Y_2(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (\text{A.18})$$

A partir de esta ecuación es fácil calcular la expresión dada en 2.3.1 para la $\langle \Delta_3(L) \rangle$ de los sistemas integrables: si $R_2(\varepsilon) = 1$ entonces $Y_2(\varepsilon) = 0$ y la ecuación (A.18) queda

$$\langle \Delta_3(L) \rangle = \frac{L}{15}. \quad (\text{A.19})$$

Apéndice B

Densidad de estados del sistema de N partículas

En este apéndice se realizan los cálculos omitidos en la sección 3.3.

B.1. Cálculo de la densidad de estados

En la sección 3.3.1 se obtuvo la siguiente expresión para la densidad de estados del sistema de N partículas:

$$g_a^{(N)}(E) = \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N} \sum_P (-1)^{t_P} \delta_{i_1 i_{p_1}} \delta_{i_2 i_{p_2}} \dots \delta_{i_N i_{p_N}} \delta(E - e_{i_1} - e_{i_2} - \dots - e_{i_N}); \quad (\text{B.1})$$

A continuación se realiza el cálculo explícito de los casos $N = 2, 3, 4$.

Caso $N = 2$:

Aplicando (B.1) al caso de dos partículas se obtiene

$$\begin{aligned} g^{(2)}(E) &= \frac{1}{2!} \left\{ \sum_{i,j} \delta_{ii} \delta_{jj} \delta(E - e_i - e_j) - \sum_{i,j} \delta_{ij} \delta_{ji} \delta(E - e_i - e_j) \right\} \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \delta(E - e_i - e_j) - \frac{1}{2!} \sum_i \delta(E - 2e_i). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Cada uno de los dos sumandos puede escribirse en función de la densidad de una partícula $\rho(E)$:

$$\begin{aligned}
\blacksquare \sum_{i,j} \delta(E - e_i - e_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \sum_i \delta(\eta - e_j) \sum_j \delta(E - \eta - e_j) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \rho(\eta) \rho(E - \eta) = \rho(E) * \rho(E) \\
\blacksquare \sum_i \delta(E - 2e_i) &= \frac{1}{2} \sum_i \delta(E/2 - e_i) = \frac{1}{2} \rho(E/2)
\end{aligned}$$

Así, la densidad $g^{(2)}(E)$ queda

$$g^{(2)}(E) = \frac{1}{2} \rho(E) * \rho(E) - \frac{1}{4} \rho(E/2). \quad (\text{B.3})$$

B.1.1. Caso $N = 3$

Para aplicar (B.1) al caso de tres partículas necesitamos conocer las permutaciones de tres índices (i, j, k) con sus correspondientes signos $(-1)^{t_p}$. Éstas se dan en la siguiente tabla:

n	3	3	2	2	2
+	+	+	-	-	-
i	k	j	j	k	i
j	i	k	i	j	k
k	j	i	k	i	j

En la primera fila, la n indica la permutación natural y los números indican el número de índices que intervienen en cada permutación. Por ejemplo, 2 indica que dos de los índices cambian su posición respecto de la permutación natural mientras que el tercero queda fijo en su posición; 3 indica que los tres índices cambian su posición respecto de la permutación natural.

Entonces la ecuación (B.1) quedaría

$$\begin{aligned}
g^{(3)}(E) &= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} (\delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{kk} + \delta_{ik}\delta_{ji}\delta_{kj} + \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} - \delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{jj}\delta_{ki} \\
&\quad - \delta_{ii}\delta_{jk}\delta_{kj}) \delta(E - e_i - e_j - e_k) = \frac{1}{3!} \left\{ \sum_{i,j,k} \delta(E - e_i - e_j - e_k) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_i \delta(E - 3e_i) - 3 \sum_{i,j} \delta(E - e_i - 2e_j) \right\}. \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

El primer sumando corresponde a la permutación natural, el segundo corresponde a los dos casos en que se intercambian los tres índices y el tercero a los tres casos en que se intercambian sólo dos índices.

Escribiendo cada sumatorio en función de la densidad de una partícula:

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \sum_{i,j,k} \delta(E - e_i - e_j - e_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \sum_i \delta(\eta - e_i) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_j \delta(\lambda - \eta - e_j) \\
 \sum_k \delta(E - \lambda - e_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \rho(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda - \eta) \rho(E - \lambda) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left[\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\eta) \rho(\lambda - \eta) d\eta \right] \rho(E - \lambda) = \rho(E) * \rho(E) * \rho(E) \\
 \blacksquare \sum_i \delta(E - 3e_i) &= \frac{1}{3} \sum_i \delta(E/3 - e_i) = \frac{1}{3} \rho(E/3) \\
 \blacksquare \sum_{i,j} \delta(E - e_i - 2e_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \sum_j \delta(\eta - 2e_j) \sum_i \delta(E - \eta - e_i) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \rho(\eta/2) \rho(E - \eta) = \frac{1}{2} \rho(E/2) * \rho(E),
 \end{aligned}$$

la densidad $g^{(3)}(E)$ queda

$$g^{(3)}(E) = \frac{1}{3!} \left[\rho(E) * \rho(E) * \rho(E) - \frac{3}{2} \rho(E/2) * \rho(E) + \frac{2}{3} \rho(E/3) \right]. \quad (\text{B.5})$$

