

# Máster Interuniversitario en Física Nuclear



Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear  
Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid

Departamento de Física y Química Teóricas  
Instituto de Estructura de la Materia  
CSIC - Madrid

## Estudio sistemático de las distribuciones de intensidad Gamow-Teller en emisores doble beta

## Systematic study of Gamow-Teller strength distributions in double beta decay partners

Septiembre 2014

**Autor:** Diana Navas Nicolás  
dnnicolas@ucm.es  
**Directores:** Pedro Sarriguren Suquilbide  
pedro.sarriguren@csic.es  
Elvira Moya de Guerra Valgañón  
emoyaval@fis.ucm.es



# Resumen

En este trabajo se utiliza un formalismo basado en la aproximación de fases aleatorias para cuasipartículas (QRPA) con el fin de describir simultáneamente la distribución de intensidad Gamow-Teller (GT) tanto en el núcleo padre como en el núcleo hijo, así como los elementos de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  de la desintegración doble beta con emisión de neutrinos. Los cálculos se llevarán a cabo sobre una serie de emisores doble beta con  $A=48, 76, 82, 96, 100, 116, 128, 130, 136$  y  $150$ , usando un campo medio de Hartree-Fock autoconsistente con fuerzas de Skyrme, correlaciones de pairing en aproximación BCS y fuerzas residuales partícula-hueco ( $ph$ ) y partícula-partícula ( $pp$ ) tratadas en QRPA. Nuestros resultados se compararán con los experimentales obtenidos a partir de reacciones de intercambio de carga de alta y baja resolución energética. Se discutirá además la dependencia de la distribución de intensidad GT y los elementos de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  con el tipo de fuerza de Skyrme utilizado, con la deformación de los núcleos padre e hijo y con las interacción residuales  $ph$  y  $pp$ .

## Palabras clave

Desintegración beta, desintegración doble beta, estructura nuclear, deformación nuclear, campo medio HF+QRPA deformado, intensidad Gamow-Teller, elementos de matriz doble beta.



# Abstract

In this work we use a deformed quasiparticle random phase approximation (QRPA) formalism to describe simultaneously the energy distribution of the Gamow-Teller (GT) strength in both double beta decay partners and the two-neutrino double beta decay matrix elements  $M_{GT}^{2\nu}$ . Calculations are performed in a series of double beta decay partners with  $A=48, 76, 82, 96, 100, 116, 128, 130, 136$  and  $150$ , using a deformed Hartree-Fock mean field with Skyrme forces, pairing correlations in BCS approximation and residual interaction in both particle-hole ( $ph$ ) and particle-particle ( $pp$ ) channel treated in QRPA. Our results are compared with experimental ones extracted from low and high energy resolution charge-exchange reactions. We also discuss the sensitivity of the GT strength distribution and the matrix elements  $M_{GT}^{2\nu}$  to the Skyrme force, to the deformation of parent and daughter nuclei and to the residual interactions  $ph$  and  $pp$ .

## Key words

Beta decay, double beta decay, nuclear structure, nuclear deformation, deformed mean field HF+QRPA, Gamow-Teller strength, double-beta matrix elements.



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>7</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>9</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>13</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>15</b>
1.1. Motivación . . . . .	15
1.2. Objetivos . . . . .	17
1.3. Organización . . . . .	17
<b>2. Formalismo teórico</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción . . . . .	19
2.2. Método de Hartree-Fock . . . . .	19
2.2.1. Función de onda nuclear . . . . .	19
2.2.2. Energía de Hartree-Fock . . . . .	21
2.2.3. Principio variacional . . . . .	22
2.3. Cálculos de Hartree-Fock con fuerzas de Skyrme . . . . .	24
2.4. Método de Hartree-Fock para núcleos deformados . . . . .	28
2.5. Método de Hartree-Fock con ligadura en la deformación . . . . .	32
2.6. Correlaciones de apareamiento en aproximación BCS . . . . .	33
2.7. Aproximación de fases aleatorias (RPA) . . . . .	38
2.7.1. RPA de cuasipartículas (QRPA) . . . . .	40
2.8. Ecuaciones de QRPA y densintegración $\beta$ . . . . .	41
<b>3. Desintegración beta</b>	<b>47</b>
3.1. Desintegración beta simple . . . . .	47
3.2. Desintegración doble beta . . . . .	51
3.2.1. Descripción del modelo teórico . . . . .	52

<b>4. Resultados</b>	<b>57</b>
4.1. Cálculo de las distribuciones de intensidad Gamow-Teller . . .	57
4.1.1. Propiedades del estado fundamental . . . . .	57
4.1.2. Distribuciones de intensidad Gamow-Teller . . . . .	65
4.1.3. Distribuciones $B(GT)$ a bajas energías . . . . .	77
4.1.4. Papel de los parámetros de cálculo . . . . .	87
4.2. Elementos de matriz doble beta . . . . .	92
<b>5. Conclusiones</b>	<b>99</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>



# Índice de figuras

2.1. Representación esquemática de las formas nucleares en función del parámetro de deformación. . . . .	32
2.2. Ejemplo de la curva de energía en función del momento cuadrupolar con $f(\mu, \langle \hat{Q} \rangle)$ como ligadura cuadrática. . . . .	33
3.1. Representación esquemática de una desintegración $2\nu\beta\beta$ entre los estados $0^+$ como 2 transiciones a través de los estados intermedios $1^+$ . . . . .	54
4.1. Energía de ligadura en MeV frente al parámetro de deformación cuadrupolar $\beta$ para un cálculo de Hartree-Fock con fuerzas de Skyrme Sk3, SG2 y SLy4 para los núcleos $^{48}\text{Ca}$ - $^{48}\text{Ti}$ , $^{76}\text{Ge}$ - $^{76}\text{Se}$ y $^{82}\text{Se}$ - $^{82}\text{Kr}$ . . . . .	58
4.2. Lo mismo que en la figura 4.1 para los núcleos $^{96}\text{Zr}$ - $^{96}\text{Mo}$ , $^{100}\text{Mo}$ - $^{100}\text{Ru}$ y $^{116}\text{Cd}$ - $^{116}\text{Sn}$ . . . . .	59
4.3. Lo mismo que en la figura 4.1 para los núcleos $^{128}\text{Te}$ - $^{128}\text{Xe}$ , $^{130}\text{Te}$ - $^{130}\text{Xe}$ y $^{136}\text{Xe}$ - $^{136}\text{Ba}$ . . . . .	60
4.4. Lo mismo que en la figura 4.1 para los núcleos $^{150}\text{Nd}$ y $^{150}\text{Sm}$ . . . . .	61
4.5. Figuras superiores: Distribuciones de intensidad Gamow-Teller ( $\text{GT}^+$ y $\text{GT}^-$ ) para los núcleos $^{48}\text{Ca}$ y $^{48}\text{Ti}$ , representadas frente a la energía de excitación correspondientes al núcleo hijo. Las líneas rojas representan la intensidad que se obtiene con interacciones residuales $\chi_{ph} = 0,15$ MeV $\kappa_{pp} = 0,030$ MeV, mientras que para las líneas azules $\chi_{ph} = 11/A$ MeVy $\kappa_{pp} = 2/A$ MeV. Figuras inferiores: sumas acumuladas de la intensidad GT. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Yako09] . . . . .	67

4.6.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{76}\text{Ge}$ y $^{76}\text{Se}$ . Se muestran las distribuciones que se obtienen si las deformaciones en equilibrio fueran prolada (línea continua), oblada (línea a trazos) y esférica (línea de puntos y trazos). Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Hel97] para el germanio y de [Mad89] para el selenio . . . . .	68
4.7.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{82}\text{Se}$ y $^{82}\text{Kr}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Mad89]	69
4.8.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{96}\text{Zr}$ y $^{96}\text{Mo}$ . . .	70
4.9.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{100}\text{Mo}$ y $^{100}\text{Ru}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Aki97]	71
4.10.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{116}\text{Cd}$ y $^{116}\text{Sn}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Aki97]	72
4.11.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{128}\text{Te}$ y $^{128}\text{Xe}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Mad89] . . . . .	73
4.12.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{130}\text{Te}$ y $^{130}\text{Xe}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Mad89] . . . . .	74
4.13.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{136}\text{Xe}$ y $^{136}\text{Ba}$ . .	75
4.14.	Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos $^{150}\text{Nd}$ y $^{150}\text{Sm}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Gue11] . . . . .	76
4.15.	Lo mismo que la figura 4.5 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Gre07] para el $^{48}\text{Ca}$ y de [Rak04] para el $^{48}\text{Ti}$ . . . . .	78
4.16.	Lo mismo que la figura 4.6 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Thi12a] para el $^{76}\text{Ge}$ y de [Gre08] para el $^{76}\text{Se}$ . . . . .	79
4.17.	Lo mismo que la figura 4.8 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Thi12b] . . . . .	80
4.18.	Lo mismo que la figura 4.9 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Thi12c] . . . . .	81
4.19.	Lo mismo que la figura 4.10 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Aki97] para el $^{116}\text{Cd}$ y de [Rak05] para el $^{116}\text{Sn}$ . . . . .	82
4.20.	Lo mismo que la figura 4.11 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Pup12] . . . . .	83

4.21. Lo mismo que la figura 4.12 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Pup12] . . . . .	84
4.22. Lo mismo que la figura 4.13 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Pup11] . . . . .	85
4.23. Lo mismo que la figura 4.14 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Gue11] . . . . .	86
4.24. Distribuciones de intensidad Gamow-Teller en $^{150}\text{Nd}$ para diversas intensidades de las fuerza residuales $\chi_{ph}$ (izquierda) y $\kappa_{pp}$ (derecha). . . . .	88
4.25. Lo mismo que la figura 4.24 en $^{116}\text{Cd}$ . . . . .	88
4.26. Lo mismo que las figuras 4.24 y 4.25 a bajas energías. . . . .	89
4.27. Lo mismo que en la figura 4.14 para una fuerza de Skyrme SG2 y constantes de acoplamiento $\chi_{ph} = 11/A$ y $\kappa_{pp} = 2/A$ . .	90
4.28. Lo mismo que en la figura 4.10 para una fuerza de Skyrme SG2 y constantes de acoplamiento $\chi_{ph} = 11/A$ y $\kappa_{pp} = 2/A$ . .	91
4.29. Elementos de matriz nucleares de la doble desintegración beta del núcleo $^{150}\text{Nd}$ para varias deformaciones del padre y del hijo en función de la energía de excitación máxima considerada en el núcleo intermedio virtual. . . . .	93
4.30. Elementos de matriz de doble desintegración beta para el núcleo $^{150}\text{Nd}$ en función de la interacción residual $\kappa_{pp}$ . . . . .	94
4.31. Elementos de matriz de doble desintegración beta para el núcleo $^{150}\text{Nd}$ con una deformación experimental $\beta = 0,285$ en función de la energía de excitación máxima considerada en el núcleo intermedio virtual. . . . .	94
4.32. Elementos de matriz de doble desintegración beta para el núcleo $^{116}\text{Cd}$ en función de las deformaciones del padre y del hijo. . . . .	96



# Índice de tablas

2.1. Valores de los parámetros de las fuerzas de Skyrme Sk3, SG2 y SLy4. . . . .	28
4.1. Valores de los parámetros de gap para protones y neutrones $\Delta_n$ y $\Delta_p$ (MeV), parámetros b ( $\text{fm}^{-1}$ ) y q de la base del oscilador, deformación $\beta$ , mínimo de energía HF $E_T$ (MeV) y radio de carga $r_c$ (fm) para las fuerzas de Skyrme Sk3, SG2 y SLy4. . .	62
4.2. Valores de los parámetros de gap para protones y neutrones $\Delta_n$ y $\Delta_p$ (MeV), parámetros b y q, deformación del estado fundamental $\beta$ y constantes de acoplo de la interacción residual $\chi_{ph}$ y $\kappa_{pp}$ para la desintegración $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ . . . . .	92
4.3. Valores de los parámetros de gap para protones y neutrones $\Delta_n$ y $\Delta_p$ (MeV), parámetros b y q, deformación del estado fundamental $\beta$ y constantes de acoplo de la interacción residual $\chi_{ph}$ y $\kappa_{pp}$ para la desintegración $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ . . . . .	95



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Los núcleos, al igual que todo sistema físico, tienden a estabilizarse minimizando su energía. Para núcleos con un número de nucleones  $A$  dado, la distribución óptima de neutrones y protones se consigue mediante desintegraciones radiactivas beta, que transforman unos en otros hasta que alcanzan un estado de equilibrio en el que no exista ningún proceso que deje al núcleo en una situación más favorable energéticamente.

Una de las propiedades nucleares más interesante es la respuesta nuclear frente a la excitación de espín-isospín ( $\sigma\tau$ ), o lo que es lo mismo, la llamada excitación de Gamow-Teller (GT). Se trata de una pieza esencial de información sobre aspectos clave relacionados no solo con la Física Nuclear [FRG11], sino también con la Astrofísica [LM03] y la Física de Partículas [SC98]. En el caso de núcleos inestables esta información se extrae de la desintegración  $\beta$ , en la que existe una importante restricción debido a la limitación del valor  $Q$  de la reacción. En el caso de núcleos estables o cercanos a la estabilidad, la intensidad GT se obtiene a partir de reacciones de intercambio de carga (CE) de tipo (p,n) o (n,p) a energías intermedias y ángulos hacia delante sin ninguna de las limitaciones energéticas que caracterizan la desintegración  $\beta$  [Ost92], pero limitado hoy en día a la utilización de blancos estables. Bajo estas condiciones se establece una relación fenomenológica entre la sección eficaz y los elementos de matriz GT. En los últimos años además ha crecido el número de experimentos de CE que usan la reacción ( $^3\text{He},t$ ) o ( $t,^3\text{He}$ ), que proporcionan una mejor resolución de la intensidad GT a bajas energías [Zeg06].

En particular, las distribuciones de intensidad GT en emisores doble- $\beta$  ( $\beta\beta$ ) determinan en gran medida los elementos de la matriz nuclear para estos procesos. La desintegración  $\beta\beta$  consiste en una interacción débil de segundo orden que tiene lugar cuando la transición al núcleo intermedio está prohibida o altamente retardada. Usualmente se consideran dos modos de desintegración mediante la emisión de dos neutrinos y dos electrones ( $2\nu\beta\beta$ ) o sin emisión de neutrinos ( $0\nu\beta\beta$ ). Mientras que el primer tipo es perfectamente compatible con el modelo estándar, el segundo viola el número leptónico e implica la existencia de un neutrino masivo de Majorana, lo que significa que es igual a su antipartícula.

Los valores de las vidas medias de los procesos de desintegración  $0\nu$  se espera que sean varios órdenes de magnitud mayores que los del modo  $2\nu$ , con lo que su detección sería una gran proeza experimental. Si la medida fuera lo suficientemente precisa, sería posible extraer la masa absoluta del neutrino de Majorana a partir de la vida media, siempre y cuando la dependencia con la estructura nuclear esté suficientemente bien descrita.

Desde el punto de vista teórico, una de las principales fuentes de incertidumbre consiste en la evaluación de los elementos de matriz nucleares, ya que tienen que ser calculados de manera que se obtengan estimaciones fiables para los límites de las vidas medias de la desintegración  $\beta\beta$ . Puesto que la teoría para tratar tanto el caso  $0\nu$  como el  $2\nu$  es similar en muchos aspectos, el procedimiento usual es examinar primero la estructura del último modo con el fin de reproducir la información experimental disponible en las vidas medias de las  $2\nu\beta\beta$ .

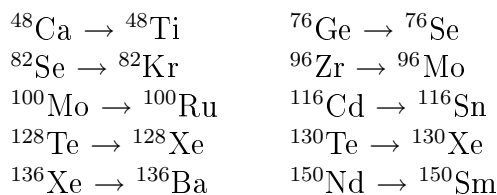
Siendo un proceso de segundo orden, los elementos de matriz  $2\nu\beta\beta$  implican un sumatorio sobre todo un conjunto de estados virtuales  $1^+$  en el núcleo intermedio impar-impar. Existen diferentes modelos microscópicos para evaluar estos elementos de matriz, entre ellos, el modelo de capas y la aproximación de fases aleatorias para cuasipartículas (QRPA) [SC98]. La aproximación del modelo de capas tiene en cuenta todas las posibles correlaciones restringidas a un espacio de valencia, con lo que describe los estados excitados de baja energía, pero es complicado describir de esta manera los estados de alta energía, y en especial la región de la resonancia de GT para núcleos pesados e intermedios, entre los que se encuentran la mayoría de los emisores doble beta. Por otro lado, los cálculos de QRPA no tienen estas restricciones, pero podrían perderse importantes correlaciones del estado fundamental. Aún así, es una de las aproximaciones más fiables y usadas para calcular las funciones de onda correlacionadas involucradas en los procesos  $\beta$  y doble- $\beta$  mediante



la introducción de una interacción residual partícula-partícula ( $pp$ ) además del canal habitual partícula-agujero ( $ph$ ) ([HS67], [MR90]).

## 1.2. Objetivos

En este trabajo usaremos un formalismo ([SMEC98], [SME01]) basado en la aproximación QRPA con una base de cuasipartícula autoconsistente obtenida a partir de un cálculo deformado de Hartree-Fock (HF) con interacciones de Skyrme (modelado de la fuerza efectiva entre nucleones mediante una interacción de rango cero) y correlaciones de apareamiento BCS. Además se incluirán interacciones residuales espín-isospín en los canales  $pp$  y  $ph$ . Con este formalismo calcularemos las distribuciones de intensidad GT de las ramas de la desintegración  $\beta$  de los siguientes procesos:



Para estos diez pares de núcleos se conoce además la vida media del proceso de doble desintegración beta  $2\nu$ . Como ejemplo, se estudiarán los elementos de matriz  $2\nu\beta\beta$  de los núcleos  ${}^{116}\text{Cd} \rightarrow {}^{116}\text{Sn}$  y  ${}^{150}\text{Nd} \rightarrow {}^{150}\text{Sm}$ . Así mismo se analizará cuáles son los efectos de la deformación de los núcleos padre e hijo y de las interacciones residuales en dichos elementos de matriz.

## 1.3. Organización

Este trabajo está organizado del siguiente modo. En el capítulo 2 realizamos una descripción del formalismo teórico, presentando el método de Hartree-Fock, desde su forma más general hasta la que nosotros usamos, esto es, un modelo de campo medio Hartree-Fock deformado con interacciones efectivas de tipo Skyrme. Además introducimos las correlaciones de apareamiento a través de la aproximación BCS y las interacciones residuales partícula-partícula y partícula-hueco tratadas en aproximación QRPA. En el capítulo 3 se realiza un estudio de los conceptos de la desintegración beta, como son las distribuciones de intensidad Gamow-Teller, con especial interés

en la doble desintegración beta con emisión de dos neutrinos. Los resultados teóricos y su comparación con los experimentales se muestran en el capítulo 4. Finalmente en el capítulo 5 se resumen las conclusiones más importantes de este trabajo.

# Capítulo 2

## Formalismo teórico

### 2.1. Introducción

Muchas de las propiedades nucleares se describen asumiendo que los nucleones en el núcleo son partículas independientes que se mueven en órbitas casi imperturbables de partícula independiente. Este supuesto viene respaldado por el principio de incertidumbre y el de exclusión de Pauli, debido a los cuales se considera que el núcleo no es un sistema muy denso. Así se prevé que este movimiento de partículas independientes es gobernado por un potencial promedio creado por todos los nucleones del núcleo.

Para explicar estas propiedades se han propuesto diferentes modelos fenomenológicos, tales como el modelo de la gota líquida o el modelo de capas, de manera que ajustando unos pocos parámetros somos capaces de reproducir gran cantidad de datos experimentales. El éxito de estos modelos fenomenológicos nos impulsa a ir un paso más allá e investigar el problema de muchos cuerpos desde un punto de vista más microscópico.

### 2.2. Método de Hartree-Fock

#### 2.2.1. Función de onda nuclear

El método de Hartree-Fock ([Har28], [Foc30]) permite derivar un potencial de partícula independiente a partir de la interacción a dos cuerpos, como puede verse en la (2.1) por medio de un principio variacional usando deter-

minantes de Slater como funciones de onda prueba:

$$V(1\dots A) = \sum_{i < j=1}^A V(i, j) \approx \sum_{i=1}^A U(i) \quad (2.1)$$

Para ello, comenzamos asumiendo que existe un potencial promedio monoparticular:

$$H^{\text{HF}} = \sum_{i=1}^A h(i) \quad (2.2)$$

cuya autofunción con el autovalor más bajo  $E_0^{\text{HF}}$  es una aproximación a la función del estado fundamental. Esta autofunción  $\Phi(1\dots A)$  es un determinante de Slater:

$$|HF\rangle = |\Phi(1\dots A)\rangle = \prod_{i=1}^A a_i^+ |-\rangle \quad (2.3)$$

donde  $A$  representa el número de nucleones y  $a_k^+, a_k$  son los operadores fermiónicos correspondientes a las funciones de onda de partícula independiente  $\varphi_k$ , las cuales son a su vez autofunciones del hamiltoniano de partícula independiente  $h$ , esto es:

$$h(i)\varphi_k(i) = \epsilon_k\varphi_k(i), \quad i = \{r_i, s_i, t_i\}. \quad (2.4)$$

Las funciones  $\varphi_k$  proporcionan una base ortogonal para la representación de la ocupación de los niveles dentro del formalismo de la segunda cuantización. Cada nivel  $k$  se corresponde con un par de operadores de creación y destrucción  $a_k^+, a_k$  que crean o destruyen las partículas con función de onda  $\varphi_k$ . Puesto que los nucleones son fermiones, cada nivel estará ocupado sólo una vez y los operadores  $a_k^+, a_k$  obedecen las relaciones de conmutación de Fermi. En adelante, caracterizaremos los niveles ocupados en  $|HF\rangle$  por las letras  $i, j$  (estados agujero) y los niveles vacíos por  $m, n$  (estados de partícula).

Muy a menudo se trabaja en un espacio de configuración basado en un conjunto ortogonal y arbitrario de funciones de onda de partícula independiente  $\{\chi_l\}$ . Si para cada función  $\chi_l$  definimos los correspondientes operadores de creación y destrucción  $c_l^+, c_l$ , podemos expresar los operadores  $a_k^+$  por los operadores  $c_l^+$ :

$$a_k^+ = \sum_l D_{lk} c_l^+ \quad (2.5)$$

donde  $D$  debe ser unitaria:

$$D^+ D = D D^+ = 1 \quad (2.6)$$

Con lo que los operadores  $c_l^+, c_l$  también satisfacen las leyes de conmutación fermiónicas.

Sin embargo no existe correspondencia uno a uno entre un determinante de Slater  $\Phi$  de la forma (2.2) y un conjunto de estados de partícula única  $\varphi_k$ . Cualquier transformación unitaria que no mezcle estados partícula agujero, deja  $\Phi$  inmutable.

Para evitar esto es conveniente representar un determinante de Slater  $|\Phi\rangle$  por su matriz de densidad de partícula independiente:

$$\rho_{ll'} = \langle \Phi | c_l^+ c_{l'} | \Phi \rangle \quad (2.7)$$

A partir de las ecuaciones (2.5) y (2.6), se llega a

$$\rho_{ll'} = \sum_{kk'} D_{l'k'} D_{lk}^* \langle \Phi | a_k^+ a_k | \Phi \rangle = \sum_{i=1}^A D_{li} D_{l'i}^* \quad (2.8)$$

ya que  $\rho$  es diagonal y hermítica en la base  $a_k^+, a_k$ , siendo los autovalores o niveles de ocupación 1 para  $i \leq A$  (agujeros) y 0 para  $i > A$  (partículas), cumpliéndose para las densidades de partícula independiente  $\rho$  de los determinantes de Slater que:

$$\rho^2 = \rho \quad (2.9)$$

La traza de  $\rho$  es igual al número de partículas  $\text{Tr} \rho = A$ .

### 2.2.2. Energía de Hartree-Fock

Mediante el método variacional podremos determinar el operador de partícula independiente  $H^{\text{HF}}$ . Para ello necesitamos primero expresar la energía como un funcional de la densidad, siendo la energía de HF

$$E^{\text{HF}} = \langle \Phi | H | \Phi \rangle \quad (2.10)$$

y el hamiltoniano de muchos cuerpos  $H$

$$H = \sum_{l_1 l_2} t_{l_1 l_2} c_{l_1}^+ c_{l_2} + \frac{1}{4} \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} c_{l_1}^+ c_{l_2}^+ c_{l_4} c_{l_3} \quad (2.11)$$

donde

$$\bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} = v_{l_1 l_2 l_3 l_4} - v_{l_1 l_2 l_4 l_3} \quad (2.12)$$

Gracias al teorema de Wick, podemos llegar finalmente a

$$\begin{aligned} E^{\text{HF}}[\rho] &= \sum_{l_1 l_2} t_{l_1 l_2} \langle \Phi | c_{l_1}^\dagger c_{l_2} | \Phi \rangle + \frac{1}{4} \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} \langle \Phi | c_{l_1}^\dagger c_{l_2}^\dagger c_{l_4} c_{l_3} | \Phi \rangle \\ &= \sum_{l_1 l_2} t_{l_1 l_2} \rho_{l_2 l_1} + \frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \rho_{l_3 l_1} \bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} \rho_{l_4 l_2} \\ &= \text{Tr}(t\rho) + \frac{1}{2} \text{Tr}_l \text{Tr}_l(\rho \bar{v} \rho) \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.2.3. Principio variacional

Para determinar la base de HF, necesitamos minimizar la energía dada por la ecuación (2.13) para todos los productos de funciones de onda  $|\Phi\rangle$  o para todas las densidades  $\rho$  que cumplan  $\rho = \rho^2$ . Para pequeñas variaciones se cumple:

$$(\rho + \delta\rho)^2 = \rho + \delta\rho \quad (2.14)$$

Con lo que la variación de la energía viene dada por

$$\delta E = E[\rho + \delta\rho] - E[\rho] = \sum_{kk'} h_{kk'} \delta\rho_{k'k} = \sum_{mi} h_{mi} \delta\rho_{im} + c.c. \quad (2.15)$$

donde se ha considerado unicamente variaciones  $\delta\rho_{mi}$  y  $\delta\rho_{im}$  de los elementos de matriz  $ph$  y  $hp$  para asegurarmnos que a pesar de la variación pertenecemos dentro del conjunto de determinantes de Slater.

La matriz hermítica  $h$  se define

$$h_{kk'} = \frac{\partial E^{\text{HF}}[\rho]}{\partial \rho_{k'k}} \quad (2.16)$$

A partir de la ecuación (2.13) se obtiene

$$h = t + \Gamma \quad (2.17)$$

con

$$\Gamma_{kk'} = \sum_{l'} \bar{v}_{k'l'k'l} \rho_{ll'} \quad (2.18)$$

Dado que podemos variar  $\delta\rho_{mi}$  arbitrariamente, a partir de la ecuación (2.15) vemos que para que  $\delta E = 0$  los elementos de matriz  $ph$  de  $h$  deben ser nulos

$$h_{mi} = t_{mi} + \sum_{j=1}^A \bar{v}_{mji} = 0 \quad (\text{for } i \leq A, m > A) \quad (2.19)$$

Así llegamos a la conclusión de que la matriz  $h$  no mezcla estados de partícula y hueco, o equivalentemente

$$[h, \rho] = [t + \Gamma[\rho], \rho] = 0 \quad (2.20)$$

Desafortunadamente esta ecuación es no lineal y por tanto difícil de resolver. No obstante, puesto que la base en la que  $\rho$  es diagonal se determina a partir de transformaciones unitarias entre niveles ocupados y vacíos, podemos usar esta libertad para conseguir que  $h$  sea diagonal. Esto define la base de Hartree-Fock y convierte (2.20) en un problema de autovalores.

$$h_{kk'} = t_{kk'} + \sum_{i=1}^A \bar{v}_{kik'i} = \epsilon_k \delta_{kk'} \quad (2.21)$$

Considerando que la base viene dada por la transformación  $D$  (2.6), se obtienen finalmente las ecuaciones de Hartree-Fock

$$\sum_{l'} h_{ll'} D_{l'k} = \sum_{l'} \left( t_{ll'} + \sum_{i=1}^A \sum_{pp'} \bar{v}_{lp'l'p} D_{pi} D_{p'i}^* \right) D_{l'k} = \epsilon_k D_{lk} \quad (2.22)$$

que representa un problema de autovalores hermitico. Sigue siendo no lineal porque la matriz  $h$  depende de la densidad  $\rho$  o lo que es lo mismo, de la solución del problema. Los coeficientes  $D_{lk}$  que se encuentren por medio de la resolución de estas ecuaciones determinarán las funciones de onda de partícula independiente asociadas a los operadores  $a_k^+$  (2.5).

De este modo podemos expresar el hamiltoniano de partícula independiente como:

$$\begin{aligned} H^{\text{HF}} &= \sum_{kk'} h_{kk'} a_k^+ a_{k'} = \sum_{kk'} (t + \Gamma)_{kk'} a_k^+ a_{k'} \\ &= \sum_{kk'} \left( t_{kk'} + \sum_{j=1}^A \bar{v}_{kjk'j} \right) a_k^+ a_{k'} = \sum_k \epsilon_k a_k^+ a_k \end{aligned} \quad (2.23)$$

El hamiltoniano de partícula independiente  $h$  contiene, además de la energía cinética  $t$ , un campo autoconsistente  $\Gamma$  que depende de la densidad del núcleo. Es un campo a un cuerpo que se promedia sobre todas las interacciones a dos cuerpos. A partir de la ecuación anterior y la (2.21), podemos dar el valor esperado de la energía de la función de onda  $|HF\rangle$

$$E_0^{\text{HF}} = \sum_{i=1}^A \epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^A \bar{v}_{ijij} \quad (2.24)$$

### 2.3. Cálculos de Hartree-Fock con fuerzas de Skyrme

Existen un gran número de aplicaciones del método de Hartree-Fock que utilizan diferentes fuerzas. La mayoría de ellas, en particular las que no usan fuerzas dependientes de la densidad, no son capaces de reproducir las energías de ligadura, los radios o el espectro de partícula independiente de núcleos ligeros y pesados [BB67], [PS68]. Por su parte, las fuerzas que dependen de la densidad proporcionan una descripción adecuada de estas propiedades. Entre estas fuerzas se encuentran la interacción  $\delta$  modificada de Moszkowski [Mo70], la interacción de Gogny, de rango finito capaz de describir las correlaciones de pairing del núcleo [Go75], o la interacción de Skyrme [Sk56], [Sk59], objeto de nuestro estudio.

La estructura sencilla de la fuerza de Skyrme permite expresar la densidad hamiltoniana de un sistema descrito por determinantes de Slater como una función algebraica de las densidades de energía cinética y nuclear.

En 1956 Skyrme propuso una interacción efectiva que podía ser descrita por

$$V = \sum_{i<j} v_{ij}^{(2)} + \sum_{i<j<k} v_{ijk}^{(3)} \quad (2.25)$$

con un término a dos cuerpos  $v_{ij}$  y otro a tres cuerpos  $v_{ijk}$ . Para simplificar los cálculos, Skyrme propuso un desarrollo de corto alcance para la interacción a dos cuerpos. Los elementos de matriz en el espacio de momentos son

$$\langle \vec{k} | v_{12} | \vec{k}' \rangle = t_0(1 + x_0 P_\sigma) + \frac{1}{2} t_1(k^2 + k'^2) + t_2 \vec{k} \cdot \vec{k}' + iW_0(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{k} \times \vec{k}' \quad (2.26)$$



donde  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$  son los vectores de onda relativos de dos nucleones,  $P_\sigma$  es un operador de intercambio de espín y  $\sigma$  son las matrices de Pauli. Si reescribimos esta expresión en el espacio de configuraciones se llega a

$$v_{12} = t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \frac{1}{2} t_1 [\delta(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) k^2 + k'^2 \delta(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)] \\ + t_2 \vec{k}' \delta(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \vec{k} + i W_0 (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{k}' \delta(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{k} \quad (2.27)$$

siendo ahora  $\vec{k}$  el operador  $(\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2)/2i$  actuando por la derecha y  $\vec{k}'$  el operador  $-(\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2)/2i$  actuando por la izquierda.

Para la interacción a tres cuerpos Skyrme postuló una fuerza de rango cero

$$v_{123} = t_3 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \quad (2.28)$$

En cálculos de HF para núcleos par-par saturados en espín [VB72] se ha demostrado que este término es equivalente a una interacción a dos cuerpos dependiente de la densidad

$$v_{12} = \frac{1}{6} t_3 (1 + P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho \left( \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \right) \quad (2.29)$$

Este término proporciona una representación fenomenológica de los efectos de muchos cuerpos y describe el modo en el cual la interacción entre dos nucleones viene influida por la presencia de otros.

Para determinar las diferentes constantes de las ecuaciones anteriores,  $t_0, t_1, t_2, t_3, x_0$  y  $W_0$  se hace uso de la densidad de energía para la interacción de Skyrme, derivada en los apéndices A y B de [VB72]:

$$H(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m} \tau(\vec{r}) + \frac{1}{2} t_0 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} x_0 \right) \rho^2 - \left( x_0 + \frac{1}{2} \right) (\rho_n^2 + \rho_p^2) \right] + \frac{1}{4} (t_1 + t_2) \rho \tau \\ + \frac{1}{8} (t_2 - t_1) (\rho_n \tau_n + \rho_p \tau_p) + \frac{1}{16} (t_2 - 3t_1) \rho \nabla^2 \rho \\ + \frac{1}{32} (3t_1 + t_2) (\rho_n \nabla^2 \rho_n + \rho_p \nabla^2 \rho_p) + \frac{1}{16} (t_1 - t_2) (\vec{J}_n^2 + \vec{J}_p^2) \\ + \frac{1}{4} t_3 \rho_n \rho_p \rho + H_c(\vec{r}) - \frac{1}{2} W_0 (\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \rho_n \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_n + \rho_p \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p) \quad (2.30)$$

donde  $\rho = \rho_n + \rho_p, \tau = \tau_n + \tau_p$  y  $\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p$ .

En el caso de los núcleos con  $N = Z$  y sin campo coulombiano

$$\rho_n = \rho_p = \frac{1}{2}\rho, \quad \tau_n = \tau_p = \frac{1}{2}\tau, \quad \vec{J}_n = \vec{J}_p = \frac{1}{2}\vec{J} \quad (2.31)$$

y la expresión (2.30) se simplifica a

$$\begin{aligned} H(\vec{r}) &= \frac{\hbar^2}{2m}\tau + \frac{3}{8}t_0\rho^2 + \frac{1}{16}t_3\rho^3 + \frac{1}{16}(3t_1 + 5t_2)\rho\tau \\ &\quad + \frac{1}{64}(9t_1 - 5t_2)(\vec{\nabla}\rho)^2 - \frac{3}{4}W_0\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Además en materia nuclear se verifica que  $\vec{\nabla}\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  y que la densidad de energía cinética vale

$$\tau_{n,p} = \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3}\rho_{n,p}^{5/3} \quad (2.33)$$

La energía de ligadura por nucleón en materia nuclear es

$$\begin{aligned} \frac{E}{A} = \frac{H}{\rho} &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi^2}{2} \rho \right)^{2/3} + \frac{3}{8}t_0\rho + \frac{1}{16}t_3\rho^2 + \frac{3}{80}(3t_1 + 5t_2)\rho\tau \\ &= \frac{3}{5}T_F + \frac{3}{8}t_0\rho + \frac{1}{16}t_3\rho^2 + \frac{3}{80}(3t_1 + 5t_2)\rho k_F^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $T_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$  es la energía cinética de una partícula en la superficie de Fermi. Se ha utilizado que  $\rho = \left( \frac{2}{3}\pi^2 \right) k_F^3$  y  $\tau = \frac{3}{5}k_F^2$ .

Teniendo en cuenta esta ecuación, además de la condición de saturación

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{H}{\rho} \right)_{\rho=\rho_0} = 0 \quad (2.35)$$

y la expresión de la incompresibilidad de la materia nuclear

$$K = k_F^2 \frac{\partial^2 (E/A)}{\partial k_F^2} = \frac{6}{5}T_F + \frac{9}{4}t_0\rho + \frac{15}{8}t_3\rho^2 + \frac{3}{4}(3t_1 + 5t_2)\rho k_F^2 \quad (2.36)$$

obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,  $t_0$ ,  $t_3$  y  $3t_1 + 5t_2$  con lo que podemos expresar estos parámetros en función de  $E/A$ ,  $k_F$  y  $K$ :

$$\begin{cases} t_0\rho = \frac{40}{9}E/A + \frac{4}{9}K - \frac{16}{5}T_F, \\ \frac{3}{16}t_3\rho^2 = 15E/A + K - \frac{9}{5}T_F, \\ \frac{1}{16}(3t_1 + 5t_2)\rho k_F^2 = 2T_F - 15E/A - 5/6K \end{cases} \quad (2.37)$$

En su trabajo Skyrme fijó los valores numéricos de los parámetros ajustando la energía de ligadura y la densidad de materia nuclear ( $E/A = -17,04$  MeV,  $k_F = 1,37 \text{ fm}^{-1}$ ) y las energías de ligadura y las diferencias de masa de algunos núcleos ligeros calculados a partir de las funciones de onda del oscilador armónico. Sin embargo estos parámetros eran demasiado pequeños para núcleos pesados y por ello se determinó un conjunto de nuevos parámetros en función de la interacción efectiva utilizada.

En este trabajo vamos a emplear tres fuerzas de Skyrme, la fuerza Sk3 [Bei75], la SG2 [SG81] y la SLy4 [Cha98], cuyos parámetros aparecen en la tabla 2.1. La fuerza Sk3 se trata de la más sencilla y antigua de las tres y ha sido la más usada. Tanto esta como la fuerza SG2, propuesta por Van Giai y Sagawa, se diseñaron con el fin de ajustar las propiedades del estado fundamental de los núcleos esféricos y las propiedades de materia nuclear. Además la SG2 proporciona una buena descripción de las excitaciones Gamow-Teller en núcleos esféricos y de las excitaciones de espín en núcleos deformados. Por último, la fuerza SLy4, propuesta por Chabanat *et al* para las estrellas de neutrones, supernovas y núcleos ricos en neutrones, es una de las fuerzas más recientes y sus parámetros se ajustaron a las propiedades de la materia nuclear simétrica, con una ligadura adicional en la ecuación de estado de alta y baja densidad neutrónica.

Hay que añadir que tanto la fuerza SG2 como la SLy4 están ampliadas con respecto a la Sk3, incorporando una potencia más general de la dependencia de la densidad, además de incluir los términos de intercambio de espín para los términos dependientes de la velocidad,

$$\begin{aligned}
V_{Skyrme} = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \frac{1}{2} t_1 [\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) (1 + x_1 P_\sigma) (\vec{k}^2 + \vec{k}'^2) \\
& + t_2 (1 + x_2 P_\sigma) \vec{k}' \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k} + i W_0 (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{k}' \times \delta(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \vec{k} \\
& + \frac{1}{6} t_3 (1 + x_3 P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho^\alpha \left( \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Tabla 2.1: Valores de los parámetros de las fuerzas de Skyrme Sk3, SG2 y SLy4.

	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$W_0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\alpha^{-1}$
Sk3	-1128.75	395.0	-95.0	14000.00	120.0	0.45	0	0	1	1
SG2	-2645.0	340.0	-41.9	15595.0	105.0	0.09	-0.06	1.425	0.06	6
SLy4	-2488.91	486.8	-546.4	13777.0	123.0	0.83	-0.34	-1.000	1.35	6

## 2.4. Método de Hartree-Fock para núcleos deformados

Gracias a la simplicidad de la interacción de Skyrme, el valor esperado de la energía viene dado por

$$E = \langle \Phi | H | \Phi \rangle = \int \varepsilon(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2.39)$$

donde  $\Phi$  es la función de onda del núcleo constituida por un determinante de Slater de las funciones de onda  $\varphi_k$  de los nucleones y  $\varepsilon(\vec{r})$  es el funcional de la densidad de energía.

Si consideramos las interacciones de Skyrme descritas en el apartado anterior, este funcional para un núcleo par-par tiene la siguiente forma [Sar98]

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{r}) = & \sum_{st} \rho_{st} \sum_{s't'} \left\{ \frac{1}{2} t_0 \rho_{s't'} [1 - \delta_{ss'} \delta_{tt'} + x_0 (\delta_{ss'} - \delta_{tt'})] \right. \\ & + \frac{1}{4} t_2 \left( \tau_{s't'} + \frac{1}{4} \nabla^2 \rho_{s't'} \right) [1 + \delta_{ss'} \delta_{tt'} + x_2 (\delta_{ss'} \delta_{tt'})] \\ & + \frac{1}{16} t_1 (4 \tau_{s't'} \nabla^2 \rho_{s't'}) [1 - \delta_{ss'} \delta_{tt'} + x_1 (\delta_{ss'} - \delta_{tt'})] \\ & + \frac{1}{12} t_3 \rho^\alpha \rho_{s't'} [1 - \delta_{ss'} \delta_{tt'} + x_3 (\delta_{ss'} - \delta_{tt'})] \\ & \left. + \frac{i}{2} W_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{s't'} (1 + \delta_{tt'}) \right\} + \varepsilon_C(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

con  $\varepsilon_C$  como la densidad de energía de Coulomb

$$\varepsilon_C = e^2 \frac{1}{2} \int \vec{r} \frac{\rho_p(\vec{r}') \rho_p(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{3}{4} e^2 \rho_p(\vec{r}) \left[ \frac{3}{\pi} \rho_p(\vec{r}) \right]^{1/3} \quad (2.41)$$

Las componentes espín-isospín del nucleón, de la energía cinética y de las densidades de magnetización son:

$$\rho_{st}(\vec{r}) = \sum_i v_i^2 |\varphi_i(\vec{r}, s, t)|^2 \quad (2.42)$$

$$\tau_{st}(\vec{r}) = \sum_i v_i^2 |\vec{\nabla} \varphi_i(\vec{r}, s, t)|^2 \quad (2.43)$$

$$\vec{J}_{st}(\vec{r}) = \sum_{i,s'} v_i^2 \varphi_i^*(\vec{r}, s', t) (-i \vec{\nabla} \times \vec{\sigma}) \varphi_i(\vec{r}, s', t) \quad (2.44)$$

con

$$\rho_t = \sum_s \rho_{st} \quad (2.45)$$

$$\rho = \sum_{t=p,n} \rho_t \quad (2.46)$$

y análogamente para  $\tau$  y  $\vec{J}$ .

En estos cálculos se ha considerado que el subespacio formado por todas las funciones de onda nucleónicas ocupadas es invariante bajo inversión temporal, de manera que si un estado individual está ocupado también lo esté su estado invertido temporalmente.