B.1.2. Caso $N = 4$

Las permutaciones de cuatro índices (i, j, k, l) con sus signos correspondientes se dan en la tabla siguiente:

n	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
i	i	i	i	j	k	l	i	i	j	j	k
j	j	k	l	i	j	j	l	k	k	l	i
k	l	j	k	k	i	k	j	l	i	k	j
l	k	l	j	l	l	i	k	j	l	i	l

3	3	3	2,2	2,2	2,2	4	4	4	4	4	4
+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
k	l	l	j	k	l	j	j	k	k	l	l
j	i	j	i	l	k	l	k	i	l	i	k
l	k	i	l	i	j	i	l	l	j	j	i
i	j	k	k	j	i	k	i	j	i	k	j

De nuevo n indica la permutación natural y los números indican el número de índices que cambian de posición respecto de la permutación natural. 2, 2 indica que los cuatro índices se intercambian por pares.

Entonces, teniendo en cuenta todas las permutaciones, sin necesidad de escribir explícitamente todos los términos de la ecuación (B.1), es fácil deducir que ésta da lugar a la siguiente expresión:

$$g^{(4)}(E) = \frac{1}{4!} \left\{ \sum_{i,j,k,l} \delta(E - e_i - e_j - e_k - e_l) - 6 \sum_{i,j,k} \delta(E - e_i - e_j - 2e_k) \right. \\ \left. + 8 \sum_{i,j} \delta(E - e_i - 3e_j) + 3 \sum_{i,j} \delta(E - 2e_i - 2e_j) - 6 \sum_i \delta(E - 4e_i) \right\} \quad (\text{B.6})$$

Escribiendo cada sumatorio en función de la densidad de una partícula:

- $$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l} \delta(E - e_i - e_j - e_k - e_l) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \sum_i \delta(\alpha - e_i) \\ &\sum_j \delta(\lambda - \alpha - e_j) \sum_k \delta(\eta - \lambda - e_k) \sum_l \delta(E - \eta - e_l) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \rho(\alpha) \rho(\lambda - \alpha) \rho(\eta - \lambda) \rho(E - \eta) \\ &= \rho(E) * \rho(E) * \rho(E) * \rho(E) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} \delta(E - e_i - e_j - 2e_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_k \delta(\lambda - 2e_k) \sum_i \delta(\eta - \lambda - e_i) \\ \sum_j \delta(E - \eta - e_j) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda/2) \rho(\eta - \lambda) \rho(E - \eta) \\ &= \frac{1}{2} \rho(E/2) * \rho(E) * \rho(E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \sum_{i,j} \delta(E - e_i - 3e_j) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \sum_j \delta(\eta - 3e_j) \sum_i \delta(E - \eta - e_i) \\
& = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \rho(\eta/3) \rho(E - \eta) = \frac{1}{3} \rho(E/3) * \rho(E) \\
& \blacksquare \sum_{i,j} \delta(E - 2e_i - 2e_j) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \sum_j \delta(\eta - 2e_j) \sum_i \delta(E - \eta - 2e_i) \\
& = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \rho(\eta/2) \rho\left(\frac{E - \eta}{2}\right) = \frac{1}{4} \rho(E/2) * \rho(E/2) \\
& \blacksquare \sum_i \delta(E - 4e_i) = \frac{1}{4} \sum_i \delta(E/4 - e_i) = \frac{1}{4} \rho(E/4),
\end{aligned}$$

la densidad $g^{(4)}(E)$ queda

$$\begin{aligned}
g^{(4)}(E) = \frac{1}{4!} & \left[\rho(E) * \rho(E) * \rho(E) * \rho(E) - \frac{6}{2} \rho(E/2) * \rho(E) * \rho(E) \right. \\
& \left. + \frac{8}{3} \rho(E/3) * \rho(E) + \frac{3}{4} \rho(E/2) * \rho(E/2) - \frac{6}{4} \rho(E/4) \right]. \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

Las fracciones no se han simplificado para poder entender mejor de dónde proviene cada término y extender así la fórmula al caso de N partículas.

El primer sumando corresponde a la permutación natural. El segundo corresponde a las seis permutaciones en las que se intercambian sólo dos índices: el número de permutaciones (6) aparece en el numerador del coeficiente y el número de índices intercambiados (2) aparece en el denominador del coeficiente y en el denominador del argumento de una de las densidades ρ , debido a las propiedades de la δ de Dirac, según se puede ver en los desarrollos de los sumandos en términos de la densidad de una partícula. El signo (-) corresponde al signo de la permutación $(-1)^{t_p}$. Los demás sumandos pueden explicarse de la misma manera teniendo en cuenta la tabla de las permutaciones.