En el caso de núcleos par-par se considera que las ecuaciones de Hartree-Fock tienen simetría axial [Vau73]. Teniendo en cuenta que el eje de simetría es el eje z, podemos decir que la tercera componente  $J_z$  del momento angular total es un buen número cuántico para el estado de partícula individual  $\varphi_i$ . En otras palabras, si denotamos por  $\Omega_i$  el autovalor de  $J_z$  asociado al estado de partícula independiente i, existen soluciones de las ecuaciones de HF de la forma

$$\varphi_i(\vec{R}, \sigma, q) = \chi_{qi}(q) [\varphi_i^+(r, z) e^{i\Lambda^- \varphi} \chi_{+1/2}(\sigma) + \varphi_i^-(r, z) e^{i\Lambda^+ \varphi} \chi_{-1/2}(\sigma)] \quad (2.47)$$

donde  $\Lambda^\pm = \Omega_i \pm \frac{1}{2}$ . Las cantidades  $r$ ,  $z$  y  $\varphi$  son las componentes de  $\vec{R}$  en coordenadas cilíndricas

$$R_x = r \cos \varphi, \quad R_y = r \sin \varphi, \quad R_z = z \quad (2.48)$$

Así hemos expandido las funciones de onda de partícula individual en término de los autoestados del potencial de un oscilador armónico con simetría

axial en coordenadas cilíndricas. Dicho potencial viene dado en coordenadas cilíndricas por

$$V(r, z) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 r^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (2.49)$$

Introduciendo las constantes del oscilador

$$\beta_{\perp} = \left(\frac{m\omega_{\perp}}{\hbar}\right)^{1/2}, \quad \beta_z = \left(\frac{m\omega_z}{\hbar}\right)^{1/2} \quad (2.50)$$

y las variables auxiliares

$$\xi = z\beta_z, \quad \eta = r^2\beta_{\perp}^2 \quad (2.51)$$

podemos escribir las autofunciones como

$$|Nn_r n_z \Lambda \Sigma\rangle = \psi_{n_r}^{\Lambda}(r) \psi_{n_z}(z) \frac{e^{i\Lambda\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \chi_{\Sigma}(\sigma) \quad (2.52)$$

con

$$\begin{aligned} \psi_{n_z}(z) &= N_{n_z} \beta_z^{1/2} e^{-\xi^2/2} H_{n_z}(\xi) \\ \psi_{n_r}^{\Lambda}(r) &= N_{n_r}^{\Lambda} \beta_{\perp} \sqrt{2} \eta^{\Lambda/2} e^{-\eta/2} L_{n_r}^{\Lambda}(\eta) \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde  $H_{n_z}(\xi)$  y  $L_{n_r}^{\Lambda}(\eta)$  denotan los polinomios de Hermite y los polinomios asociados de Laguerre respectivamente [AS70] y  $N_{n_z}$  y  $N_{n_r}^{\Lambda}$  son los correspondientes factores de normalización

$$N_{n_z} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{n_z} n_z!}\right)^{1/2}, \quad N_{n_r}^{\Lambda} = \left(\frac{n_r!}{(n_r + \Lambda)!}\right)^{1/2} \quad (2.54)$$

A partir de estas expresiones, los números cuánticos que aparecen en la ecuación (2.52) se pueden interpretar como sigue:  $n_r$  y  $n_z$  se corresponden con el número de nodos en las direcciones  $r$  y  $z$  y  $\Lambda$  y  $\Sigma$  son las proyecciones sobre la dirección  $z$  del momento angular orbital y de espín.  $N$  se relaciona con el resto de números cuánticos mediante la expresión  $2n_r + n_z + \Lambda = N$ .

Ahora podemos reescribir los estados de partícula independiente  $|i\rangle$  en término de las autofunciones (2.52) de manera que se caractericen por los autovalores  $\Omega$  de  $J_z$ , paridad  $\pi_i$  y energía  $\epsilon_i$

$$|i\rangle = \sum_N \frac{(-1)^N + \pi_i}{2} \sum_{n_r, n_z, \Lambda \geq 0, \Sigma} C_{Nn_r n_z \Lambda \Sigma}^i |Nn_r n_z \Lambda \Sigma\rangle \quad (2.55)$$

y su inverso temporal

$$|\bar{i}\rangle = \sum_N \frac{(-1)^N + \pi_i}{2} \sum_{n_r, n_z, \Lambda \geq 0, \Sigma} C_{Nn_r n_z \Lambda \Sigma}^i (-1)^{\frac{1}{2} - \Sigma} |Nn_r n_z - \Lambda - \Sigma\rangle \quad (2.56)$$

El modo habitual de resolver este problema de dimensión infinita consiste en usar una base truncada, esto es, necesitamos restringir la suma sobre  $n_r, n_z, \Lambda$  a una suma de estados base. En nuestro caso consideraremos 11 capas del oscilador, desde  $N=0$  hasta  $N=10$ .

Los efectos del truncamiento en el caso de una expansión de la base (2.52) depende en gran medida de la forma del núcleo. Los efectos de la mezcla de la base de estados es mayor para los núcleos deformados que para los núcleos esféricos, en los que la expansión sólo afectará a unas pocas componentes relevantes [DPPS69]. Estos efectos dependen también de manera crítica de la elección de los parámetros del oscilador, con lo que para reducir estos efectos será importante minimizar la energía total del estado fundamental del núcleo con respecto a los parámetros de volumen y de deformación del oscilador armónico, definidos de la siguiente manera:

$$\beta_0 = \left( \frac{m\omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} = (\beta_{\perp}^2 \beta_z)^{1/3} \quad (2.57)$$

donde se ha utilizado que  $\omega_0 = (\omega_{\perp}^2 \omega_z)^{1/3}$  y las expresiones de (2.50). Y

$$q = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_z} = \frac{\beta_{\perp}^2}{\beta_z} \quad (2.58)$$

La deformación cuadrupolar del núcleo viene determinada por el parámetro  $\beta$

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{Q_p}{Z \langle r_c^2 \rangle} \quad (2.59)$$

con  $Z$  como el número de protones,  $\langle r_c^2 \rangle$  como el radio cuadrático medio de carga y  $Q_p$  como el momento cuadrupolar de carga tal que

$$Q_p = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \Psi | Q_{20}(E2) | \Psi \rangle \quad \text{con} \quad Q_{20}(E2) = e \sum_{j=1}^Z r_j^2 Y_{20}(\theta_j, \varphi_j) \quad (2.60)$$

Dicha deformación indica si el núcleo tiene forma esférica ( $\beta \approx 0$ ), prolada ( $\beta > 0$ ) u oblada ( $\beta < 0$ ) (figura 2.1)

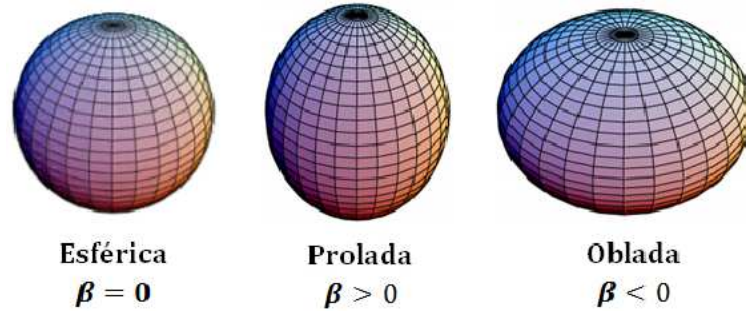


Figura 2.1: Representación esquemática de las formas nucleares en función del parámetro de deformación.

## 2.5. Método de Hartree-Fock con ligadura en la deformación

La deformación del estado fundamental del núcleo junto con la energía de ese estado se obtiene a partir de la convergencia del método iterativo de Hartree-Fock.

Sin embargo en muchas ocasiones nos interesa también conocer el valor de la energía y la deformación en otros puntos que no sean el mínimo absoluto. Para ello se realiza un barrido en un rango de deformaciones cuadrupolares, obteniéndose la curva de energía frente a deformación, donde los mínimos indican las deformaciones de equilibrio, siendo el mínimo más profundo el que corresponde al estado fundamental. Para minimizar ahora la energía se añade a la expresión del hamiltoniano un término que incluye la deformación requerida junto con un multiplicador de Lagrange [FQKV73]

$$\langle H \rangle + f(\mu, \langle \hat{Q} \rangle) \quad (2.61)$$

donde  $\mu$  es una constante y  $f$  una función diferenciable de  $\mu$  y  $\langle \hat{Q} \rangle$ . Tras minimizar para un  $\mu$  dado se tiene

$$\langle H \rangle = E, \quad \langle \hat{Q} \rangle = Q \quad (2.62)$$

con  $Q$  como el momento cuadrupolar de masa y donde  $E$  se puede tomar como una función de  $\mu$  o de  $Q$ .



En este trabajo se utiliza una ligadura cuadrática que permite explorar fácilmente toda la curva  $E(Q)$  y cuya forma es la siguiente

$$E + \frac{1}{2}C(\langle\hat{Q}\rangle - \mu)^2 \quad (2.63)$$

con  $C > 0$ . Así se buscan los puntos tangenciales de  $E(Q)$  con una parábola invertida que tenga la línea  $Q = \mu$  como eje de simetría (figura 2.2). El parámetro de curvatura  $C$  se elige lo suficientemente grande para que la parábola  $-\frac{1}{2}C(Q - \mu)^2$  sea lo suficientemente estrecha para que solo tenga un punto de tangencia con  $E(Q)$ .

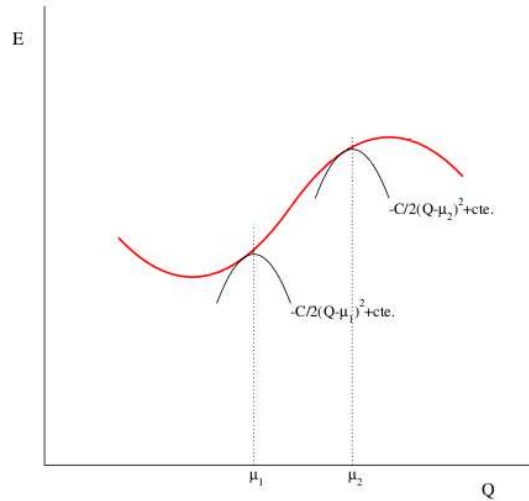


Figura 2.2: Ejemplo de la curva de energía en función del momento cuadrupolar con  $f(\mu, \langle\hat{Q}\rangle)$  como ligadura cuadrática.

## 2.6. Correlaciones de apareamiento en aproximación BCS

Existen una serie de hechos experimentales que respaldan la necesidad de introducir una nueva interacción basada en las correlaciones de apareamiento no incluida hasta ahora:

- Intervalo energético: los núcleos par-impar tienen estados colectivos y de partícula independiente en el mismo intervalo energético, mientras que en un espectro par-par existe un intervalo energético en torno a 1.5

MeV entre el estado fundamental y el primer estado excitado en el que no se encuentran estados de partícula independiente.

- Efecto par-impar: los núcleos de este tipo poseen una energía de ligadura menor que la de sus vecinos par-par.
- Momento de inercia de núcleos deformados: si medimos esta magnitud mediante el modelo puro de partícula independiente difiere de la medida experimental en un factor dos. En cambio si incluimos efectos de pairing, teoría y experimento coinciden.
- Momento angular y paridad: la configuración del estado fundamental de los núcleos par-par es siempre  $0^+$

Así pues la aproximación de BCS tiene en cuenta las correlaciones dominantes de pares de nucleones acoplados a momento angular cero. En primer lugar tratamos de representar la función de onda del estado fundamental de un núcleo par-par de manera análoga al estado fundamental de un superconductor propuesto por Bardeen, Cooper y Schrieffer [BCS57]

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger) |-\rangle \quad (2.64)$$

donde  $u_k$  y  $v_k$  son parámetros variacionales. Para cada estado  $k > 0$  existe un estado conjugado  $\bar{k} < 0$ , donde  $\bar{k}$  se corresponde con el inverso temporal de  $k$ , y los estados  $\{k, \bar{k}\}$  generan todo el espacio de partícula independiente.

Los valores de  $v_k^2$  y  $u_k^2$  representan la probabilidad de que un cierto estado par  $(k, \bar{k})$  esté o no ocupado y se determinan de manera que la energía correspondiente sea mínima. Al normalizar el estado (2.64) se debe satisfacer que

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1 \quad (2.65)$$

Teniendo en cuenta estas probabilidades de ocupación de niveles, podemos redefinir las densidades (2.42)-(2.44)

$$\rho_{st}(\vec{r}) = 2 \sum_{k>0} v_k^2 |\varphi(\vec{r}, s, t)|^2 \quad (2.66)$$

$$\tau_{st}(\vec{r}) = 2 \sum_{k>0} v_k^2 |\nabla \varphi(\vec{r}, s, t)|^2 \quad (2.67)$$

$$J_{st}(\vec{r}) = 2 \sum_{k>0, s'} v_k^2 \varphi_k^*(\vec{r}, s', t) (-i \nabla \times \sigma) \varphi_k(\vec{r}, s, t) \quad (2.68)$$

Las sumas se extienden únicamente a estados positivos de  $k$  porque la invariancia bajo inversión temporal requiere que los estados invertidos temporalmente  $\bar{k}$  tengan la misma probabilidad de ocupación y por ello aparece el factor dos en las ecuaciones anteriores.

Los parámetros  $u$  y  $v$  se determinan por variación de la energía. Sin embargo, existe además otra restricción en torno a estos parámetros por la que el valor esperado del número de partículas es

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = 2 \sum_{k>0} v_k^2 = N \quad (2.69)$$

donde

$$\hat{N} = \sum_{k>0} (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}) \quad (2.70)$$

Con lo que para calcular  $u$  y  $v$  se necesita añadir el término  $-\lambda \hat{N}$  al hamiltoniano sobre el que vamos a realizar la variación

$$H' = H - \lambda \hat{N} \quad (2.71)$$

El multiplicador de Lagrange  $\lambda$  se corresponde con la energía de Fermi del sistema, y se fija a partir de la condición (2.70). Se llama potencial químico de la energía de Fermi porque representa la variación de la energía  $E = \langle BCS | H | BCS \rangle$  cuando se modifica el número de partículas

$$\lambda = \frac{dE}{dN} \quad (2.72)$$

De la definición de la función de onda (2.64) y el hamiltoniano que describe un sistema de muchos cuerpos

$$H = \sum_{k_1 k_2} t_{k_1} t_{k_2} a_{k_1}^+ a_{k_2} + \frac{1}{4} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \bar{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_{k_4} a_{k_3} \quad (2.73)$$

se obtiene el valor esperado de  $H'$

$$\begin{aligned} \langle BCS | H' | BCS \rangle &= \sum_k \left\{ (t_k k - \lambda) v_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k'} \bar{v}_{kk'kk'} v_k^2 v_{k'}^2 \right\} \\ &+ \sum_{kk'>0} \bar{v}_{\bar{k}\bar{k}'kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Puesto que la función de onda BCS queda completamente determinada por los parámetros  $v_k$  y la condición (2.65), la variación  $\delta\langle BCS|H'|BCS\rangle$  da lugar a

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial u_k}{\partial v_k} + \frac{\partial}{\partial u_k}\right)\langle BCS|H'|BCS\rangle = 0 \quad (2.75)$$

Tras derivar llegamos finalmente al conjunto de ecuaciones de BCS

$$2\tilde{\epsilon}_k u_k v_k + \Delta_k (v_k^2 - u_k^2) = 0 \quad k > 0 \quad (2.76)$$

con

$$\tilde{\epsilon}_k = \frac{1}{2} \left( t_k k + t_{\bar{k}\bar{k}} + \sum_{k'} \bar{v}_{kk'kk'} + \bar{v}_{\bar{k}\bar{k}'\bar{k}\bar{k}'} v_{k'}^2 \right) - \lambda \quad (2.77)$$

y los parámetros de *gap*

$$\Delta_k = - \sum_{k' > 0} \bar{v}_{k\bar{k}\bar{k}'\bar{k}'} u_{k'} v_{k'} \quad (2.78)$$

Para valores fijos de  $\tilde{\epsilon}$  y  $\Delta_k$  se llega a

$$\begin{aligned} v_k^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right] \\ u_k^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

En el caso de tener una interacción de apareamiento pura, el hamiltoniano es de la forma

$$H = \sum_{k>0} \epsilon_k (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}) - G \sum_{kk'>0} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}'} a_{k'} \quad (2.80)$$

y el valor esperado de  $H'$  vale ahora

$$\langle BCS|H'|BCS\rangle = 2 \sum_{k>0} \left( \tilde{\epsilon}_k v_k^2 + \frac{1}{2} G v_k^4 \right) - \frac{\Delta^2}{G} \quad (2.81)$$

con el siguiente parámetro de *gap*

$$\Delta = G \sum_{k>0} u_k v_k \quad (2.82)$$

y de  $\tilde{\epsilon}_k$

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k - \lambda - Gv_k^2 \approx \epsilon_k - \lambda \quad (2.83)$$

Con la ecuación de gap (2.82) y la ecuación de número (2.69) llegamos a las siguientes soluciones de las ecuaciones BCS

$$\begin{aligned} v_k^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{E_k} \right] \\ u_k^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_k - \lambda}{E_k} \right] \end{aligned} \quad (2.84)$$

donde

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (2.85)$$

Vautherin propuso una simplificación de este método al considerar  $\Delta$  como el parámetro fundamental en lugar de la fuerza de interacción  $G$ , ya que como  $\Delta$  se puede obtener a partir de las diferencias experimentales de masa par-impar, este proceso equivale a quitar un parámetro de cálculo.

En nuestro caso los parámetros de *gap* se determinan de modo fenomenológico a partir de las diferencias de masa par-impar mediante la fórmula tomada de [AW95]

$$\begin{aligned} \Delta_n &= -\frac{1}{8} [B(N-2, Z) - 4B(N-1, Z) + 6B(N, Z) \\ &\quad - 4B(N+1, Z) + B(N+2, Z)] \\ \Delta_p &= -\frac{1}{8} [B(N, Z-2) - 4B(N, Z-1) + 6B(N, Z) \\ &\quad - 4B(N, Z+1) + B(N, Z+2)] \end{aligned} \quad (2.86)$$

En resumen, el procedimiento denominado como HF+BCS consiste en que tras cada nueva iteración Hartree-Fock se resuelven iterativamente las ecuaciones de BCS con el fin de determinar los niveles de Fermi, las ocupaciones y las energías de cuasipartículas. Las soluciones de (2.84) se introducen de nuevo en las ecuaciones (2.42)-(2.44) y se rehace el cálculo de HF.

## 2.7. Aproximación de fases aleatorias (RPA)

A pesar de que con el modelo estudiado hasta ahora se reproducen gran parte de las propiedades de los estados fundamentales de muchos núcleos, existe una serie de estados excitados cuyas características no se pueden explicar con un modelo de partícula independiente estático. Para solventar esto incluiremos en los cálculos descritos anteriormente la aproximación de RPA (*Random Phase Approximation*).

En primer lugar definimos los operadores de creación y aniquilación  $Q_\nu^+$  y  $Q_\nu$  [Ro68] de manera que

$$|\nu\rangle = Q_\nu^+|0\rangle \quad Q_\nu|0\rangle = 0 \quad (2.87)$$

donde el índice  $\nu$  representa los autoestados del sistema respecto al hamiltoniano  $H$  definido en (2.11)

$$H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle \quad (2.88)$$

De la ecuación de Schrödinger (2.88) se obtiene la ecuación del movimiento para  $Q_\nu^+$

$$[H, Q_\nu^+]|0\rangle = (E_\nu - E_0)Q_\nu^+|0\rangle \quad (2.89)$$

Si ahora multiplicamos por la izquierda por un estado arbitrario  $\langle 0|\delta Q$  se llega a

$$\langle 0|[\delta Q, [H, Q_\nu^+]]|0\rangle = (E_\nu - E_0)\langle 0|[\delta Q, Q_\nu^+]|0\rangle \quad (2.90)$$

Para derivar las ecuaciones aproximamos el estado fundamental  $|0\rangle$  por el estado HF  $|HF\rangle$  y el operador  $Q_\nu$  por el operador  $ph$

$$Q_\nu^+ = \sum_{mi} C_{mi}^\nu a_m^+ a_i \quad (2.91)$$

De manera que nos restringimos al espacio de excitaciones  $1p - 1h$ , con lo que  $\delta Q|0\rangle = \sum_{mi} a_m^+ a_i |HF\rangle \delta C_{mi}$ . Sin embargo, es posible generalizar el operador de creación (2.91) y de aniquilación de manera que tengamos un estado fundamental más general

$$\begin{aligned} Q_\nu^+ &= \sum_{mi} X_{mi}^\nu a_m^+ a_i - \sum_{mi} Y_{mi}^\nu a_i^+ a_m \\ Q_\nu &= \sum_{mi} X_{mi}^{*\nu} a_i^+ a_m - \sum_{mi} Y_{mi}^{*\nu} a_m^+ a_i \end{aligned} \quad (2.92)$$

Los subíndices  $i, j$  hacen referencia a los estados hueco  $h, h'$  y los subíndices  $m, n$  a los estados partícula  $p, p'$ . El estado fundamental  $|RPA\rangle$  se define de manera análoga a (2.87)

$$Q_\nu |RPA\rangle = 0 \quad (2.93)$$

En lugar de tener únicamente una matriz  $C_{mi}^\nu$  ahora tenemos dos matrices  $X_{mi}^\nu$  y  $Y_{mi}^\nu$  y dos tipos de variaciones  $\delta Q|0\rangle$ , concretamente  $a_m^+ a_i |0\rangle$  y  $a_i^+ a_m |0\rangle$ . Así, de (2.90), obtenemos dos conjuntos de ecuaciones

$$\begin{aligned} \langle RPA | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | RPA \rangle &= \hbar \Omega_\nu \langle RPA | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | RPA \rangle \\ \langle RPA | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | RPA \rangle &= \hbar \Omega_\nu \langle RPA | [a_m^+ a_i, Q_\nu^+] | RPA \rangle \end{aligned} \quad (2.94)$$

con  $\hbar \Omega_\nu$  como la energía de excitación del estado  $|\nu\rangle$ .