Por tanto, para poder escribir la densidad del sistema de N partículas sólo necesitamos clasificar las permutaciones de N índices como lo hemos hecho para los casos de 2, 3 y 4 partículas. Es decir, para una permutación P dada definimos la secuencia $(c_{p_1}, c_{p_2}, \dots, c_{p_r})$, que corresponde a los números de índices intercambiados en la permutación ($\sum_{i=1}^r c_{p_i} = N$). Por ejemplo, para el segundo sumando de (B.7) que hemos explicado sería $r = 3 : c_{p_1} = 2, c_{p_2} =$

1, $c_{p_3} = 1$, $\sum_{i=1}^3 c_{p_i} = 4$. Y el término a que dan lugar las seis permutaciones que comparten esta secuencia $(c_{p_1}, c_{p_2}, c_{p_3})$ es

$$\begin{aligned} & \sum_P \frac{(-1)^{t_p}}{\prod_{i=1}^r c_{p_i}} \rho(E/c_{p_1}) * \rho(E/c_{p_2}) * \cdots * \rho(E/c_{p_r}) \\ &= (-1)^{t_k} \frac{a_k}{\prod_{i=1}^r c_{k_i}} \rho(E/c_{k_1}) * \rho(E/c_{k_2}) * \cdots * \rho(E/c_{k_r}) \\ &= -\frac{6}{2} \rho(E/2) * \rho(E) * \rho(E), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde $a_k = 6$ es el número de permutaciones que comparten la secuencia $(c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_r})$. Entonces la densidad del sistema de N partículas puede escribirse como

$$g^{(N)}(E) = \sum_K (-1)^{t_k} \frac{a_k}{\prod_{i=1}^r c_{k_i}} \rho(E/c_{k_1}) * \rho(E/c_{k_2}) * \cdots * \rho(E/c_{k_r}), \quad (\text{B.9})$$

donde el sumatorio no se extiende a todas las permutaciones sino a las clases de permutaciones con la misma secuencia $(c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_r})$. Por ello hemos introducido el nuevo subíndice k , para distinguir el caso en que nos referimos a todas las permutaciones (subíndice p) del caso en que nos referimos a clases de permutaciones.

B.2. Parte suave de la densidad de estados

B.2.1. Caso $N = 2$

La expresión de la parte suave de la densidad de estados de dos partículas es la siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{g^{(2)}}(E) &= \frac{1}{2} \overline{\rho(E) * \rho(E)} - \frac{1}{4} \overline{\rho(E/2)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \overline{\rho(\eta) \rho(E - \eta)} - \frac{1}{4} \overline{\rho(E/2)} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^E d\eta \overline{\rho(\eta) \rho(E - \eta)} - \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde en la última igualdad se ha utilizado la expresión (3.32) para la densidad de estados de una partícula.

Para calcular la integral que aparece en (B.10) es necesario tener en cuenta la relación

$$\begin{aligned} \overline{\rho(E_1)\rho(E_2)} &= \delta(E_1 - E_2)R_1(E_1) + R_2(E_1, E_2) \\ &= \delta(E_1 - E_2)R_1(E_1) + R_1(E_1)R_1(E_2) - Y_2(E_1, E_2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

entre el promedio del producto $\rho(E_1)\rho(E_2)$ y las funciones de correlación a uno y dos puntos definidas en el apéndice A, donde se explica también que la función de correlación a un punto coincide con la densidad media de estados, que en este caso es igual a 1, según (3.32).

Entonces la parte suave de $g^{(2)}(E)$ queda

$$\begin{aligned} \overline{g^{(2)}}(E) &= \frac{1}{2} \left[\int_0^E d\eta \delta(2\eta - E) + \int_0^E d\eta - \int_0^E d\eta Y_2(\eta, E - \eta) \right] - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}E - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[\int_0^E d\eta \delta(2\eta - E) - \int_0^E d\eta Y_2(\eta, E - \eta) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

La primera de las integrales resulta

$$\int_0^E d\eta \delta(2\eta - E) = \frac{1}{2} \int_0^E d\eta \delta\left(\eta - \frac{E}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{B.13})$$

La segunda depende de la colectividad utilizada, ya que aparece la función Y_2 , que da cuenta de las correlaciones y depende por tanto del tipo de espectro. A continuación calcularemos esta integral para cada uno de los tres tipos de espectro utilizados: GUE, GOE y Poisson.

Espectro GUE

La expresión de Y_2 para el GUE es la siguiente (apéndice A):

$$Y_2(E_1, E_2) = Y_2(E) = \left(\frac{\text{sen}(\pi E)}{\pi E} \right)^2, \quad (\text{B.14})$$

donde $E = E_1 - E_2$.

La integral que queremos calcular es entonces

$$\int_0^E d\eta Y_2(\eta, E - \eta) = \int_0^E d\eta \left(\frac{\text{sen}[\pi(E - 2\eta)]}{\pi(E - 2\eta)} \right)^2, \quad (\text{B.15})$$

que, con el cambio de variable $\theta = E - 2\eta$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-E}^E d\theta \left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 &= \int_0^E d\theta \left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos(2\pi E) - 2\pi E \text{si}(2\pi E)}{2\pi^2 E}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

donde si es la función seno integral y tiene la siguiente expresión:

$$\text{si}(\theta) = - \int_{\theta}^{\infty} \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi. \quad (\text{B.17})$$

Por tanto, sustituyendo las integrales calculadas en la ecuación (B.12) la parte suave de la densidad de dos partículas queda para el caso del GUE

$$\overline{g^{(2)}}(E) = \frac{E}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1 - \cos(2\pi E) - 2\pi E \text{si}(2\pi E)}{2\pi^2 E}. \quad (\text{B.18})$$

Espectro GOE

La expresión de Y_2 para el GOE es (apéndice A)

$$Y_2(E) = \left(\frac{\text{sen}\pi E}{\pi E} \right)^2 - \text{si}(\pi E) \left(\frac{\cos \pi E}{\pi E} - \frac{\text{sen}\pi E}{(\pi E)^2} \right). \quad (\text{B.19})$$