Para resolver estas ecuaciones necesitamos hallar los valores medios de los conmutadores

$$\begin{aligned} \langle RPA | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | RPA \rangle &= \sum_{nj} X_{nj}^\nu \langle RPA | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | RPA \rangle \\ &\quad - \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle RPA | [a_i^+ a_m, a_j^+ a_n] | RPA \rangle \end{aligned} \quad (2.95)$$

Introduciendo la *aproximación cuasibosónica* [BET61], por la cual se asume que el espacio fundamental correlacionado no difiere apenas del estado fundamental HF, estos valores esperados se pueden aproximar a

$$\begin{aligned} \langle RPA | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | RPA \rangle &= \delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{mn} \langle RPA | a_j a_i^+ | RPA \rangle \\ &\quad - \delta_{ij} \langle RPA | a_n^+ a_m | RPA \rangle \\ &\approx \langle HF | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | HF \rangle = \delta_{ij} \delta_{mn} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Teniendo en cuenta esta aproximación junto con la expresión (2.92), el conjunto de ecuaciones (2.94) queda

$$\begin{aligned}
& \sum_{nj} X_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]] | HF \rangle + \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]] | HF \rangle = \\
& \hbar\Omega_\nu \sum_{nj} X_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | HF \rangle = \hbar\Omega_\nu X_{mi}^\nu \\
& \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_m^+ a_i, [H, a_n^+ a_j]] | HF \rangle + \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_m^+ a_i, [H, a_j^+ a_n]] | HF \rangle = \\
& \hbar\Omega_\nu \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_m^+ a_i, a_j^+ a_n] | HF \rangle = \hbar\Omega_\nu Y_{mi}^\nu \quad (2.97)
\end{aligned}$$

En forma matricial podemos escribir las ecuaciones (2.97) como

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \hbar\Omega_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

con  $(X^\nu)_{mi} = X_{mi}^\nu$ ,  $(Y^\nu)_{mi} = Y_{mi}^\nu$  y

$$\begin{aligned}
A_{mi,nj} &= \langle HF | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]] | HF \rangle \\
&= (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{mn} \delta_{ij} + \bar{v}_{mjn} \\
B_{mi,nj} &= -\langle HF | [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]] | HF \rangle \\
&= \bar{v}_{mnij} \quad (2.99)
\end{aligned}$$

La ecuación (2.98) junto con (2.99) es la llamada *ecuación RPA*.

### 2.7.1. RPA de cuasipartículas (QRPA)

Cuando queremos describir las propiedades de los núcleos con capas abiertas, ya no es posible despreciar las correlaciones de apareamiento. Además de utilizar un modelo HF+BCS, podemos generalizar la teoría RPA llegando a lo que se denomina como RPA de cuasipartículas (QRPA).

Así, en lugar de utilizar la definición (2.92), usamos el operador de creación de cuasipartículas  $\Gamma_\lambda^+$

$$\Gamma_\lambda^+ = \sum_{\pi\nu} [X_{\pi\nu}^\lambda \alpha_\pi^+ \alpha_\nu^+ - Y_{\pi\nu}^\lambda \alpha_\pi \alpha_\nu] \quad (2.100)$$

donde  $\alpha_\pi^+$  y  $\alpha_\nu^+$  ( $\alpha_\pi$  y  $\alpha_\nu$ ) crean (destruyen) cuasipartículas de tipo protón y neutrón respectivamente. Estos se relacionan con los operadores de partícula como



$$\begin{aligned}\alpha_k^+ &= u_k a_k^+ - v_k a_{\bar{k}} \\ \alpha_k &= u_k a_k - v_k a_{\bar{k}}^+\end{aligned}\quad (2.101)$$

El operador  $\Gamma_\lambda^+$  y su hermítico conjugado  $\Gamma_\lambda$  verifican que

$$\Gamma_\lambda^+ |QRPA\rangle = |\lambda\rangle \quad \Gamma_\lambda |QRPA\rangle = 0 \quad (2.102)$$

Utilizando la ecuación (2.100) junto con el hamiltoniano

$$H = H_0 + V_{RES} = E_0 + \sum_\lambda E_\lambda \alpha_\lambda^+ \alpha_\lambda + \frac{1}{4} \sum_{\mu\lambda\mu'\lambda'} V_{\mu\lambda\mu'\lambda'} \alpha_\mu^+ \alpha_\lambda^+ \alpha_{\lambda'} \alpha_{\mu'} \quad (2.103)$$

y derivando de manera similar a la sección anterior, llegamos a la ecuación QRPA, cuya forma matricial es idéntica a la ecuación (2.98), salvo por el hecho de que las matrices  $A$  y  $B$  vienen dadas por

$$\begin{aligned}A_{kk'l'l'} &= (E_k + E_{k'}) \delta_{kl} \delta_{k'l'} + \bar{v}_{kk'l'l'} (u_k u_{k'} u_l u_{l'} + v_k v_{k'} v_l v_{l'}) \\ &\quad + \bar{v}_{k\bar{l}\bar{k}'l'} (u_k v_{k'} u_l v_{l'} + v_k u_{k'} v_l u_{l'}) \\ &\quad - \bar{v}_{k\bar{l}k'l'} (u_k v_{k'} v_l u_{l'} + v_k u_{k'} u_l v_{l'})\end{aligned}\quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}B_{kk'l'l'} &= -\bar{v}_{kk'l'l'} (u_k u_{k'} v_l v_{l'} + v_k v_{k'} u_l u_{l'}) \\ &\quad + \bar{v}_{k\bar{l}\bar{k}'l'} (u_k v_{k'} u_l v_{l'} + v_k u_{k'} v_l u_{l'}) \\ &\quad - \bar{v}_{k\bar{l}k'l'} (u_k v_{k'} v_l u_{l'} + v_k u_{k'} u_l v_{l'})\end{aligned}\quad (2.105)$$

donde  $E_k$  y  $E_{k'}$  son las energías de cuasipartícula de protones ( $E_k = E_\pi$ ) y neutrones ( $E_{k'} = E_\nu$ ) y las cantidades  $u_i, v_i$  representan las amplitudes de ocupación y no ocupación de protones y neutrones ( $i = \pi, \nu$ ).

## 2.8. Ecuaciones de QRPA y densintegración $\beta$

Siguiendo a Bertsh y a Tsai [BT75] la interacción partícula-hueco consistente con el campo medio de HF se puede obtener como

$$V_{ph} = \frac{1}{16} \sum_{sts't'} [1 + (-1)^{s-s'} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2] [1 + (-1)^{t-t'} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2] \frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta \rho_{st}(\vec{r}_1) \delta \rho_{s't'}(\vec{r}_2)} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.106)$$

Para el estudio de la desintegración  $\beta$  las interacciones residuales relevantes son las fuerzas de contacto de isospín que generan las transiciones de Fermi permitidas ( $\Delta L = 0, \Delta S = 0, \Delta I^\pi = 0^+$ )

$$V_F(12) = \chi_F(t_1^+ t_2^- + t_1^- t_2^+) \quad (2.107)$$

y las fuerzas de contacto de espín-isospín que generan las transiciones Gamow-Teller permitidas ( $\Delta L = 0, \Delta S = 1, \Delta I^\pi = 1^+$ )

$$V_{GT}(12) = \chi_{GT} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 (t_1^+ t_2^- + t_1^- t_2^+) \quad (2.108)$$

donde se ha usado la convención  $t^+|p\rangle = |n\rangle$  y  $t^-|n\rangle = |p\rangle$ .

Tras calcular las derivadas funcionales de la energía en (2.106), el término con  $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}$  para la transición Fermi y el término  $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}$  para la transición GT son como siguen

$$\begin{aligned} V_{ph}^{\tau\tau} &= \frac{1}{16} \sum_{sts't'} (-1)^{t-t'} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta \rho_{st}(\vec{r}_1) \delta \rho_{s't'}(\vec{r}_2)} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= \frac{1}{16} \left[ -4t_0(1+2x_0) - 2t_1 k_F^2(1+2x_1) + 2t_2(1+2x_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} t_3 \rho^\alpha(1+2x_3) \right] \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} V_{ph}^{\sigma\sigma} &= \frac{1}{16} \sum_{sts't'} (-1)^{s-s'} (-1)^{t-t'} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta \rho_{st}(\vec{r}_1) \delta \rho_{s't'}(\vec{r}_2)} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= \frac{1}{16} \left[ -4t_0 - 2t_1 k_F^2 + 2t_2 - \frac{2}{3} t_3 \rho^\alpha \right] \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned} \quad (2.110)$$

A partir de las ecuaciones (2.40) y (2.106)-(2.110), suponiendo materia nuclear uniforme y simétrica y promediando a todo el volumen nuclear llegamos a las siguientes expresiones de  $\chi_F$  y  $\chi_{GT}$

$$\chi_F = \frac{3}{4\pi R^3} \left( -\frac{1}{2} \right) \left\{ t_0(1+2x_0) - \frac{1}{2} k_F^2 [t_2(1+2x_2) - t_1(1+2x_1)] + \frac{1}{6} t_3 \rho^\alpha(1+2x_3) \right\} \quad (2.111)$$

$$\chi_{GT} = \frac{3}{4\pi R^3} \left( -\frac{1}{2} \right) \left\{ t_0 + \frac{1}{2} k_F^2 (t_1 - t_2) + \frac{1}{6} t_3 \rho^\alpha \right\} \quad (2.112)$$

donde  $t_0, t_1, t_2, t_3$  y  $\alpha$  son los parámetros de la fuerza de Skyrme,  $R$  es el radio nuclear y  $k_F = (3\pi^2\rho/2)^{1/3}$  el momento de Fermi. Conviene recordar que  $4\pi R^3 = A$ .

Consideramos ahora únicamente las transiciones Gamow-Teller. Usando la notación

$$\beta_K^\pm = \sigma_K t^\pm \quad (K = \Omega_\nu + \Omega_\pi = 0, \pm 1) \quad (2.113)$$

podemos escribir la ecuación (2.108) como

$$V_{GT}^{ph} = 2\chi_{GT}^{ph} \sum_K (-1)^K \beta_K^+ \beta_{-K}^- \quad (2.114)$$

En segunda cuantización los operadores  $\beta_K$  se definen como

$$\begin{aligned} \beta_K^+ &= \sum_{\nu\pi} \langle \nu | \sigma_K | \pi \rangle a_\nu^+ a_\pi = \sum_{\nu\pi} \langle \nu | \sigma_K | \pi \rangle \{ u_\nu v_\pi \alpha_\nu^+ \alpha_\pi^+ \\ &\quad + v_\nu u_\pi \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\pi + u_\nu u_\pi \alpha_\nu^+ \alpha_\pi + v_\nu v_\pi \alpha_\pi^+ \alpha_{\bar{\nu}} \} \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\beta_{-K}^- = (-1)(\beta_K^+)^+ \quad (2.116)$$

Y para la parte partícula-partícula:

$$V_{GT}^{pp} = -2\chi_{GT}^{pp} \sum_K (-1)^K P_K^+ P_{-K} \quad (2.117)$$

con

$$P_K^+ = \sum_{\nu\pi} \langle \nu | \sigma_K^+ | \pi \rangle a_\nu^+ a_\pi^+ \quad (2.118)$$

El operador fonónico de QRPA protón-neutrón para excitaciones Gamow-Teller en núcleos par-par es

$$\Gamma_{\omega_K}^+ = \sum_{\gamma_K} [X_{\gamma_K}^{\omega_K} A_{\gamma_K}^+ - Y_{\gamma_K}^{\omega_K} A_{\bar{\gamma}_K}] \quad (2.119)$$

donde  $A_{\gamma_K}^+$  y  $A_{\bar{\gamma}_K}$  son operadores de dos cuasipartículas de la forma

$$A_{\gamma_K}^+ = \alpha_\nu^+ \alpha_\pi^+ \quad A_{\bar{\gamma}_K} = \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\pi \quad (2.120)$$

Y las ecuaciones QRPA para un sistema par-par serán

$$\langle \phi_0 | A_{\gamma_K} [H, \Gamma_{\omega_K}^+] | \phi_0 \rangle = \omega_K \langle \phi_0 | A_{\gamma_K} \Gamma_{\omega_K}^+ | \phi_0 \rangle \quad (2.121)$$

$$\langle \phi_0 | [H, \Gamma_{\omega_K}^+] A_{\gamma_K}^+ | \phi_0 \rangle = \omega_K \langle \phi_0 | \Gamma_{\omega_K}^+ A_{\gamma_K}^+ | \phi_0 \rangle \quad (2.122)$$

con

$$H = \sum_{\nu} \alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu} E_{\nu} + \sum_{\pi} \alpha_{\pi}^+ \alpha_{\pi} E_{\pi} + V_{GT} - \langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle \quad (2.123)$$

A partir de estas ecuaciones se obtienen las siguientes amplitudes

$$X_{\gamma_K}^{\omega_K} = \frac{2\chi_{GT}}{\omega_K - \varepsilon_{\gamma_K}} (a_{\gamma_K} M_+^{\omega_K} + b_{\gamma_K} M_-^{\omega_K}) \quad (2.124)$$

$$Y_{\gamma_K}^{\omega_K} = \frac{2\chi_{GT}}{\omega_K + \varepsilon_{\gamma_K}} (b_{\gamma_K} M_+^{\omega_K} + a_{\gamma_K} M_-^{\omega_K}) \quad (2.125)$$

siendo  $\varepsilon = E_{\nu} + E_{\pi}$  la energía de excitación de dos cuasipartículas con  $E_k$  dado por (2.85).  $M_{\pm}^{\omega_K}$  son

$$M_+^{\omega_K} = \sum_{\gamma_K} (a_{\gamma_K} X_{\gamma_K}^{\omega_K} + b_{\gamma_K} Y_{\gamma_K}^{\omega_K}) \quad (2.126)$$

$$M_-^{\omega_K} = \sum_{\gamma_K} (b_{\gamma_K} X_{\gamma_K}^{\omega_K} + a_{\gamma_K} Y_{\gamma_K}^{\omega_K}) \quad (2.127)$$

con

$$a_{\gamma_K} = u_{\nu} v_{\pi} \sum_K^{\nu\pi} \quad (2.128)$$

$$b_{\gamma_K} = v_{\nu} u_{\pi} \sum_K^{\nu\pi} \quad (2.129)$$

y

$$\sum_K^{\nu\pi} = \langle \nu | \sigma_K | \pi \rangle \quad (2.130)$$

Nuestro objetivo es obtener las energías de excitación QRPA  $\omega_K$ , con lo que para ello necesitamos calcular los elementos de matriz  $M_{\pm}^{\omega_K}$  y las amplitudes  $X_{\gamma_K}^{\omega_K}$  e  $Y_{\gamma_K}^{\omega_K}$ . Recordando la definición de los estados de partícula independiente de oscilador armónico (2.55), llegamos a que los elementos de matriz son:

$$\sum_K^{\nu_i \pi_i} = \sum_{N n_z \Lambda \Sigma} C_{N n_z \Lambda \Sigma + K}^{\nu_i} C_{N n_z \Lambda \Sigma}^{\pi_i} (2\Sigma) \sqrt{1 + |K|} \quad (2.131)$$

$$\sum_{K=1}^{\nu_i \bar{\pi}_i} = \sum_{Nn_z} C_{Nn_z 0 \frac{1}{2}}^{\nu_i} C_{Nn_z 0 \frac{1}{2}}^{\pi_i} (-\sqrt{2}) \quad (2.132)$$

Donde se han tenido en cuenta las propiedades de transformación bajo inversión temporal y la conjugación hermítica por las cuales los modos  $K = -1$  y  $K = 1$  están relacionados entre sí y son degenerados, y los modos  $K = 0$  son impares bajo inversión temporal y verifican  $X_{\gamma_0}^{\omega_0} = -X_{\gamma_0}^{\omega_0}$  y  $Y_{\gamma_0}^{\omega_0} = -Y_{\gamma_0}^{\omega_0}$ . Esto permite simplificar los cálculos incluyendo solo pares protón-neutrón con  $\Omega_\nu > 0$ , con lo que

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad i_0 &= \nu_i \pi_i && \text{con } \Omega_{\nu_i} = \Omega_{\pi_i} \geq \frac{1}{2} \\ \blacksquare \quad i_{-1} &= \nu_i \pi_i && \text{con } \Omega_{\nu_i} = \Omega_{\pi_i} - 1 \geq \frac{1}{2} \\ \blacksquare \quad i_{+1} &= \begin{cases} \nu_i \pi_i & \text{con } \Omega_{\nu_i} = \Omega_{\pi_i} + 1 \geq \frac{3}{2} \\ \nu_i \bar{\pi}_i & \text{con } \Omega_{\nu_i} = \Omega_{\pi_i} + 1 \geq \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

En el caso de que no exista interacción partícula-partícula, las relaciones de dispersión para los modos  $K=0$  y  $K=1$  se reducen a una ecuación de segundo orden de la forma [Mu92]

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{4\chi_{GT}^{ph}} \right)^2 &= \frac{1}{2\chi_{GT}^{ph}} \sum_{i_0} \frac{a_{i_0}^2 + b_{i_0}^2}{\omega_0^2 - \varepsilon_{i_0}^2} \varepsilon_{i_0} + \left( \sum_{i_0} a_{i_0} b_{i_0} \frac{2\varepsilon_{i_0}}{\omega_0^2 - \varepsilon_{i_0}^2} \right)^2 \\ &\quad - \sum_{i_0} \left( \frac{a_{i_0}^2}{\omega_0 + \varepsilon_{i_0}} - \frac{b_{i_0}^2}{\omega_0 + \varepsilon_{i_0}} \right) \sum_{i_0} \left( \frac{b_{i_0}^2}{\omega_0 + \varepsilon_{i_0}} - \frac{a_{i_0}^2}{\omega_0 + \varepsilon_{i_0}} \right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\chi_{GT}^{ph}} \right)^2 &= \frac{1}{\chi_{GT}^{ph}} \sum_{i_\rho(\rho=\pm 1)} \frac{a_{i_\rho}^2 + b_{i_\rho}^2}{\omega_1^2 - \varepsilon_{i_\rho}^2} \varepsilon_{i_\rho} + \left( \sum_{i_\rho(\rho=\pm 1)} a_{i_\rho} b_{i_\rho} \frac{2\varepsilon_{i_\rho}}{\omega_1^2 - \varepsilon_{i_\rho}^2} \right)^2 \\ &\quad - \sum_{i_\rho(\rho=\pm 1)} \left( \frac{a_{i_\rho}^2}{\omega_1 + \varepsilon_{i_\rho}} - \frac{b_{i_\rho}^2}{\omega_1 + \varepsilon_{i_\rho}} \right) \sum_{i_\rho(\rho=\pm 1)} \left( \frac{b_{i_\rho}^2}{\omega_1 + \varepsilon_{i_\rho}} - \frac{a_{i_\rho}^2}{\omega_1 + \varepsilon_{i_\rho}} \right) \end{aligned} \quad (2.134)$$

Las amplitudes  $X$  e  $Y$  se obtienen de la ecuación (2.124) imponiendo las condiciones de normalización

$$2 \sum_{i_0} \left[ (X_{i_0}^{\omega_0})^2 - (Y_{i_0}^{\omega_0})^2 \right] = 1 \quad (2.135)$$

$$\sum_{i_\rho (\rho=\pm 1)} \left[ (X_{i_\rho}^{\omega_1})^2 - (Y_{i_\rho}^{\omega_1})^2 \right] = 1 \quad (2.136)$$

Obtenidas así las energías buscadas y con las condiciones de RPA  $\Gamma_{\omega_K}|0\rangle = 0$ ,  $|\omega_K\rangle = \Gamma_{\omega_K}^+|0\rangle$ , siendo  $|0\rangle$  el estado fundamental con correlaciones QRPA, se obtienen las intensidades  $\beta_K^\pm$

$$\langle \omega_K | \beta_K^\pm | 0 \rangle = \mp M_\pm^{\omega_K} \quad (2.137)$$

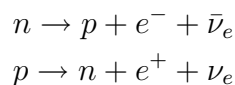
# Capítulo 3

## Desintegración beta

### 3.1. Desintegración beta simple

La emisión de electrones del núcleo fue uno de los primeros fenómenos observados de desintegración radiactiva. El proceso inverso, la captura electrónica, no fue observado hasta 1938 cuando L.W. Álvarez detectó rayos X característicos que provenían del llenado del vacío dejado por la captura electrónica. Frederic e Irene Joliot-Curie, en 1934, detectaron la emisión de positrones como proceso de desintegración radiactiva. Estos tres procesos están fuertemente relacionados y dan lugar a la llamada desintegración beta.