La integral $\int_0^E d\eta Y_2(\eta, E - \eta)$ es entonces

$$\begin{aligned} \int_0^E d\eta Y_2(\eta, E - \eta) &= \int_0^E d\eta \left[\left(\frac{\text{sen}[\pi(E - 2\eta)]}{\pi(E - 2\eta)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \text{si}(\pi(E - 2\eta)) \left(\frac{\cos[\pi(E - 2\eta)]}{\pi(E - 2\eta)} - \frac{\text{sen}[\pi(E - 2\eta)]}{(\pi(E - 2\eta))^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

que, con el mismo cambio de variable utilizado en el caso del GUE ($\theta = E - 2\eta$), queda

$$\begin{aligned} \int_0^E d\eta Y_2(\eta, E - \eta) &= \int_0^E d\theta Y_2(\theta) = \int_0^E d\theta \left[\left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \text{si}(\pi\theta) \left(\frac{\cos(\pi\theta)}{\pi\theta} - \frac{\text{sen}(\pi\theta)}{(\pi\theta)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

De la expresión (B.17) se deduce que

$$\frac{d\text{si}(\pi\theta)}{d\theta} = \frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\theta}. \quad (\text{B.22})$$

Por tanto, la integral puede escribirse

$$\int_0^E d\theta Y_2(\theta) = \int_0^E d\theta \left\{ \left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 - \frac{\text{si}(\pi\theta)}{\pi^2} \frac{d^2}{d\theta^2} [\text{si}(\pi\theta)] \right\}. \quad (\text{B.23})$$

La primera parte de esta integral ya fue calculada (ecuación (B.16)), con el resultado

$$\int_0^E d\theta \left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos(2\pi E) - 2\pi E \text{si}(2\pi E)}{2\pi^2 E}. \quad (\text{B.24})$$

La segunda puede calcularse por partes y resulta

$$\begin{aligned} \int_0^E d\theta \left(\frac{\text{si}(\pi\theta)}{\pi^2} \frac{d^2}{d\theta^2} [\text{si}(\pi\theta)] \right) &= \left[\frac{\text{si}(\pi\theta)}{\pi^2} \frac{d}{d\theta} [\text{si}(\pi\theta)] \right]_0^E - \frac{1}{\pi^2} \int_0^E d\theta \left(\frac{d}{d\theta} [\text{si}(\pi\theta)] \right)^2 \\ &= \left[\frac{\text{si}(\pi\theta) \text{sen}(\pi\theta)}{\pi} \frac{1}{\pi\theta} \right]_0^E - \int_0^E d\theta \left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 \\ &= \frac{\text{si}(\pi E) \text{sen}(\pi E)}{\pi^2 E} + \frac{1}{2} - \int_0^E d\theta \left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Entonces la integral completa es

$$\int_0^E d\theta Y_2(\theta) = 2 \int_0^E d\theta \left(\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\text{si}(\pi E) \text{sen}(\pi E)}{\pi^2 E}. \quad (\text{B.26})$$

E introduciendo (B.24) aquí la expresión explícita es la siguiente:

$$\int_0^E d\eta Y_2(\eta, E - \eta) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\pi E) + 2\pi E \text{si}(2\pi E) - \text{si}(\pi E) \text{sen}(\pi E) - 1}{\pi^2 E}. \quad (\text{B.27})$$

Por tanto, la parte suave de la densidad de dos partículas para el GOE es

$$\overline{g^{(2)}}(E) = \frac{E}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1 + \text{si}(\pi E) \text{sen}(\pi E) - \cos(2\pi E) - 2\pi E \text{si}(2\pi E)}{\pi^2 E}. \quad (\text{B.28})$$

Espectro Poisson

En este caso la función $Y_2(E)$ es nula (apéndice A). Por tanto, la integral que estamos calculando es también nula y la densidad de estados de dos partículas queda

$$\overline{g^{(2)}}(E) = \frac{E}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{E}{2}. \quad (\text{B.29})$$

B.2.2. Caso $N = 3$

La parte suave de la densidad de estados de tres partículas tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \overline{g^{(3)}}(E) &= \frac{1}{3!} \left[\overline{\rho(E) * \rho(E) * \rho(E)} - \frac{3}{2} \overline{\rho(E/2) * \rho(E)} + \frac{2}{3} \overline{\rho(E/3)} \right] \\ &= \frac{1}{3!} \left[\int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \overline{\rho(\eta)\rho(\lambda-\eta)\rho(E-\lambda)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \int_0^E d\eta \overline{\rho(\eta/2)\rho(E-\eta)} + \frac{2}{3} \overline{\rho(E/3)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Si consideramos una primera aproximación en que la parte suave viene dada sólo por la parte proveniente de la parte suave de $\rho(E)$ tenemos

$$\begin{aligned} \overline{g^{(3)}}(E) &= \frac{1}{3!} \left[\int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \overline{\rho(\eta)\rho(\lambda-\eta)\rho(E-\lambda)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \int_0^E d\eta \overline{\rho(\eta/2)\rho(E-\eta)} + \frac{2}{3} \overline{\rho(E/3)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

que puede integrarse fácilmente teniendo en cuenta que $\rho(E) = 1$ y resulta

$$\overline{g^{(3)}}(E) = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} - \frac{3}{2}E + \frac{2}{3} \right]. \quad (\text{B.32})$$

A continuación consideramos el cálculo completo de la ecuación (B.30).

Para calcular la primera integral $I_1 \equiv \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \overline{\rho(\eta)\rho(\lambda-\eta)\rho(E-\lambda)}$ necesitamos utilizar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \overline{\rho(E_1)\rho(E_2)\rho(E_3)} &= R_3(E_1, E_2, E_3) + \delta(E_1 - E_2)R_2(E_2, E_3) \\ &\quad + \delta(E_1 - E_3)R_2(E_1, E_2) + \delta(E_2 - E_3)R_2(E_1, E_3) \\ &\quad + \delta(E_1 - E_2)\delta(E_2 - E_3)R_1(E_3), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

donde R_3 es la función de correlación a tres puntos, que puede escribirse en términos de la función de agrupamiento Y_3 :

$$R_3(E_1, E_2, E_3) = Y_3(E_1, E_2, E_3) + R_1(E_1)R_2(E_2, E_3) + R_1(E_2)R_2(E_1, E_3) + R_1(E_3)R_2(E_1, E_2) - 2R_1(E_1)R_1(E_2)R_1(E_3). \quad (\text{B.34})$$

Entonces la expresión (B.33) puede escribirse como

$$\overline{\rho(E_1)\rho(E_2)\rho(E_3)} = R_1(E_1)R_1(E_2)R_1(E_3) + \xi_3(E_1, E_2, E_3), \quad (\text{B.35})$$

donde la función ξ_3 viene dada por

$$\begin{aligned} \xi_3(E_1, E_2, E_3) &= Y_3(E_1, E_2, E_3) + [\delta(E_1 - E_2) + R_1(E_1)]R_2(E_2, E_3) \\ &+ [\delta(E_1 - E_3) + R_1(E_3)]R_2(E_1, E_2) + [\delta(E_2 - E_3) + R_1(E_2)]R_2(E_1, E_3) \\ &+ \delta(E_1 - E_2)\delta(E_2 - E_3)R_1(E_3) - 3R_1(E_1)R_1(E_2)R_1(E_3). \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Para calcular la segunda integral $I_2 = \int_0^E d\eta \overline{\rho(\eta/2)\rho(E-\eta)}$ debemos hacer uso de la expresión

$$\begin{aligned} \overline{\rho(E_1)\rho(E_2)} &= \delta(E_1 - E_2)R_1(E_1) + R_2(E_1, E_2) \\ &= \delta(E_1 - E_2)R_1(E_1) + R_1(E_1)R_1(E_2) - Y_2(E_1, E_2), \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

que ya fue utilizada en el caso de dos partículas. Puede escribirse también como

$$\overline{\rho(E_1)\rho(E_2)} = R_1(E_1)R_1(E_2) + \xi_2(E_1, E_2), \quad (\text{B.38})$$

donde la función ξ_2 sería entonces

$$\xi_2(E_1, E_2) = -Y_2(E_1, E_2) + \delta(E_1 - E_2)R_1(E_1). \quad (\text{B.39})$$

Introduciendo B.35 y B.38 en B.30 y teniendo en cuenta que $R_1(E) = \overline{\rho(E)} = 1$ se llega a

$$\begin{aligned} \overline{g^{(3)}(E)} &= \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} - \frac{3}{2}E + \frac{2}{3} + \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \xi_3(\eta, \lambda - \eta, E - \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \int_0^E d\eta \xi_2(\eta/2, E - \eta) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

La parte de las integrales depende del tipo de espectro. Vemos a continuación los casos de GUE y Poisson.

Espectro GUE

Para encontrar cotas a las expresiones de ξ_2 y ξ_3 vamos a acotar primero las funciones que aparecen en ellas. Para el caso del GUE éstas son

$$Y_2(E_1, E_2) = \left(\frac{\text{sen}[\pi(E_1 - E_2)]}{\pi(E_1 - E_2)} \right)^2 \Rightarrow 0 \leq Y_2 \leq 1 \quad (\text{B.41})$$

$$R_2(E_1, E_2) = 1 - Y_2(E_1, E_2) \Rightarrow 0 \leq R_2 \leq 1 \quad (\text{B.42})$$

$$Y_3(E_1, E_2, E_3) = 2 \frac{\text{sen}(|E_1 - E_2|)}{|E_1 - E_2|} \frac{\text{sen}(|E_2 - E_3|)}{|E_2 - E_3|} \frac{\text{sen}(|E_3 - E_1|)}{|E_3 - E_1|} \Rightarrow 0 \leq Y_3 \leq 2. \quad (\text{B.43})$$

Entonces, según (B.36) y (B.39), ξ_2 y ξ_3 quedan acotadas así:

$$\delta(E_1 - E_2) - 1 \leq \xi_2 \leq \delta(E_1 - E_2) \quad (\text{B.44})$$

$$\begin{aligned} \delta(E_1 - E_2)\delta(E_2 - E_3) - 3 \leq \xi_3 \leq \delta(E_1 - E_2) + \delta(E_1 - E_3) \\ + \delta(E_2 - E_3) + \delta(E_1 - E_2)\delta(E_2 - E_3) + 2 \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Volviendo a las integrales de la expresión (B.40) éstas quedarían acotadas por

$$\begin{aligned} \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta [\delta(2\eta - \lambda)\delta(2\lambda - \eta - E) - 3] &\leq \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \xi_3(\eta, \lambda - \eta, E - \lambda) \\ &\leq \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta [2 + \delta(2\eta - \lambda) + \delta(\lambda + \eta - E) + \delta(2\lambda - \eta - E) \\ &\quad + \delta(2\eta - \lambda)\delta(2\lambda - \eta - E)], \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

$$\int_0^E d\eta [\delta(\eta/2 - E) - 1] \leq \int_0^E d\eta \xi_2(\eta/2, E - \eta) \leq \int_0^E d\eta \delta(\eta/2 - E). \quad (\text{B.47})$$