La desintegración beta es un proceso mediante el cual un nucleído emite una partícula beta (un electrón o positrón) para compensar la relación de neutrones y protones del núcleo atómico. Así la reacción básica se puede caracterizar por la desintegración de un neutrón o un protón ligados:



La partícula beta puede ser un electrón, en una desintegración beta menos  $\beta^{-}$ , o un positrón, en una desintegración beta más  $\beta^{+}$ . En la desintegración  $\beta^{-}$  un neutrón se convierte en un protón aumentando  $Z$  en una unidad. Por el contrario, mediante la desintegración  $\beta^{+}$ , un protón se convierte en un neutrón, decreciendo  $Z$  en una unidad. Compitiendo con la emisión  $\beta^{+}$ , se encuentra el proceso de captura electrónica, en el que un protón captura un electrón, generalmente procedente de la capa  $K$ , creando un neutrón como resultado final del proceso.

$$\beta^- : A(Z, N) \rightarrow A(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.1)$$

$$\beta^+ : A(Z, N) \rightarrow A(Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu_e \quad (3.2)$$

$$\text{EC} : e^- + A(Z, N) \rightarrow A(Z - 1, N + 1) + \nu_e \quad (3.3)$$

Los procesos de desintegración  $\beta$  tienen lugar de manera espontánea solo si son favorables energéticamente, esto es, si la diferencia entre las masas inicial y final es positiva, o lo que es lo mismo que el valor de  $Q_\beta = (\sum_i M_i - \sum_f M_f)c^2 > 0$ . En los tres procesos anteriores esta ventana energética vale

$$Q_{\beta^-} = [M(Z, N) - M(Z + 1, N - 1) - m_e]c^2 \quad (3.4)$$

$$Q_{\beta^+} = [M(Z, N) - M(Z - 1, N + 1) - m_e]c^2 \quad (3.5)$$

$$Q_{\text{EC}} = [M(Z, N) - M(Z - 1, N + 1) + m_e + B_e]c^2 \quad (3.6)$$

donde  $M$  denota la masa nuclear y  $B_e$  es la energía de ligadura del electrón capturado. En el caso de que el estado final que se alcance sea un estado excitado, entonces el valor  $Q$  será

$$Q_{\text{ex}} = Q_{\text{ground}} - E_{\text{ex}} \quad (3.7)$$

En 1934 Fermi propuso una teoría por la cual las características fundamentales de la desintegración podían derivarse a partir de la expresión de la probabilidad de transición provocada por una interacción considerada como débil en comparación con la interacción que forma los estados cuasi-estacionarios. Esta probabilidad de transición, conocida como regla de oro de Fermi viene dada por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (3.8)$$

siendo  $\rho(E_f)$  la densidad final de estados. El elemento de matriz  $V_{fi}$  es la integral de la interacción  $V$  entre los estados inicial y final del sistema y contiene toda la información relativa a la estructura nuclear. El estado inicial involucra solamente al núcleo padre en su estado fundamental

$$|i\rangle = |\Phi_i\rangle \quad (3.9)$$

mientras que el estado final comprende tres cuerpos: un leptón neutro y un leptón cargado, partículas libres descritas por ondas planas con momentos  $\vec{p}_\nu$  y  $\vec{p}_e$ , y el núcleo hijo que puede estar en su estado fundamental o en un estado excitado, siendo este estado final

$$|f; e; \nu\rangle = e^{i\frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{\hbar}} e^{i\frac{\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}}{\hbar}} |f\rangle \quad (3.10)$$



con  $|f\rangle = |\Phi_f\rangle$  como la función de onda del núcleo hijo.

En el caso de la desintegración  $\beta$  el momento transferido es muy pequeño, la energía del electrón es del orden de unos pocos MeV y el radio de interacción del orden de un fm, con lo que  $\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} \ll 1$  y  $\exp\left(i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \cong 1$ . Las transiciones obtenidas en esta aproximación se denominan permitidas, con  $\Delta L = 0$ , mientras que las que corresponden a términos de orden superior se denominan prohibidas.

Dentro de las transiciones permitidas podemos distinguir dos modos de desintegración debido a la transferencia de espín:

- Transiciones Fermi:  $\Delta S = 0$ ;  $\Delta T = \Delta I = 0$ ;  $\Delta\pi = \text{no}$
- Transiciones Gamow-Teller:  $\Delta S = 1$ ;  $\Delta T = \Delta I = 0, 1$ ;  $\Delta\pi = \text{no}$

Esto es, si el espín del electrón y el del neutrino son antiparalelos  $\Delta S = 0$  la transición es de tipo Fermi, y si por el contrario, son paralelos  $\Delta S = 1$  la transición sería de tipo Gamow-Teller.

La intensidad de la transición permitida se da en función de su velocidad reducida o valor  $ft$  donde  $f$  es el factor de espacio de fases que incorpora la cinemática del electrón o positrón emitido y  $t$  es la semivida parcial de la transición a un estado en el núcleo hijo.

El valor  $ft$  de una transición beta permitida se puede escribir como:

$$ft = \frac{K}{g_V^2} \left[ B(F) + \left( \frac{g_A}{g_V} \right)^2 B(GT) \right]^{-1} \quad (3.11)$$

con

$$\frac{K}{g_V^2} = 6170(4) \text{ s} \quad \left| \frac{g_A}{g_V} \right| = 1,251(9) \quad (3.12)$$

Donde  $g_V$  y  $g_A$  son la constante de acoplo vectorial y la constante de acoplo axial respectivamente.  $B(F)$  y  $B(GT)$  son las probabilidades de transición reducidas para la desintegraciones Fermi y Gamow-Teller, dadas en unidades de  $g_V^2/4\pi$  y  $g_A^2/4\pi$ , respectivamente.

La intensidad Gamow-Teller B(GT) o  $B_{GT}$  para una transición  $I_i \rightarrow I_f$  se obtiene según

$$B_{GT}^{\pm} = \sum_{M_i, M_f, \mu} |\langle I_f M_f | \beta_{\mu}^{\pm} | I_i M_i \rangle|^2 \quad (3.13)$$

donde los estados inicial y final en el sistema de laboratorio se expresan en términos de los estados intrínsecos  $|\phi_K\rangle$  utilizando la factorización de Bohr-Mottelson [BM69]:

$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left\{ D_{KM}^{\dagger I} \phi_K + (-1)^{I-K} D_{-KM}^{\dagger I} \phi_{\bar{K}} \right\} \quad (3.14)$$

En el caso de núcleos par-par, esta ecuación se puede particularizar con  $I_i = K_i = 0$ ,  $I_f = 1$  y  $K_f = 0, 1$

$$B_{GT}^{\pm} = \frac{g_A^2}{4\pi} \left\{ \delta_{K_f,0} \langle \phi_{K_f} | \beta_0^{\pm} | \phi_0 \rangle^2 + 2\delta_{K_f,1} \langle \phi_{K_f} | \beta_1^{\pm} | \phi_0 \rangle^2 \right\} \quad (3.15)$$

Los elementos de matriz intrínsecos  $\beta_0^{\pm}$  y  $\beta_1^{\pm}$  son los que aparecen en la ecuación (2.137).

Los valores de las constantes dadas en las ecuaciones (3.11) y (3.12) se han tomado del trabajo de Wilkinson y Macefield [WM74]. La determinación más precisa de  $g_V$  y por lo tanto de  $K/g_V^2$  surge a partir de medidas de transiciones de tipo Fermi  $0^+ \rightarrow 0^+$ , siendo estos datos consistentes con los datos actuales de desintegración de neutrones y piones [Ha90]. Por otro lado, medidas de la desintegración del neutrón proporcionan el valor de nucleón libre  $g_A$  a partir del ratio  $g_A/g_V$ . Este valor se usa para comparar los resultados medidos de  $ft$  y los cálculos de B(GT).

Durante muchos años, los experimentos con reacciones tipo  $(p, n)$  han sido la forma más habitual para estudiar la intensidad de las desintegraciones GT y las propiedades de espín-isospín de los núcleos. Cuando se compara la intensidad experimental de GT con las predicciones teóricas se observa que los resultados experimentales son menores que los teóricos, obteniéndose una intensidad reducida en un 50 – 60 %. Esta reducción en la intensidad, denominada factor de quenching, fue determinada por primera vez por Wilkinson al estudiar núcleos ligeros en las capas  $sd$  y  $fp$ , y se comprobó mediante reacciones  $(p, n)$  en núcleos pesados.

En nuestro caso este valor de quenching se ha tomado como

$$\left[ \frac{(g_A/g_V)_{eff}}{(g_A/g_V)_{libre}} \right]^2 = (0,75)^2 \approx 0,55 \quad (3.16)$$

Una posible explicación a esta reducción sería la contribución de excitaciones del nucleón, como por ejemplo, la de la partícula  $\Delta(1232)$ , que movería la distribución de la intensidad GT a altas energías fuera de la ventana energética. Otra posibilidad que se baraja es que la propia repulsión de corto alcance de la interacción nucleón-nucleón, desplaza parte de la intensidad mencionada a energías más altas.

La vida media de la desintegración beta se obtiene a partir de la regla de oro de Fermi, teniendo en cuenta todas las transiciones permitidas desde el estado fundamental del núcleo padre hasta todos los posibles estados del núcleo hijo cuya energía de excitación sea menor que la ventana energética  $Q_\beta$  del proceso y cumpla las reglas de selección descritas anteriormente

$$T_{1/2}^{-1} = \left( \frac{K}{g_V^2} \right)^{-1} \left( \frac{g_A}{g_V} \right)^2 \sum_{\omega < Q} f(Z, \omega) B_\omega(GT) \quad (3.17)$$

donde  $f(Z, \omega)$  es la función de Fermi que tiene en cuenta la interacción coulombiana entre el leptón saliente cargado y el núcleo hijo. Su valor se calcula numéricamente para cada energía  $\omega$ . En el caso de desintegraciones  $\beta^+$  o  $EC$ ,  $f(Z, \omega)$  tiene una parte correspondiente al proceso de emisión del positrón y otra parte independiente para el proceso de captura electrónica.

## 3.2. Desintegración doble beta

Fermi introdujo su teoría sobre la desintegración beta en 1934. Un año después, M. Goepfert-Mayer calculó las vidas medias de las desintegraciones doble beta con dos neutrinos ( $2\nu\beta\beta$ ), prediciendo vidas medias del orden de  $10^{17}$  años o más [Goe35].

Cuatro años más tarde, M. Furry [Fu39] amplió este trabajo considerando también la desintegración doble beta sin neutrinos ( $0\nu\beta\beta$ ), usando los conceptos de simetría de Majorana, por los cuales los neutrinos podrían ser fermiones de Majorana, sin distinción entre partículas y antipartículas. Si esto fuera así, podemos pensar que el neutrino de la primera desintegración  $\beta$  es absorbido en el estado intermedio, induciendo la emisión de un leptón cargado, permitiendo así la desintegración beta doble sin neutrinos.

No obstante, si los neutrinos fueran partículas de Dirac, con distinción entre partícula y antipartícula, los procesos  $0\nu\beta\beta$  estarían estrictamente prohibidos, puesto que se violaría la conservación del número leptónico.

Los procesos involucrados en la desintegración  $2\nu\beta\beta$  son los siguientes

$$2\beta_{2\nu}^- : A(Z, N) \rightarrow A(Z + 2, N - 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \quad (3.18)$$

$$2\beta_{2\nu}^+ : A(Z, N) \rightarrow A(Z - 2, N + 2) + 2e^+ + 2\nu_e \quad (3.19)$$

mientras que si consideramos la desintegración  $0\nu\beta\beta$  serían

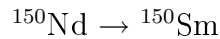
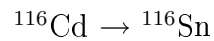
$$2\beta_{0\nu}^- : A(Z, N) \rightarrow A(Z + 2, N - 2) + 2e^- \quad (3.20)$$

$$2\beta_{0\nu}^+ : A(Z, N) \rightarrow A(Z - 2, N + 2) + 2e^+ \quad (3.21)$$

Los procesos doble beta únicamente aparecerán en situaciones en las que la desintegración  $\beta$  simple y otros modos de desintegración están prohibidos. Esto puede deberse a dos motivos: el momento angular transferido entre los núcleos padre e hijo es muy grande (por ejemplo,  $^{48}\text{Ca}$ ) o bien porque el estado intermedio no puede ser alcanzado por medio de la desintegración simple. Consideremos el caso del  $^{128}\text{Te}$ : la desintegración  $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{I}$  tiene un valor  $Q$  negativo de  $-1,26$  MeV, y no es posible. En cambio la desintegración  $\beta\beta$   $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$  es energéticamente posible con  $Q = 0,87$  MeV.

### 3.2.1. Descripción del modelo teórico

En este trabajo estudiaremos la doble desintegración beta con emisión de dos neutrinos utilizando un formalismo de QRPA deformado para dos núcleos cuya vida media ha sido medida:



Para construir el hamiltoniano de campo medio que da lugar a las funciones de onda y a las energías de partícula independiente, seguiremos el método descrito en el capítulo 2. Las funciones de onda de partícula independiente se desarrollan en términos de estados propios del oscilador armónico deformado con  $N = 11$  capas (2.55). Se incorporan también las correlaciones de apareamiento en aproximación BCS, con gaps fijos para protones y neutrones según

la (2.86).

El hamiltoniano nuclear es de la forma

$$H = H_0 + H_{int} \quad (3.22)$$

donde  $H_0$  denota el hamiltoniano descrito por un modelo de campo medio de Hartree-Fock y  $H_{int}$  contiene un término asociado a la interacción de partícula-hueco ( $ph$ ) y otro asociado a la interacción partícula-partícula ( $pp$ )

$$H_{int} = 2 \left[ \chi_{GT}^{ph} \sum_K (-1)^K \beta_K^+ \beta_{-K}^- - \kappa_{GT}^{pp} \sum_K (-1)^K P_K^+ P_{-K} \right] \quad (3.23)$$

La doble desintegración beta en segundo orden de teoría de perturbaciones se puede describir por medio de dos transiciones tipo Gamow-Teller vía estados intermedios virtuales  $1^+$ . La vida media de este proceso viene dada por

$$T_{1/2}^{2\nu}(0_{gs}^+ \rightarrow 0_{gs}^+) = \left[ G^{2\nu} |M_{GT}^{2\nu}|^2 \right]^{-1} \quad (3.24)$$

con  $M_{GT}^{2\nu}$  como el elemento de matriz de transición y  $G^{2\nu}$  como la integral de fase [SC98] dada por

$$G^{2\nu}(J) = g_J \int_1^{t+1} F_0(Z_f, \epsilon_1) p_1 \epsilon_1 I^{(J)}(T, \epsilon_1) d\epsilon_1 \quad (3.25)$$

con

$$I^{(J)}(T, \epsilon_1) = \int_1^{T+2-\epsilon_2} F_0(Z_f, \epsilon_2) p_2 \epsilon_2 f_J(T+2-\epsilon_1-\epsilon_2)^{5+J} d\epsilon_2 \quad (3.26)$$

y

$$f_J = \begin{cases} 1 & \text{si } J = 0 \\ (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 & \text{si } J = 2 \end{cases} \quad (3.27)$$

donde  $\epsilon_1, \epsilon_2$  son las energías de los electrones,  $J$  es el momento angular del estado nuclear final,  $T$  es el valor de  $Q$  de la desintegración y  $p$  es el momento del electrón. Como el caso que nos interesa es  $J = 0$  la constante de acoplo  $g_J$  vale

$$g_0 = 3,78 \cdot 10^{-24} \left( \frac{g_A}{g_V} \right)^4 \text{ años}^{-1} \quad (3.28)$$

y  $g_A/g_V = 1,251$ .

Por su parte, el elemento de matriz para una desintegración del estado fundamental del núcleo padre  $|0_i^+\rangle$  al estado fundamental del núcleo hijo  $|0_f^+\rangle$  [SPF04] viene dado por

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_{K=0,\pm 1} \sum_{m_i, m_f} \frac{\langle 0_f^+ || \beta_K^- || \omega_K^{m_f} \rangle \langle \omega_K^{m_f} | \omega_K^{m_i} \rangle \langle \omega_K^{m_i} || \beta_K^- || 0_i^+ \rangle}{(\omega_K^{m_f} + \omega_K^{m_i})/2} \quad (3.29)$$

La suma se extiende sobre todos los estados  $1^+$  del núcleo intermedio (figura 3.1)

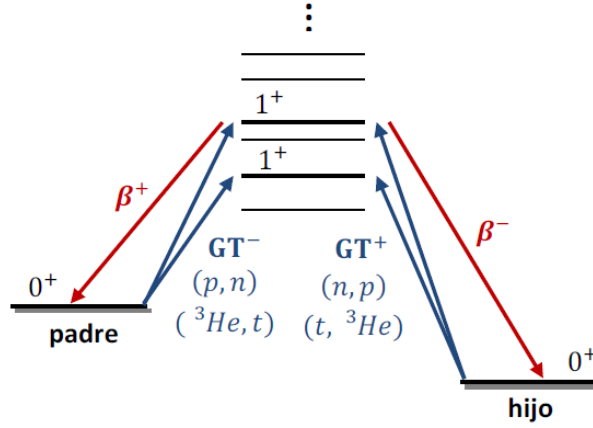


Figura 3.1: Representación esquemática de una desintegración  $2\nu\beta\beta$  entre los estados  $0^+$  como 2 transiciones a través de los estados intermedios  $1^+$ .

El solapamiento es necesario ya que los estados intermedios alcanzados por el estado inicial no son ortogonales a los alcanzados por el estado final, con lo que podemos definirlo como

$$\langle \omega_K^{m_f} | \omega_K^{m_i} \rangle = \sum_{l_i l_f} \left[ X_{l_f}^{\omega_K^{m_f}} X_{l_i}^{\omega_K^{m_i}} Y_{l_f}^{\omega_K^{m_f}} Y_{l_i}^{\omega_K^{m_i}} \right] R_{l_i l_f} \langle BCS_f | BCS_i \rangle \quad (3.30)$$

donde  $l_i l_f$  representan los pares de cuasipartículas  $\pi\nu$  para los núcleos inicial y final. A su vez  $R_{l_i l_f}$  incluye el solapamiento entre las funciones de onda de partícula independiente de los estados inicial y final, siendo

$$R_{l_i l_f} = \langle \pi | \pi' \rangle \langle \nu | \nu' \rangle \left( u_\pi^i u_{\pi'}^f + v_\pi^i v_{\pi'}^f \right) \left( u_\nu^i u_{\nu'}^f + v_\nu^i v_{\nu'}^f \right) \quad (3.31)$$

Por último una expresión aproximada para el factor de solapamiento  $\langle BCS_f | BCS_i \rangle$  sería

$$\begin{aligned} \langle BCS_f | BCS_i \rangle &= \prod_{\Omega_\pi} \langle BCS_f(\Omega_\pi) | BCS_i(\Omega_\pi) \rangle \prod_{\Omega_\nu} \langle BCS_f(\Omega_\nu) | BCS_i(\Omega_\nu) \rangle \\ &\approx \prod_{\Omega_\pi} \prod_{k=1}^{N\Omega_\pi} \left( u_k^f u_k^i + v_k^f v_k^i \right) \prod_{\Omega_\nu} \prod_{j=1}^{N\Omega_\nu} \left( u_j^f u_j^i + v_j^f v_j^i \right) \quad (3.32) \end{aligned}$$





# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Cálculo de las distribuciones de intensidad Gamow-Teller

#### 4.1.1. Propiedades del estado fundamental

El primer paso que debemos hacer es estudiar las posibles deformaciones de los núcleos considerados mediante un cálculo de Hartree-Fock con BCS, descrito en el capítulo 2.

El siguiente paso consiste en efectuar un cálculo similar al anterior pero sometido a una ligadura cuadrática en la deformación (sección 2.5). El resultado es un conjunto de energías del estado fundamental HF+BCS en función de la deformación cuadrupolar del núcleo. La representación gráfica de energía frente a deformación evidencia los mínimos de energía correspondientes a las deformaciones en equilibrio.

Así en las figuras 4.1-4.4 representamos, para cada uno de los núcleos estudiados, la energía de Hartree-Fock frente al parámetro de deformación cuadrupolar, utilizando tres fuerzas de Skyrme diferentes: Sk3, SG2 y SLy4. El parámetro de deformación viene dado por

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{Q_p}{Z \langle r_c^2 \rangle} \quad (4.1)$$

y depende del momento cuadrupolar  $Q_p$ , del radio cuadrático medio de carga y del número atómico  $Z$ .

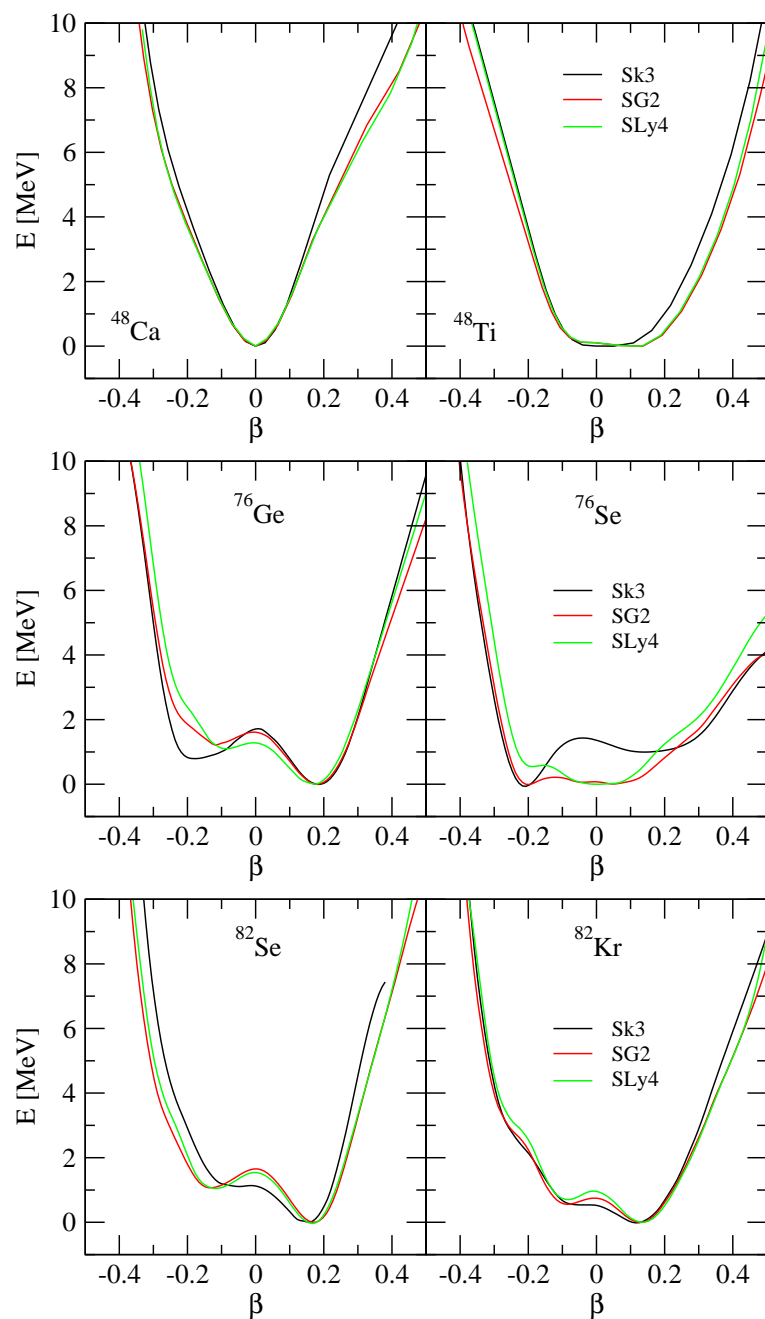


Figura 4.1: Energía de ligadura en MeV frente al parámetro de deformación cuadrupolar  $\beta$  para un cálculo de Hartree-Fock con fuerzas de Skyrme Sk3, SG2 y SLy4 para los núcleos  $^{48}\text{Ca}$  -  $^{48}\text{Ti}$ ,  $^{76}\text{Ge}$  -  $^{76}\text{Se}$  y  $^{82}\text{Se}$  -  $^{82}\text{Kr}$ .