Calculando las integrales se obtiene

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{2}E^2 \leq \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \xi_3(\eta, \lambda - \eta, E - \lambda) \leq E^2 + \frac{3}{2}E + \frac{1}{3}, \quad (\text{B.48})$$

$$-E \leq \int_0^E d\eta \xi_2(\eta/2, E - \eta) \leq 0. \quad (\text{B.49})$$

Es decir, que la contribución de estas integrales a la densidad de estados está acotada entre polinomios que son a lo sumo de grado 2.

Espectro Poisson

En este caso las funciones que aparecen en las expresiones de ξ_2 y ξ_3 son

$$Y_2(E_1, E_2) = 0, \quad (\text{B.50})$$

$$R_2(E_1, E_2) = 1 - Y_2(E_1, E_2) = 1, \quad (\text{B.51})$$

$$Y_3(E_1, E_2, E_3) = 0. \quad (\text{B.52})$$

Entonces es fácil calcular las integrales que aparecen en (B.40):

$$\begin{aligned} \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta \xi_3(\eta, \lambda - \eta, E - \lambda) &= \int_0^E d\lambda \int_0^\lambda d\eta [\delta(2\eta - \lambda) + \delta(\eta + \lambda - E) \\ &+ \delta(2\lambda - \eta - E) + \delta(2\eta - \lambda)\delta(2\lambda - \eta - E)] = \frac{3}{2}E + \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

$$\int_0^E d\eta \xi_2(\eta/2, E - \eta) = \int_0^E d\eta \delta(\eta/2 - E) = 0. \quad (\text{B.54})$$

La expresión (B.40) queda

$$\overline{g^{(3)}}(E) = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} - \frac{3}{2}E + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}E + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3!} \left[\frac{E^2}{2} + 1 \right]. \quad (\text{B.55})$$

B.2.3. Caso $N = 4$

La expresión para la parte suave de la densidad de estados de cuatro partículas es la siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{g^{(4)}}(E) &= \frac{1}{4!} \left[\overline{\rho(E) * \rho(E) * \rho(E) * \rho(E)} - \frac{6}{2} \overline{\rho(E/2) * \rho(E) * \rho(E)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} \overline{\rho(E/3) * \rho(E)} + \frac{3}{4} \overline{\rho(E/2) * \rho(E/2)} - \frac{6}{4} \overline{\rho(E/4)} \right] \\ &= \frac{1}{4!} \left[\int_0^E d\eta \int_0^\eta d\lambda \int_0^\lambda d\alpha \overline{\rho(\alpha)\rho(\lambda - \alpha)\rho(\eta - \lambda)\rho(E - \eta)} \right. \\ &\quad - \frac{6}{2} \int_0^E d\eta \int_0^\eta d\lambda \overline{\rho(\lambda/2)\rho(\eta - \lambda)\rho(E - \eta)} + \frac{8}{3} \int_0^E d\eta \overline{\rho(\eta/3)\rho(E - \eta)} \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \int_0^E d\eta \overline{\rho(\eta/2)\rho((E - \eta)/2)} - \frac{6}{4} \overline{\rho(E/4)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

En primera aproximación se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{g^{(4)}}(E) &= \frac{1}{4!} \left[\int_0^E d\eta \int_0^\eta d\lambda \int_0^\lambda d\alpha \overline{\rho}(\alpha) \overline{\rho}(\lambda - \alpha) \overline{\rho}(\eta - \lambda) \overline{\rho}(E - \eta) \right. \\ &\quad - \frac{6}{2} \int_0^E d\eta \int_0^\eta d\lambda \overline{\rho}(\lambda/2) \overline{\rho}(\eta - \lambda) \overline{\rho}(E - \eta) + \frac{8}{3} \int_0^E d\eta \overline{\rho}(\eta/3) \overline{\rho}(E - \eta) \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \int_0^E d\eta \overline{\rho}(\eta/2) \overline{\rho}((E - \eta)/2) - \frac{6}{4} \overline{\rho}(E/4) \right] = \frac{1}{4!} \left[\frac{E^3}{6} - \frac{3}{2} E^2 + \frac{41}{12} E - \frac{6}{4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Para realizar el cálculo completo de la ecuación (B.56) necesitamos hacer uso nuevamente de las expresiones (B.35) y (B.38), así como de la siguiente:

$$\overline{\rho(E_1)\rho(E_2)\rho(E_3)\rho(E_4)} = R_1(E_1)R_1(E_2)R_1(E_3)R_1(E_4) + \xi_4(E_1, E_2, E_3, E_4), \quad (\text{B.58})$$