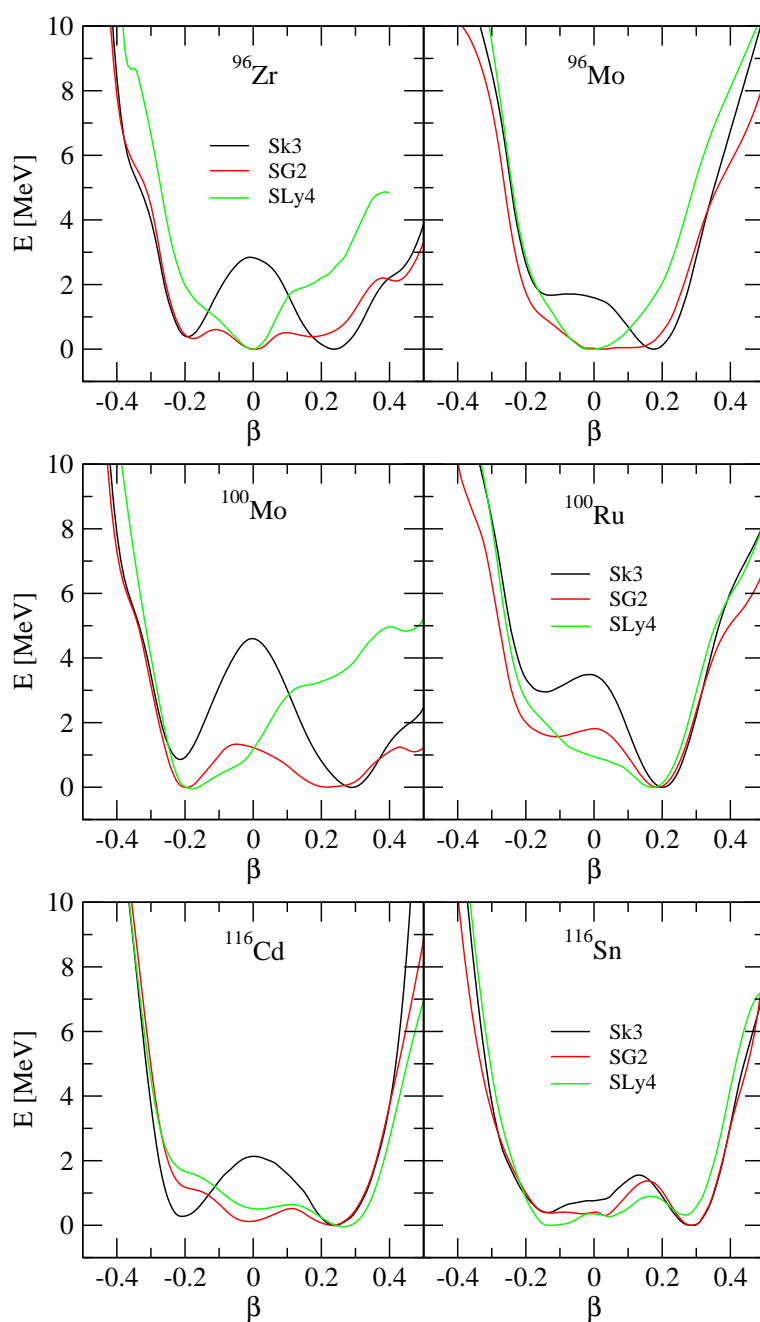


Figura 4.2: Lo mismo que en la figura 4.1 para los núcleos  $^{96}\text{Zr}$  -  $^{96}\text{Mo}$ ,  $^{100}\text{Mo}$  -  $^{100}\text{Ru}$  y  $^{116}\text{Cd}$  -  $^{116}\text{Sn}$ .

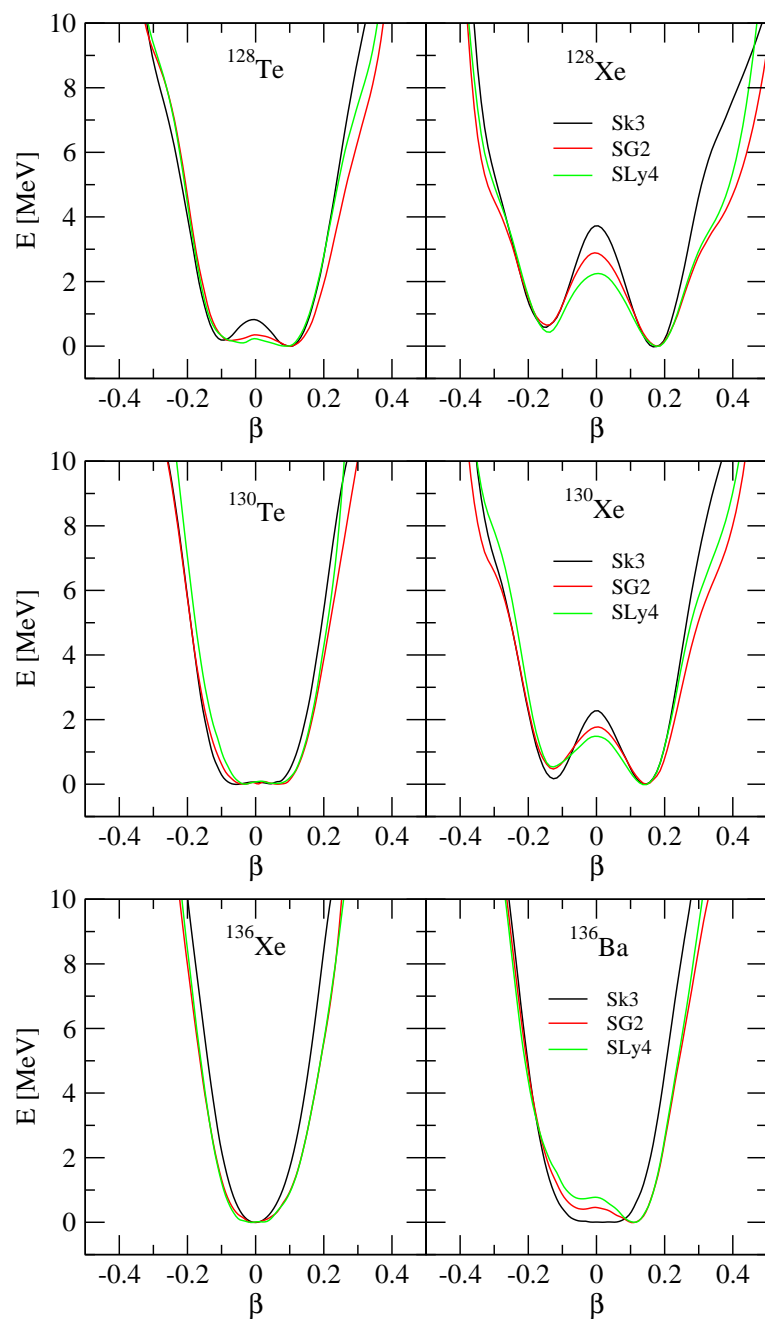


Figura 4.3: Lo mismo que en la figura 4.1 para los núcleos  $^{128}\text{Te}$  -  $^{128}\text{Xe}$ ,  $^{130}\text{Te}$  -  $^{130}\text{Xe}$  y  $^{136}\text{Xe}$  -  $^{136}\text{Ba}$ .

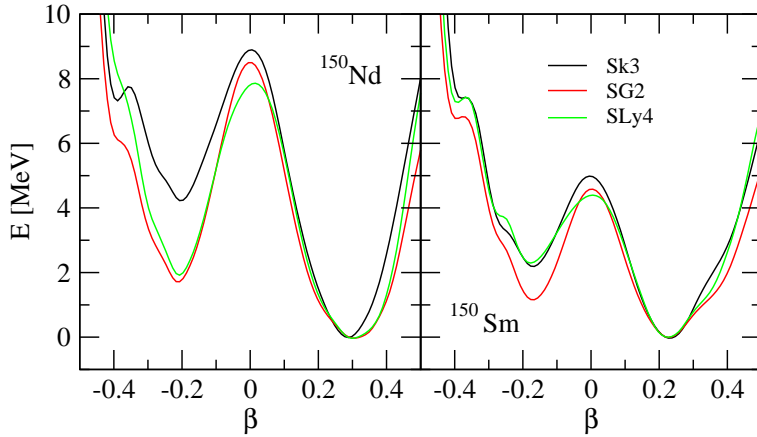


Figura 4.4: Lo mismo que en la figura 4.1 para los núcleos  $^{150}\text{Nd}$  y  $^{150}\text{Sm}$ .

En las figuras 4.1-4.4 puede verse cómo los cálculos con la fuerza SLy4, que será la que utilizaremos en los cálculos posteriores, son cualitativamente semejantes a los que se obtienen con las fuerzas de Skyrme Sk3 y SG2. Los dos casos discrepantes son los de los núcleos  $^{96}\text{Zr}$  y  $^{100}\text{Mo}$ . Sin embargo los resultados con SLy4 son similares a los que se obtienen con una fuerza de Gogny, como puede verse en la página web [http://www-phynu.cea.fr/science\\_en\\_ligne/carte\\_potentiels\\_microscopiques/carte\\_potentiel\\_nucleaire\\_eng.htm](http://www-phynu.cea.fr/science_en_ligne/carte_potentiels_microscopiques/carte_potentiel_nucleaire_eng.htm). Puede observarse también cómo los cálculos predicen la existencia de dos mínimos próximos en energía para los núcleos  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{76}\text{Se}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{82}\text{Kr}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{116}\text{Sn}$ ,  $^{128,130}\text{Te}$ ,  $^{128,130}\text{Xe}$  y  $^{136}\text{Ba}$ , dando lugar a la posibilidad de coexistencia de forma en estos isótopos. En el caso de los núcleos  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ti}$  y  $^{96}\text{Mo}$  y  $^{136}\text{Xe}$ , la deformación es claramente esférica. Por último, los núcleos  $^{100}\text{Ru}$ ,  $^{150}\text{Nd}$  y  $^{150}\text{Sm}$ , muestran una deformación prolada en su estado fundamental.

En la tabla 4.1 podemos ver los valores de la deformación cuadrupolar correspondientes a la mínima energía obtenidos con nuestro modelo para las tres fuerzas, así como los valores de los mínimos de energía y los radios cuadráticos medios de carga. En el caso en que se encuentren dos mínimos muy claros se muestran los valores para ambos mínimos: oblado (con un parámetro de deformación negativo) y prolado (el parámetro de deformación es positivo). En algunos núcleos se puede apreciar también un tercer mínimo con un parámetro de deformación muy próximo a cero, lo que indica que el núcleo tiene forma esférica.

Tabla 4.1: Valores de los parámetros de gap para protones y neutrones  $\Delta_n$  y  $\Delta_p$  (MeV), parámetros  $b$  ( $\text{fm}^{-1}$ ) y  $q$  de la base del oscilador, deformación  $\beta$ , mínimo de energía HF  $E_T$  (MeV) y radio de carga  $r_c$  (fm) para las fuerzas de Skyrme Sk3, SG2 y SLy4.

Núcleo	Fuerza	$\Delta_n$	$\Delta_p$	$b$	$q$	$\beta$	$E_T$	$r_c$
$^{48}\text{Ca}$	Sk3	1.7	2.2	0.581	1.01	0	$-0.418642 \times 10^3$	3.59
	SG2	1.7	2.2	0.579	1.00	0	$-0.435841 \times 10^3$	3.55
	SLy4	1.7	2.2	0.558	1.00	0	$-0.418615 \times 10^3$	3.59
$^{48}\text{Ti}$	Sk3	1.6	1.9	0.588	1.00	0	$-0.420034 \times 10^3$	3.63
	SG2	1.6	1.9	0.581	0.98	0	$-0.434972 \times 10^3$	3.60
	SLy4	1.6	1.9	0.567	0.98	0	$-0.420428 \times 10^3$	3.64
$^{76}\text{Ge}$	Sk3	1.5	1.6	0.527	0.82	-0.09	$-0.658189 \times 10^3$	4.12
				0.528	1.39	0.15	$-0.659146 \times 10^3$	4.13
	SG2	1.5	1.6	0.518	1.40	0.15	$-0.680931 \times 10^3$	4.08
	SLy4	1.5	1.6	0.507	0.80	-0.06	$-0.660848 \times 10^3$	4.10
				0.507	1.42	0.13	$-0.661684 \times 10^3$	4.11
$^{76}\text{Se}$	Sk3	1.7	1.8	0.528	0.73	-0.18	$-0.659022 \times 10^3$	4.18
				0.530	1.22	0.09	$-0.658054 \times 10^3$	4.16
	SG2	1.7	1.8	0.524	1.06	0.01	$-0.678472 \times 10^3$	4.11
	SLy4	1.7	1.8	0.509	0.70	-0.03	$-0.662105 \times 10^3$	4.14
				0.509	0.99	0	$-0.662253 \times 10^3$	4.14
$^{82}\text{Se}$	Sk3	1.5	1.4	0.521	1.31	0.12	$-0.711258 \times 10^3$	4.20
				0.500	0.77	-0.10	$-0.732556 \times 10^3$	4.16
	SLy4	1.5	1.4	0.509	1.30	0.14	$-0.733609 \times 10^3$	4.16
				0.485	0.75	-0.09	$-0.711722 \times 10^3$	4.18
				0.489	1.27	0.14	$-0.712772 \times 10^3$	4.18
$^{82}\text{Kr}$	Sk3	1.6	1.7	0.521	1.25	0.09	$-0.712208 \times 10^3$	4.24
				0.512	1.31	0.10	$-0.732618 \times 10^3$	4.19
	SLy4	1.6	1.7	0.501	0.80	-0.07	$-0.714436 \times 10^3$	4.22
				0.501	1.41	0.11	$-0.714909 \times 10^3$	4.22
$^{96}\text{Zr}$	Sk3	0.8	1.5	0.494	0.76	-0.17	$-0.820659 \times 10^3$	4.43
				0.495	1.48	0.21	$-0.821066 \times 10^3$	4.44
	SG2	0.8	1.5	0.476	1.01	0	$-0.846056 \times 10^3$	4.341829
				0.482	1.29	0.16	$-0.845676 \times 10^3$	4.37
	SLy4	0.8	1.5	0.446	0.89	-0.01	$-0.826047 \times 10^3$	4.37

#### 4.1 Cálculo de las distribuciones de intensidad Gamow-Teller 63

Núcleo	Fuerza	$\Delta_n$	$\Delta_p$	b	q	$\beta$	$E_T$	$r_c$
$^{96}\text{Mo}$	Sk3	1.0	1.5	0.491	1.42	0.15	$-0.825218 \times 10^3$	4.45
	SG2	1.0	1.5	0.484	1.10	0.02	$-0.846818 \times 10^3$	4.37
	SLy4	1.0	1.5	0.453	0.84	0.02	$-0.830111 \times 10^3$	4.40
$^{100}\text{Mo}$	Sk3	1.3	1.6	0.485	0.72	-0.18	$-0.853639 \times 10^3$	4.50
				0.486	1.62	0.25	$-0.854532 \times 10^3$	4.52
	SG2	1.3	1.6	0.449	0.57	0.20	$-0.878580 \times 10^3$	4.47
				0.476	1.38	0.17	$-0.878458 \times 10^3$	4.44
	SLy4	1.3	1.6	0.442	0.61	-0.18	$-0.858000 \times 10^3$	4.48
	$^{100}\text{Ru}$	Sk3	1.3	1.6	0.487	1.45	0.18	$-0.856762 \times 10^3$
SG2		1.3	1.6	0.467	0.85	-0.09	$-0.876580 \times 10^3$	4.45
				0.479	1.37	0.16	$-0.878040 \times 10^3$	4.46
SLy4		1.3	1.6	0.463	1.32	0.14	$-0.860900 \times 10^3$	4.48
$^{116}\text{Cd}$	Sk3	1.4	1.5	0.541	0.92	-0.18	$-0.980294 \times 10^3$	4.70
				0.523	1.05	0.24	$-0.980695 \times 10^3$	4.71
	SG2	1.4	1.5	0.464	0.80	-0.21	$-0.100595 \times 10^4$	4.66
				0.464	1.46	0.21	$-0.100615 \times 10^4$	4.65
				0.464	1.00	0	$-0.500605 \times 10^4$	4.61
	SLy4	1.4	1.5	0.447	0.80	-0.20	$-0.982899 \times 10^3$	4.68
			0.454	1.40	0.18	$-0.983302 \times 10^3$	4.65	
$^{116}\text{Sn}$	Sk3	1.2	1.8	0.540	1.00	-0.15	$-0.980480 \times 10^3$	4.71
				0.525	1.15	0.28	$-0.980480 \times 10^3$	4.76
	SG2	1.2	1.8	0.456	0.95	-0.06	$-0.100333 \times 10^4$	4.65
				0.463	1.29	0.27	$-0.100357 \times 10^4$	4.70
	SLy4	1.2	1.8	0.458	0.80	-0.12	$-0.984356 \times 10^3$	4.67
				0.444	1.40	0.25	$-0.983803 \times 10^3$	4.72
			0.458	1.00	0	$-0.984309 \times 10^3$	4.66	
$^{128}\text{Te}$	Sk3	1.3	1.1	0.550	1.20	0.06	$-0.107562 \times 10^4$	4.80
	SG2	1.3	1.1	0.455	1.22	0.06	$-0.110255 \times 10^4$	4.74
	SLy4	1.3	1.1	0.453	0.80	-0.02	$-0.107718 \times 10^4$	4.75
				0.453	1.40	0.06	$-0.107764 \times 10^4$	4.75

Núcleo	Fuerza	$\Delta_n$	$\Delta_p$	b	q	$\beta$	$E_T$	$r_c$
$^{128}\text{Xe}$	Sk3	1.3	1.3	0.550	0.79	-0.13	$-0.107358 \times 10^4$	4.84
				0.554	1.30	-0.15	$-0.107423 \times 10^4$	4.84
	SG2	1.3	1.3	0.500	1.00	-0.13	$-0.109658 \times 10^4$	4.79
				0.548	1.13	0.15	$-0.109708 \times 10^4$	4.78
	SLy4	1.3	1.3	0.500	1.00	-0.13	$-0.107528 \times 10^4$	4.80
				0.536	1.15	0.14	$-0.107558 \times 10^4$	4.79
$^{130}\text{Te}$	Sk3	1.2	1.1	0.550	1.02	0	$-0.109140 \times 10^4$	4.81
	SG2	1.2	1.1	0.454	1.09	0.02	$-0.111955 \times 10^4$	4.75
	SLy4	1.2	1.1	0.453	0.80	-0.01	$-0.109234 \times 10^4$	4.76
				0.453	1.20	0.03	$-0.109292 \times 10^4$	4.76
$^{130}\text{Xe}$	Sk3	1.3	1.3	0.551	0.80	-0.10	$-0.109072 \times 10^4$	4.85
				0.548	1.24	0.11	$-0.109087 \times 10^3$	4.85
	SG2	1.3	1.3	0.480	0.95	-0.09	$-0.111460 \times 10^4$	4.79
				0.544	1.11	0.11	$-0.111513 \times 10^4$	4.79
	SLy4	1.3	1.3	0.462	0.60	-0.08	$-0.109041 \times 10^4$	4.80
				0.462	1.12	0.10	$-0.109252 \times 10^3$	4.80
$^{136}\text{Xe}$	Sk3	1.4	1.0	0.545	0.99	0	$-0.113888 \times 10^4$	4.88
	SG2	1.4	1.0	0.543	1.01	0	$-0.116663 \times 10^4$	4.82
				0.452	1.08	0.01	$-0.116698 \times 10^4$	4.81
	SLy4	1.4	1.0	0.531	1.01	0	$-0.113836 \times 10^4$	4.83
				0.453	1.12	0.01	$-0.113863 \times 10^3$	4.82
$^{136}\text{Ba}$	Sk3	1.0	1.3	0.547	1.00	0	$-0.113807 \times 10^4$	4.90
	SG2	1.0	1.3	0.452	1.20	0.06	$-0.116283 \times 10^4$	4.85
				0.542	1.15	0.02	$-0.116248 \times 10^4$	4.84
	SLy4	1.0	1.3	0.490	0.83	0.06	$-0.113854 \times 10^4$	4.86
				0.530	1.22	0.04	$-0.113838 \times 10^3$	4.85
$^{150}\text{Nd}$	Sk3	1.1	1.2	0.544	0.89	-0.18	$-0.122512 \times 10^4$	5.09
				0.531	1.35	0.26	$-0.122942 \times 10^3$	5.11
	SG2	1.1	1.2	0.440	0.79	-0.18	$-0.125733 \times 10^4$	5.02
				0.524	1.39	0.26	$-0.125929 \times 10^4$	5.06
	SLy4	1.1	1.2	0.434	0.80	-0.17	$-0.122808 \times 10^4$	5.03
				0.480	1.11	0.25	$-0.123022 \times 10^3$	5.06



Núcleo	Fuerza	$\Delta_n$	$\Delta_p$	b	q	$\beta$	$E_T$	$r_c$
$^{150}\text{Sm}$	Sk3	1.2	1.4	0.550	0.94	-0.14	$-0.122896 \times 10^4$	5.09
				0.529	1.33	0.20	$-0.123132 \times 10^3$	5.11
	SG2	1.2	1.4	0.445	0.88	-0.13	$-0.125609 \times 10^4$	5.03
				0.531	1.28	0.20	$-0.125742 \times 10^4$	5.05
	SLy4	1.2	1.4	0.525	0.89	-0.13	$-0.123077 \times 10^4$	5.04
				0.522	1.32	0.20	$-0.123330 \times 10^3$	5.05

### 4.1.2. Distribuciones de intensidad Gamow-Teller

Como hemos dicho en el capítulo 2, para describir las transiciones GT es necesario añadir una interacción residual de espín-isospín al campo medio. Esta interacción contiene dos partes, partícula-hueco ( $ph$ ) y partícula-partícula ( $pp$ ).