donde la función ξ_4 viene dada por

$$\begin{aligned} \xi_4(E_1, E_2, E_3, E_4) &= R_4(E_1, E_2, E_3, E_4) - R_1(E_1)R_1(E_2)R_1(E_3)R_1(E_4) \\ &\quad + \delta(E_1 - E_2)R_3(E_2, E_3, E_4) + \delta(E_1 - E_3)R_3(E_1, E_2, E_4) \\ &\quad + \delta(E_1 - E_4)R_3(E_2, E_3, E_4) + \delta(E_2 - E_3)R_3(E_1, E_2, E_4) \\ &\quad + \delta(E_2 - E_4)R_3(E_1, E_2, E_3) + \delta(E_3 - E_4)R_3(E_1, E_2, E_3) \\ &\quad + \delta(E_1 - E_2)\delta(E_2 - E_3)R_2(E_1, E_4) + \delta(E_1 - E_2)\delta(E_2 - E_4)R_2(E_1, E_3) \\ &\quad + \delta(E_1 - E_3)\delta(E_3 - E_4)R_2(E_1, E_2) + \delta(E_2 - E_3)\delta(E_3 - E_4)R_2(E_1, E_2) \\ &\quad + \delta(E_1 - E_2)\delta(E_2 - E_3)\delta(E_3 - E_4)R_1(E_1). \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Introduciendo las tres expresiones en (B.56) se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{g^{(4)}}(E) &= \frac{1}{4!} \left\{ \int_0^E d\eta \int_0^\eta d\lambda \int_0^\lambda d\alpha [R_1(\alpha)R_1(\lambda - \alpha)R_1(\eta - \lambda)R_1(E - \eta) \right. \\ &\quad \left. + \xi_4(\alpha, \lambda - \alpha, \eta - \lambda, E - \eta)] \right. \\ &\quad - \frac{6}{2} \int_0^E d\eta \int_0^\eta d\lambda [R_1(\lambda/2)R_1(\eta - \lambda)R_1(E - \eta) + \xi_3(\lambda/2, \eta - \lambda, E - \eta)] \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} \int_0^E d\eta [R_1(\eta/3)R_1(E - \eta) + \xi_2(\eta/3, E - \eta)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \int_0^E d\eta [R_1(\eta/2)R_1((E - \eta)/2) + \xi_2(\eta/2, (E - \eta)/2)] - \frac{6}{4} R_1(E/4) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Teniendo en cuenta que $R_1(E) = \bar{\rho}(E) = 1$ y comparando con la ecuación (B.57) vemos que la parte proveniente de la parte fluctuante de $\rho(E)$ son las contribuciones de las funciones ξ_2 , ξ_3 y ξ_4 .

Consideramos de nuevo los casos GUE y Poisson. Todas las funciones que aparecen en la expresión (B.60) son conocidas excepto R_4 :

$$R_4(E_1, E_2, E_3, E_4) = 1, \quad \text{Poisson} \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned} R_4(E_1, E_2, E_3, E_4) = & 1 - 2(s_{12}s_{23}s_{34}s_{41} + s_{13}s_{34}s_{42}s_{21} + s_{14}s_{42}s_{23}s_{31}) \\ & + 2(s_{12}s_{23}s_{31} + s_{12}s_{24}s_{41} + s_{13}s_{34}s_{41} + s_{23}s_{34}s_{42}) \\ & - (s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{14}^2 + s_{23}^2 + s_{24}^2 + s_{34}^2) \\ & + (s_{12}^2s_{34}^2 + s_{13}^2s_{24}^2 + s_{14}^2s_{23}^2), \quad \text{GUE}, \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

donde s_{ij} viene dada por

$$s_{ij} = \frac{\text{sen}(|E_i - E_j|)}{|E_i - E_j|}. \quad (\text{B.63})$$

En el caso de Poisson es claro que la densidad $\overline{g^{(4)}}(E)$ sigue siendo un polinomio, al igual que en los casos anteriores, de grado 3 en este caso. En el caso del GUE, las integrales de ξ_2 y ξ_3 estarían acotadas entre polinomios a lo sumo de grado 2, como ya hemos visto, y la de ξ_4 es fácil deducir a partir de las expresiones (B.59) y (B.62) que queda acotada entre polinomios a lo sumo de grado 3.

Bibliografía

- [1] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH, Physic Verlag, Weinheim (1988).
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum mechanics, Volumen I*, Wiley-Interscience, Francia (1977).
- [3] M. V. Berry, M. Tabor, *Level clustering in the regular spectrum*, Proc. R. Soc. Lond. A, **356**, 375 (1977).
- [4] O. Bohigas, M. J. Gianonni, C. Schmit, *Characterization of CHaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett., **52**, 1 (1984).
- [5] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classsical Mechanics*, Springer New York, 1978.
- [6] A. Fernández-Rañada, *Dinámica clásica*, Alianza Editorial, Madrid (1994).
- [7] S. Weigert, *The problem of quantum integrability*, Physyca A, **D56**, 107 (1992).
- [8] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer, Dordechdt, 1995.
- [9] J. Ishiwara, Tokyo Sugaku Buturigakkawi Kizi, **8**, 106 (1915). A. Sommerfeld, Ann. Phys. (Leipzig), **51**, 125 (1916). W. Wilson, Phil. Mag., **29**, 795 (1915).
- [10] A. Messiah, *Quantum Mechanics, Volumen I, Cap. 6*, North-Holland Amsterdam, 1961.

- [11] A. Einstein, *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein*, Verh. Dtsch. Phys. Ges., **19**, 82 (1917).
- [12] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer New York, 1990.
- [13] I. C. Percival, *Regular and irregular spectra*, J. Phys. B, **6**, L229 (1973).
- [14] M. L. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, London, 1999.
- [15] H-J Stöckmann, *Quantum Chaos: an introduction*, Cambridge University Press, 1999.
- [16] E. P. Wigner *Characteristic vectors of bordered matrices of infinite dimensions*, Ann. Math., **62**, 548 (1955).
- [17] R. U. Haq, A. Pandey, O. Bohigas, *Fluctuation Properties of Nuclear Energy Levels: Do Theory and Experiment Agree?*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1086 (1982).
- [18] O. Bohigas, R. U. Haq, A. Pandey, *Fluctuation properties of nuclear energy levels and widths: comparison of theory with experiments*. In K. H. Böckhoff, editor, Nuclear Data for Science and Technology, p. 809. Reidel Dordrecht, 1983.
- [19] H. S. Camarda, P. D. Georgopoulos, *Statistical Behavior of Atomic Energy Levels: Agreement with Random-Matrix Theory*, Phys. Rev. Lett., **50**, 492 (1983).
- [20] A. Hönl, D. Wintgen, *Spectral properties of strongly perturbed Coulomb systems: Fluctuation properties* Phys. Rev. A, **39**, 5642 (1989).
- [21] T. Zimmermann, H. Köppel, L. S. Cederbaum, G. Persch, W. Demtröder, *Confirmation of random-matrix fluctuations in molecular spectra*, Phys. Rev. Lett., **61**, 3 (1988).
- [22] S. Deus, P. M. Koch, L. Sirko, *Statistical properties of the eigenfrequency distribution of three-dimensional microwave cavities*, Phys. Rev. E, **52**, 1146 (1995).
- [23] O. Legrand, C. Schmit, D. Sornette, *Quantum chaos methods applied to high-frequency plate vibrations*, Europhys. Lett., **18**, 101 (1992).

- [24] E. Caurier, B. Grammaticos, *Extreme level repulsion for chaotic quantum Hamiltonians*, Phys. Lett. A, **136**, 387 (1989).
- [25] P. So, S. M. Anlage, E. Ott, R. N. Oerter, *Wave chaos experiments with and without time reversal symmetry: GUE and GOE statistics*, Phys. Rev. Lett. **74**, 2662 (1995).
- [26] U. Stoffregen, J. Stein, H.-J. Stöckmann, M. Kus, F. Haake, *Microwave billiards with broken time reversal symmetry*, Phys. Rev. Lett. **74**, 2666 (1995).
- [27] T. A. Brody, *A statistical measure for the repulsion of energy levels*, Lettere Al Nuovo Cimento **7**, 482 (1973).
- [28] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, S. S. M. Wong, *Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations*, Rev. Mod. Phys. **52**, 385 (1981).
- [29] R. A. Molina, A. Relaño, J. Retamosa, *Misleading signatures of quantum chaos*. Phys. Rev. E **66** 036209 (2002).
- [30] M. V. Berry, *Semiclassical theory of spectral rigidity*, Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 229 (1985).
- [31] A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, J. Retamosa, E. Faleiro, *Quantum Chaos and 1/f noise*, Phys. Rev. Lett. **89** 244102 (2002).
- [32] B. B. Mandelbrot, *Multifractals and 1/f Noise*, Springer, New York (1999).
- [33] E. Faleiro, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, L. Muñoz, A. Relaño, J. Retamosa, *Theoretical derivation of 1/f noise in quantum chaos*, enviado a PRL, arXiv:nlin.CD/0402028 (17 Feb 2004).
- [34] W. E. Ormand, R. A. Broglia, *Spectral properties of shell-model Hamiltonians*, Phys. Rev. C **46**, 1710 (1992).
- [35] R. A. Molina, J. M. G. Gómez, J. Retamosa, *Energy and isospin dependence of nuclear chaos*, Phys. Rev. C **63**, 014311 (2000).
- [36] I. V. Ponomarev, V. V. Flambaum, A. A. Gribakina, G. F. Gribakin, *Can we apply statistical laws to small systems? The Cerium atom*, arXiv:cond-mat/9710172v1 (17 Oct 1997).

- [37] B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears, P. Lambrianides, H. B. Shore, *Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition* Phys. Rev. B **47** 11487 (1993).
- [38] G. Montambaux, D. Poliblanco, J. Bellisard, C. Sire, *Quantum chaos in spin-fermion models*, Phys. Rev. Lett. **70**, 497 (1993).
- [39] Ph. Jacquod, D. L. Shepelyansky, *Emergence of quantum chaos in finite interacting Fermi systems*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1837 (1997).
- [40] P. H. Song, *Scaling near quantum chaos border in interacting Fermi systems*, arXiv:cond-mat/0004237v2 (20 Oct 2000).
- [41] M. Robnik, *Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 3971-3986 (1983).
- [42] M. Robnik, *Quantising a generic family of billiards with analytic boundaries*, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 1049-1074 (1983).
- [43] R. Markarian, *New ergodic billiards: exact results*, Nonlinearity **6**, 819 (1993).
- [44] J. M. G. Gómez, A. Relaño, L. Salasnich, M. Vranicar, M. Robnik, *$1/f^\alpha$ noise in spectral fluctuations of quantum systems*, enviado a PRL.
- [45] H. P. Baltes, E. R. Hilf, *Spectra of Finite Systems*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (1978).