La interacción en el canal  $ph$  es responsable de la posición y estructura de la resonancia gigante de GT, mientras que la interacción  $pp$  es una fuerza de apareamiento neutrón-protón en el canal de acoplo  $J^\pi = 1^+$ . Para reproducir la energía de la resonancia es común ajustar la constante  $\chi_{GT}^{ph}$ , como se verá más adelante, mientras que la constante de acoplo  $\kappa_{GT}^{pp}$  de la fuerza  $pp$  determina en gran medida las vidas medias de los núcleos.

Una posible manera de elegir las constantes de acoplo sería siguiendo con cada uno de los núcleos el procedimiento anterior. Sin embargo, lo que nos interesa es conseguir una única expresión para cada constante con el fin de extender este modelo a cualquier otro núcleo. Así, con el fin de conseguir reproducir la posición de la resonancia gigante en los veinte núcleos utilizados, determinada experimentalmente por reacciones de tipo  $(p, n)$  y  $(n, p)$ , se ha utilizado un valor de  $\chi_{ph} = 11/A$  MeV y  $\kappa_{pp} = 2/A$  MeV, mostradas en color azul en las figuras que siguen a continuación. En adelante los valores de estas constantes se mostrarán sin unidades. Asimismo se ha comparado con los resultados que se obtienen utilizando valores fijos de estas constantes:  $\chi_{ph} = 0,15$  y  $\kappa_{pp} = 0,030$  [Sar09],[Sar12] (en color rojo en las figuras). Estos valores fijos se corresponden aproximadamente con los valores  $\chi_{ph} = 11/A$  y  $\kappa_{pp} = 2/A$  para el  $^{76}\text{Ge}$  ( $A=76$ ) ya que se trata de un núcleo que se encuentra en una región de masa intermedia y ha sido bien estudiado.

En las figuras 4.5-4.14 se representan las distribuciones de intensidad GT de los núcleos padre  $B(GT^-)$  y de los núcleos hijo  $B(GT^+)$ . Para representar estas distribuciones y compararlas con los datos experimentales utilizamos un *folding* de gaussianas de anchura  $\Gamma = 1$  MeV y un factor de *quenching* de 0.55 como se indicó en la expresión (3.16) (paneles superiores). En el caso de que el núcleo posea varias deformaciones posibles en el equilibrio, definidas en la tabla 4.1, se muestran sus distribuciones con el fin de determinar con qué deformación se reproducen mejor los datos experimentales. En los paneles inferiores se muestra la intensidad GT acumulada, mostrando así al mismo tiempo la estructura detallada de la distribución y su comportamiento global en función de la intensidad total contenida hasta cierta energía de excitación.

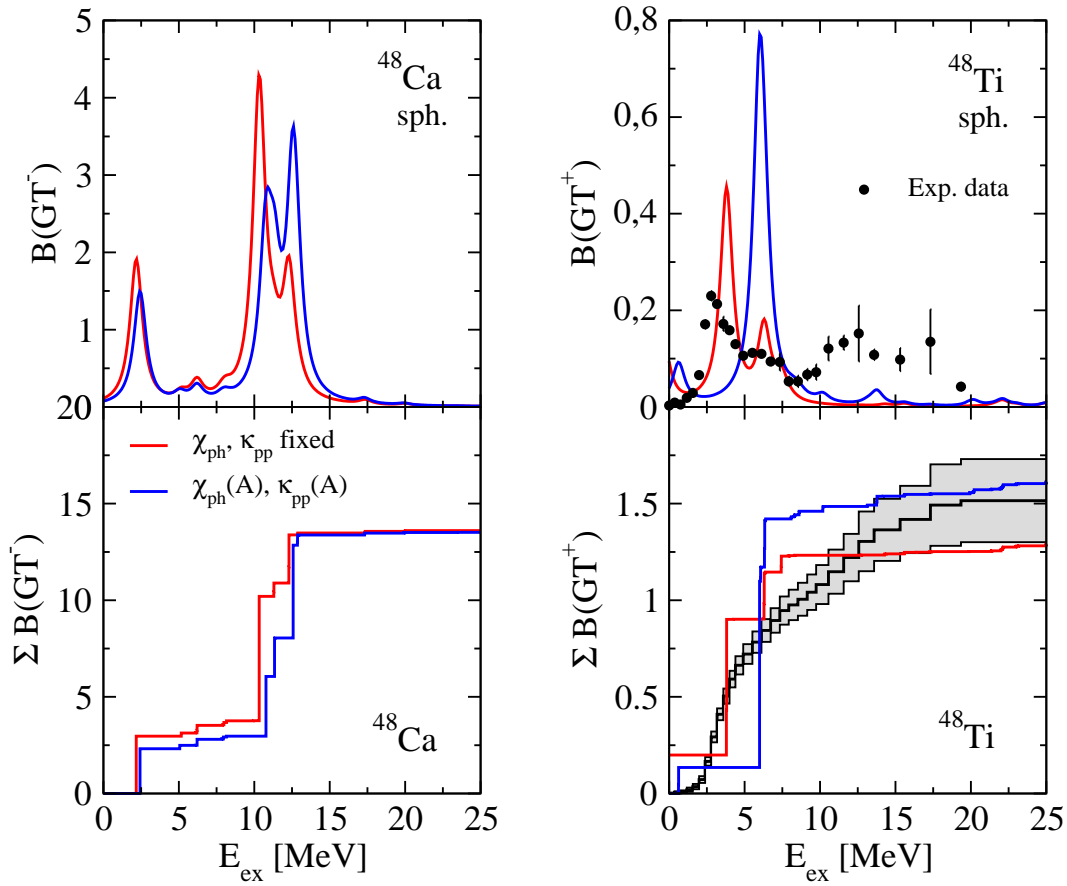


Figura 4.5: Figuras superiores: Distribuciones de intensidad Gamow-Teller ( $GT^+$  y  $GT^-$ ) para los núcleos  $^{48}\text{Ca}$  y  $^{48}\text{Ti}$ , representadas frente a la energía de excitación correspondientes al núcleo hijo. Las líneas rojas representan la intensidad que se obtiene con interacciones residuales  $\chi_{ph} = 0,15$  MeV  $\kappa_{pp} = 0,030$  MeV, mientras que para las líneas azules  $\chi_{ph} = 11/A$  MeV  $\kappa_{pp} = 2/A$  MeV. Figuras inferiores: sumas acumuladas de la intensidad GT. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Yako09]

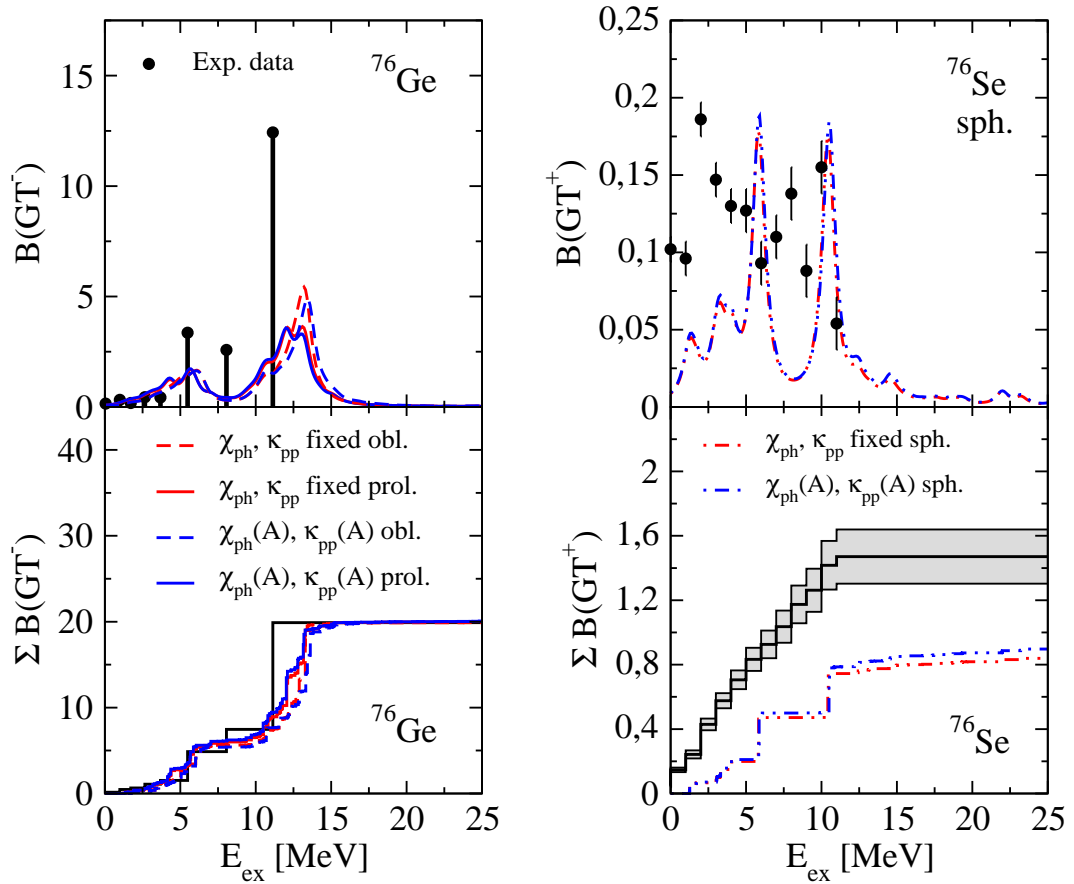


Figura 4.6: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{76}\text{Ge}$  y  $^{76}\text{Se}$ . Se muestran las distribuciones que se obtienen si las deformaciones en equilibrio fueran prolada (línea continua), oblada (línea a trazos) y esférica (línea de puntos y trazos). Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Hel97] para el germanio y de [Mad89] para el selenio

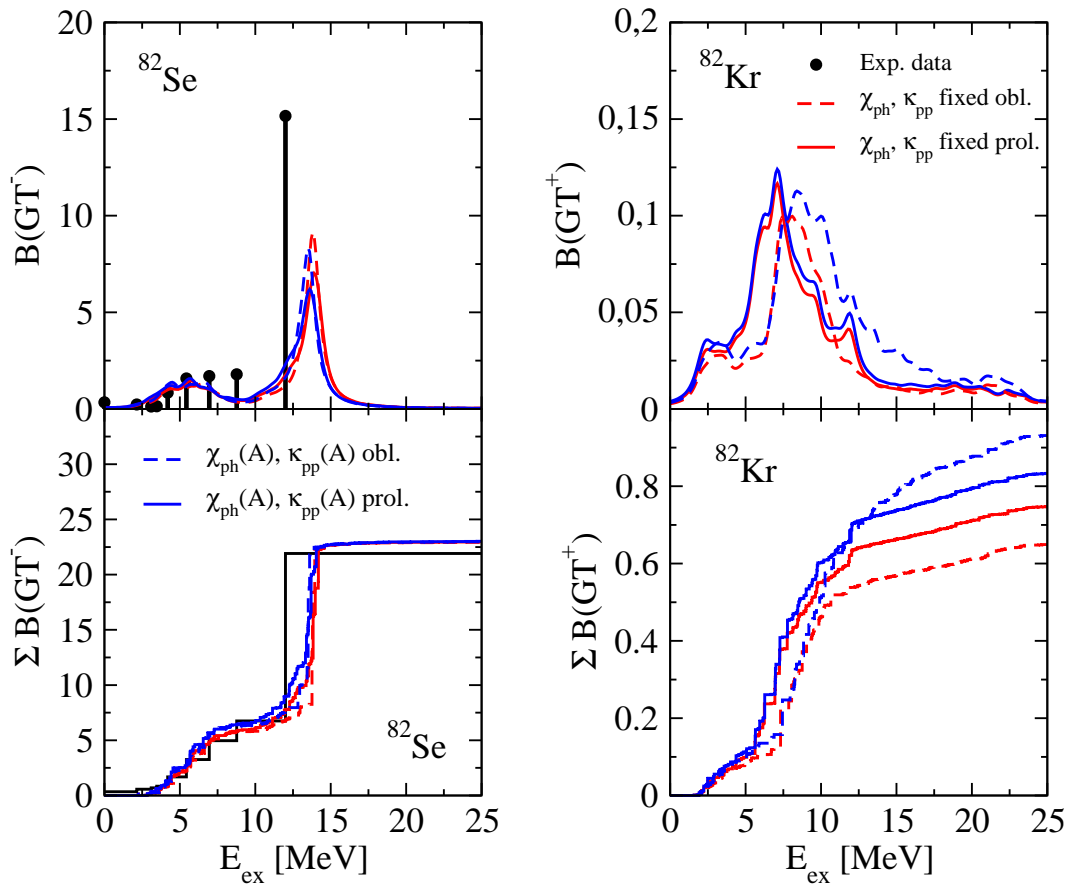


Figura 4.7: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{82}\text{Se}$  y  $^{82}\text{Kr}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Mad89]

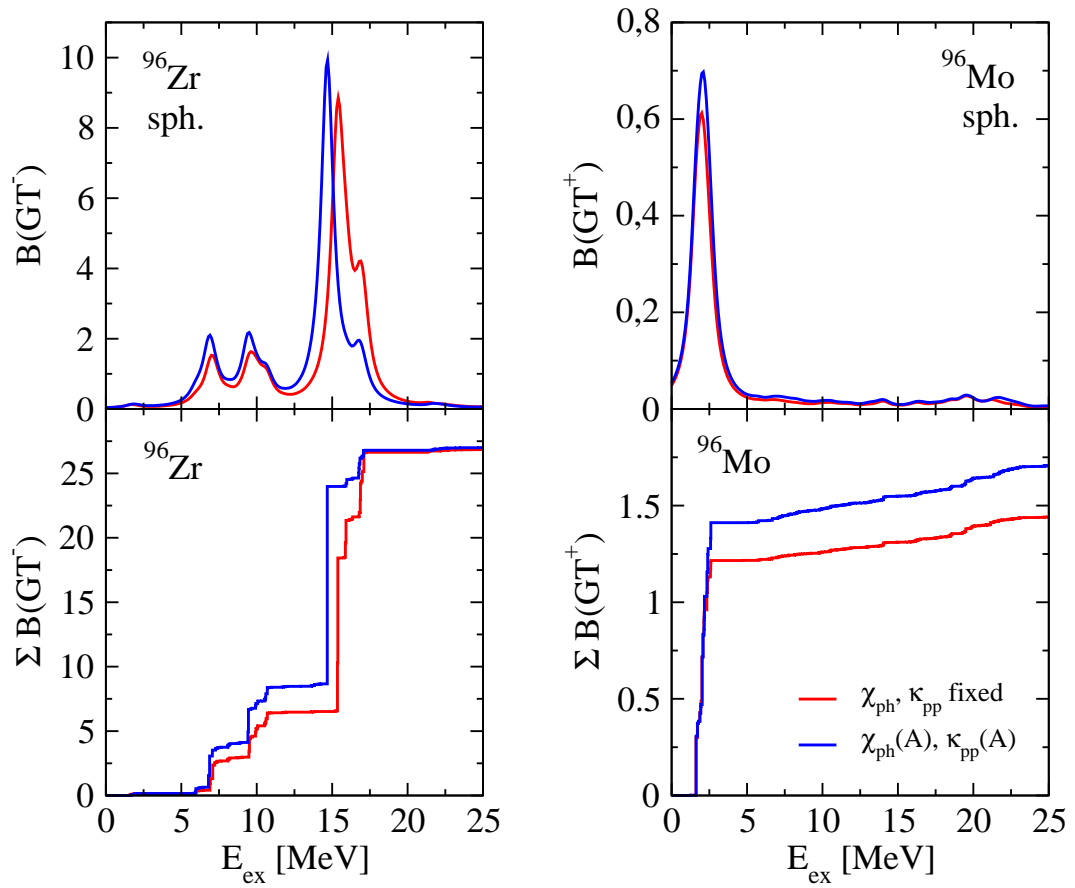


Figura 4.8: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{96}\text{Zr}$  y  $^{96}\text{Mo}$ .

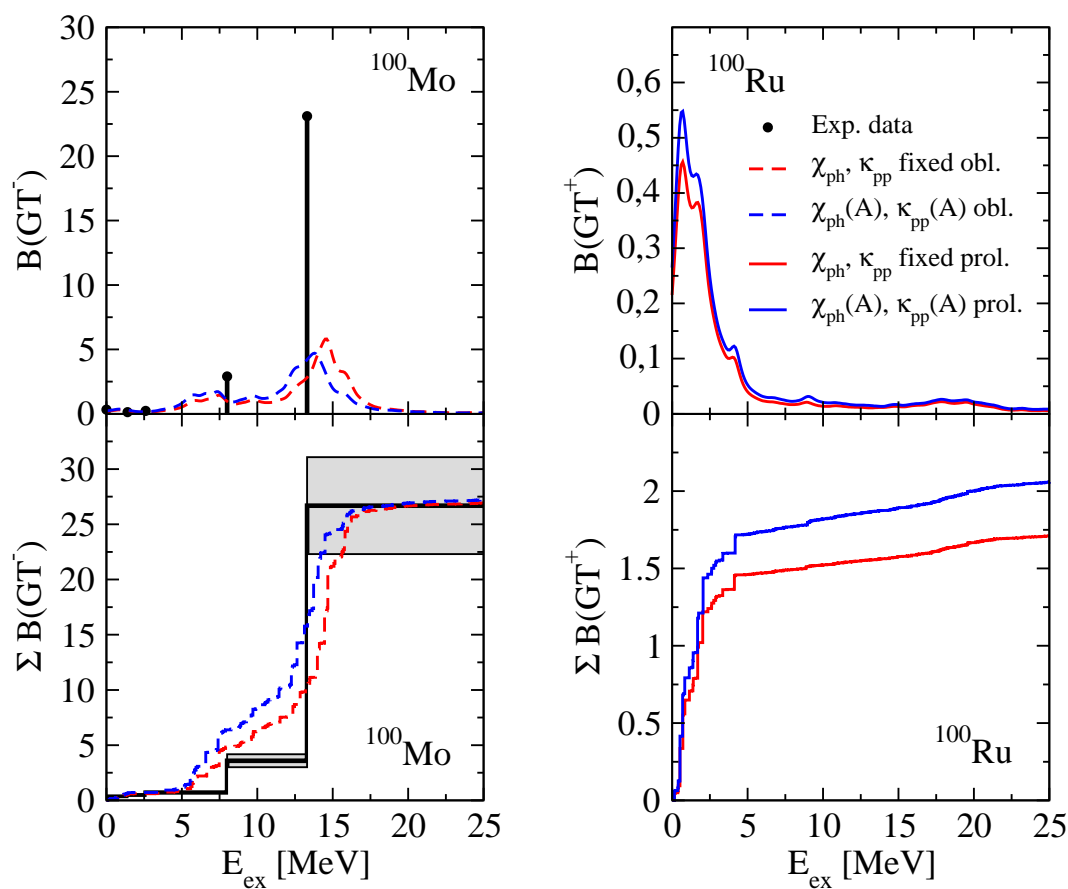


Figura 4.9: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{100}\text{Mo}$  y  $^{100}\text{Ru}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Aki97]

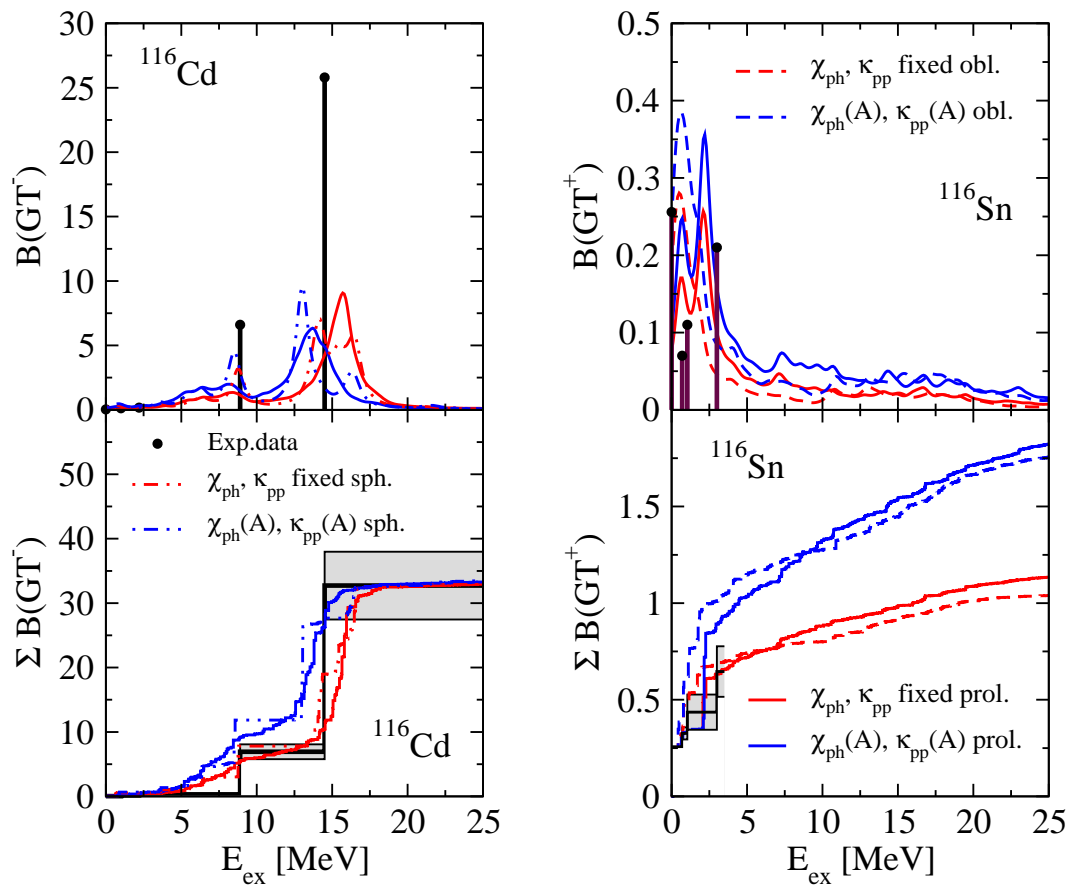


Figura 4.10: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{116}\text{Cd}$  y  $^{116}\text{Sn}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Aki97]



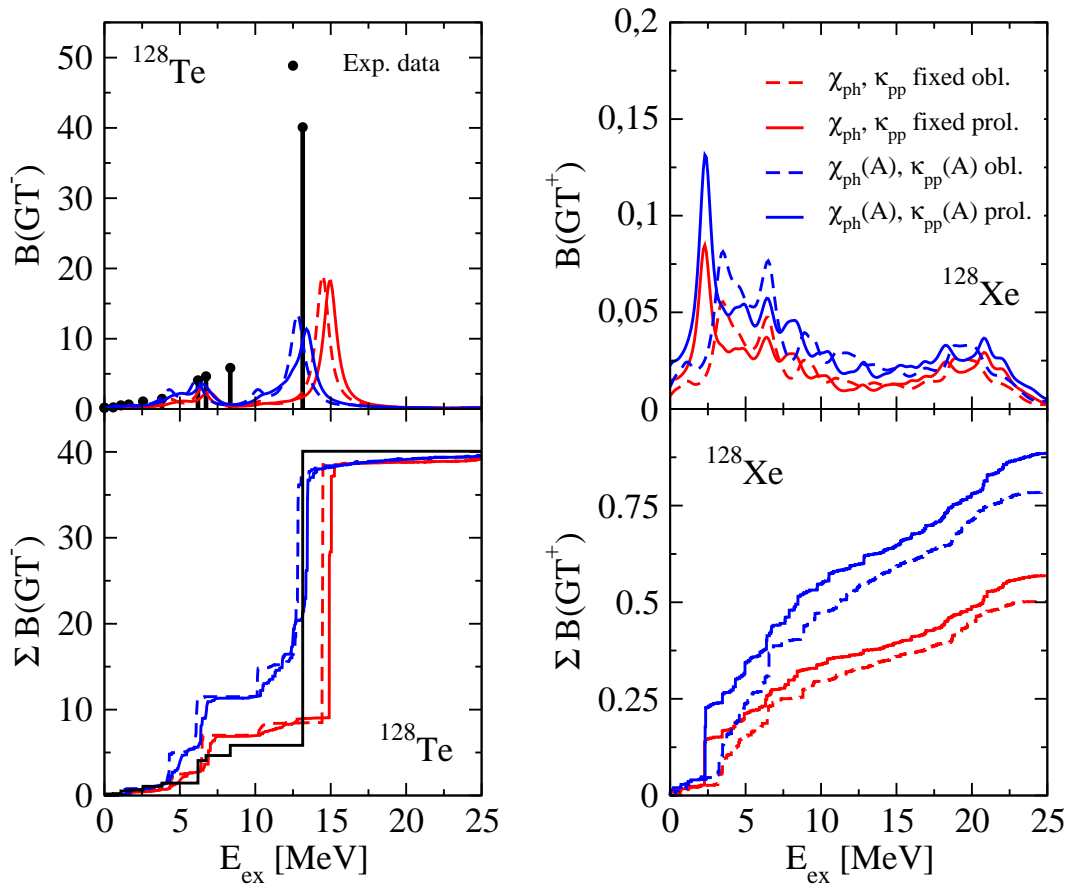


Figura 4.11: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{128}\text{Te}$  y  $^{128}\text{Xe}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Mad89]

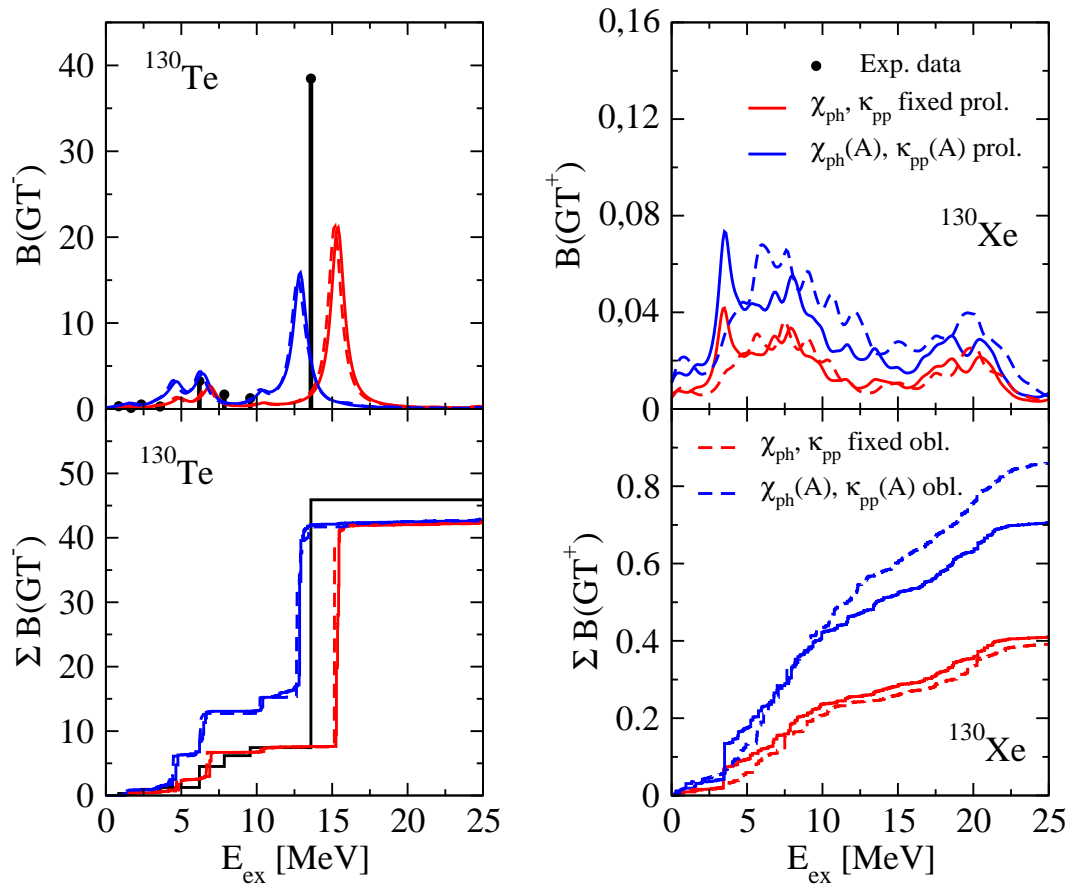


Figura 4.12: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{130}\text{Te}$  y  $^{130}\text{Xe}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Mad89]

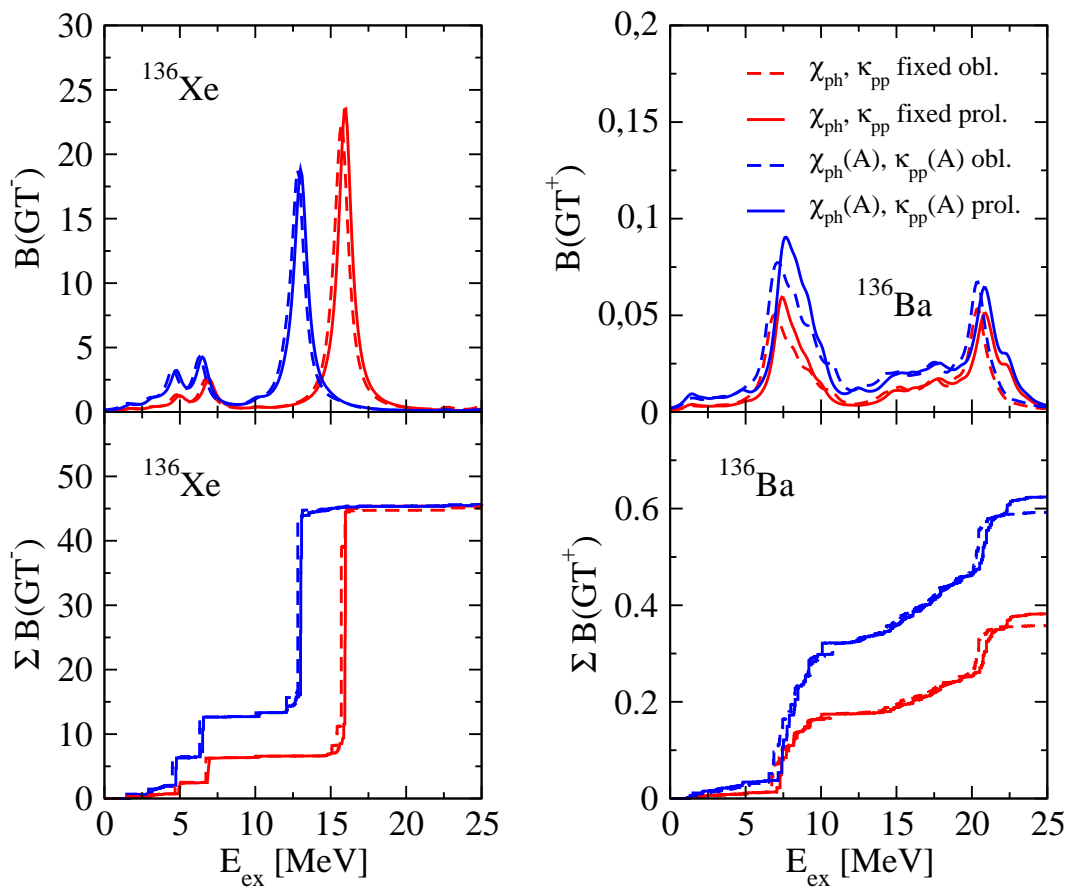


Figura 4.13: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{136}\text{Xe}$  y  $^{136}\text{Ba}$ .

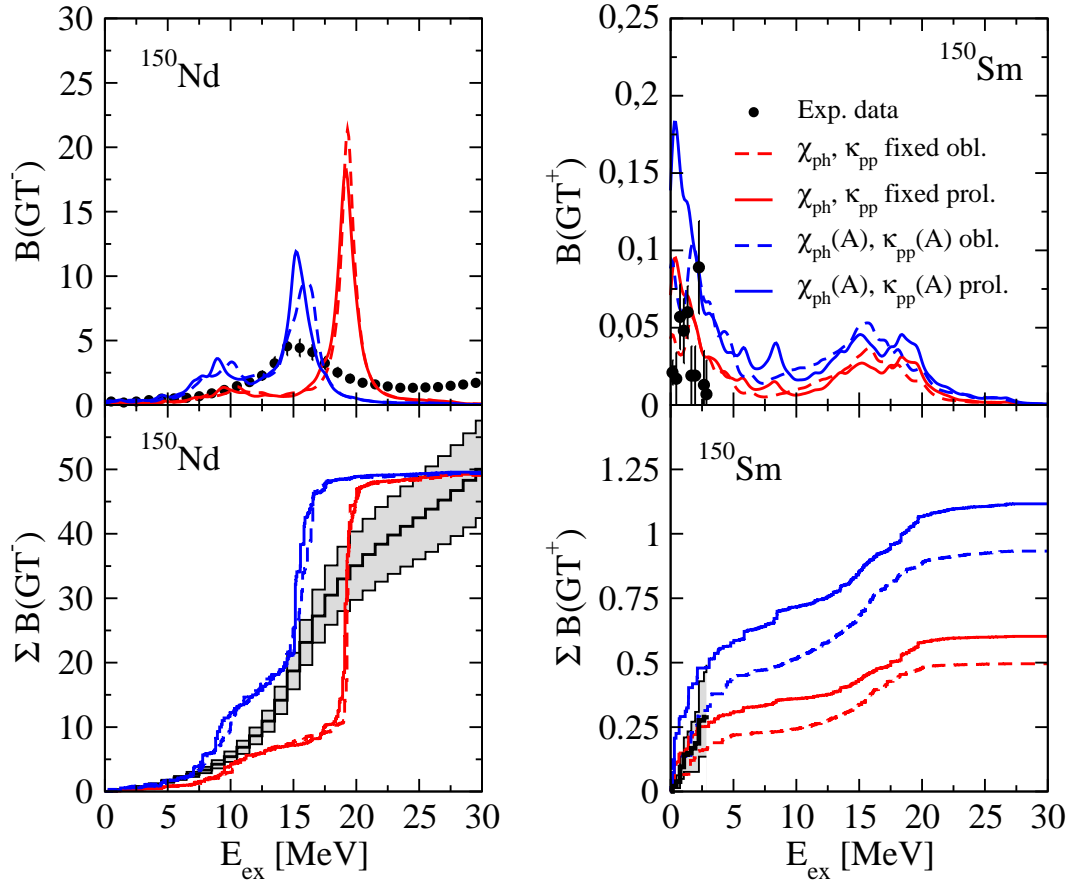


Figura 4.14: Lo mismo que en la figura 4.5 para los núcleos  $^{150}\text{Nd}$  y  $^{150}\text{Sm}$ . Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Gue11]

A la vista de estas figuras podemos concluir que:

- En general la distribución  $B(GT^-)$  del núcleo padre es mucho mayor que  $B(GT^+)$  del núcleo hijo. Esto es compatible con la regla de suma de Ikeda por la cual

$$B(GT^-) - B(GT^+) = 3(N - Z) \quad (4.2)$$

- En el caso de las distribuciones  $B(GT^-)$ , obtenidas mediante reacciones tipo  $(p, n)$  se describe muy bien la intensidad total GT, coincidiendo casi por completo con la información experimental.
- La posición de la resonancia gigante se ajusta muy bien a los datos experimentales usando el valor de la intensidad  $\chi_{ph}^{GT} = 11/A$ , especial-

mente para los núcleos más pesados ( $A=100, 116, 128, 130$  y  $150$ ). El valor fijo  $\chi_{ph}^{GT} = 0,15$  por su parte no satisface tan bien dicha posición.

- Se observa que el principal efecto de incrementar (disminuir) la intensidad  $\chi_{ph}^{GT}$  es un desplazamiento de la distribución hacia energías mayores (menores), acompañado por una ligera reducción de la misma. Esta reducción se aprecia con mayor claridad en el caso de  $B(GT^+)$ .
- También se aprecia que con las deformaciones de equilibrio que se obtenían en las gráficas 4.1-4.4 logramos unas distribuciones que se ajustan satisfactoriamente a los datos experimentales.

Cabe destacar que con un ajuste local se podría mejorar tanto la posición de la resonancia gigante como la distribución total GT de cada núcleo. Sin embargo ese no es nuestro propósito, ya que lo que buscamos es conseguir una descripción conjunta de los núcleos desde  $A=40$  hasta  $A=150$ .

En conclusión, somos capaces de describir mediante un formalismo único (en el sentido en que se usa la misma fuerza de Skyrme y las mismas constantes de acoplo residual  $\chi_{ph}(A)$  y  $\kappa_{pp}(A)$  para todos los núcleos considerados) tanto la intensidad total de la distribución como la posición de la resonancia gigante Gamow-Teller.

### 4.1.3. Distribuciones $B(GT)$ a bajas energías

Desafortunadamente, las medidas que se extraen de las reacciones de tipo  $(p, n)$  o  $(n, p)$  tienen muy poca resolución a bajas energías ( $\sim 1$  MeV), con lo que realizar espectroscopía de los estados cercanos al estado fundamental se convierte en un verdadero problema. Con el uso de reacciones más complejas, como  $(^3He, t)$  o  $(t, ^3He)$  y  $(^2He, d)$  o  $(d, ^2He)$  se han conseguido resoluciones de hasta 110-300 keV.

Así, con los datos experimentales obtenidos de estas reacciones, podemos repetir el procedimiento anterior, con el fin de observar si nuestro modelo teórico se ajusta bien a bajas energías. En este caso trabajamos únicamente con los valores de las constantes de acoplamiento  $\chi_{ph} = 11/A$  y  $\kappa_{pp} = 2/A$ , ya que como hemos visto, reproducen mejor la posición de la resonancia GTR.

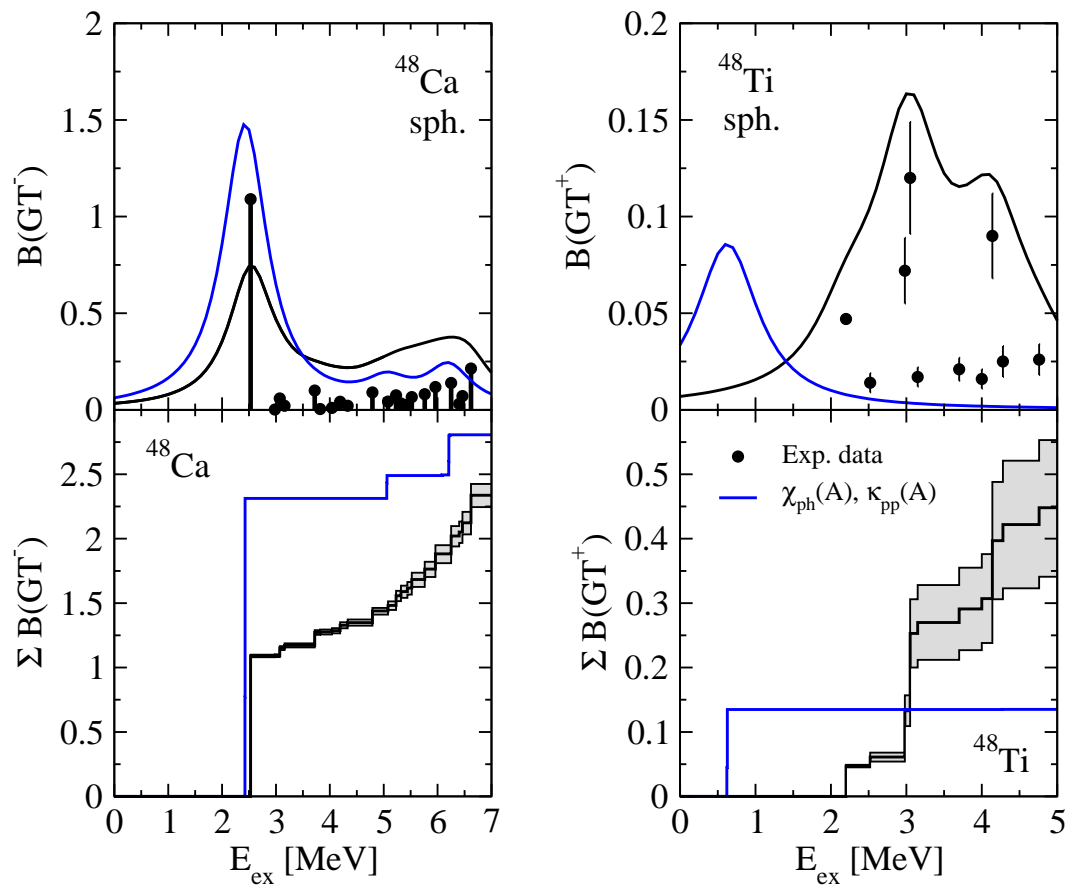


Figura 4.15: Lo mismo que la figura 4.5 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Gre07] para el  $^{48}\text{Ca}$  y de [Rak04] para el  $^{48}\text{Ti}$

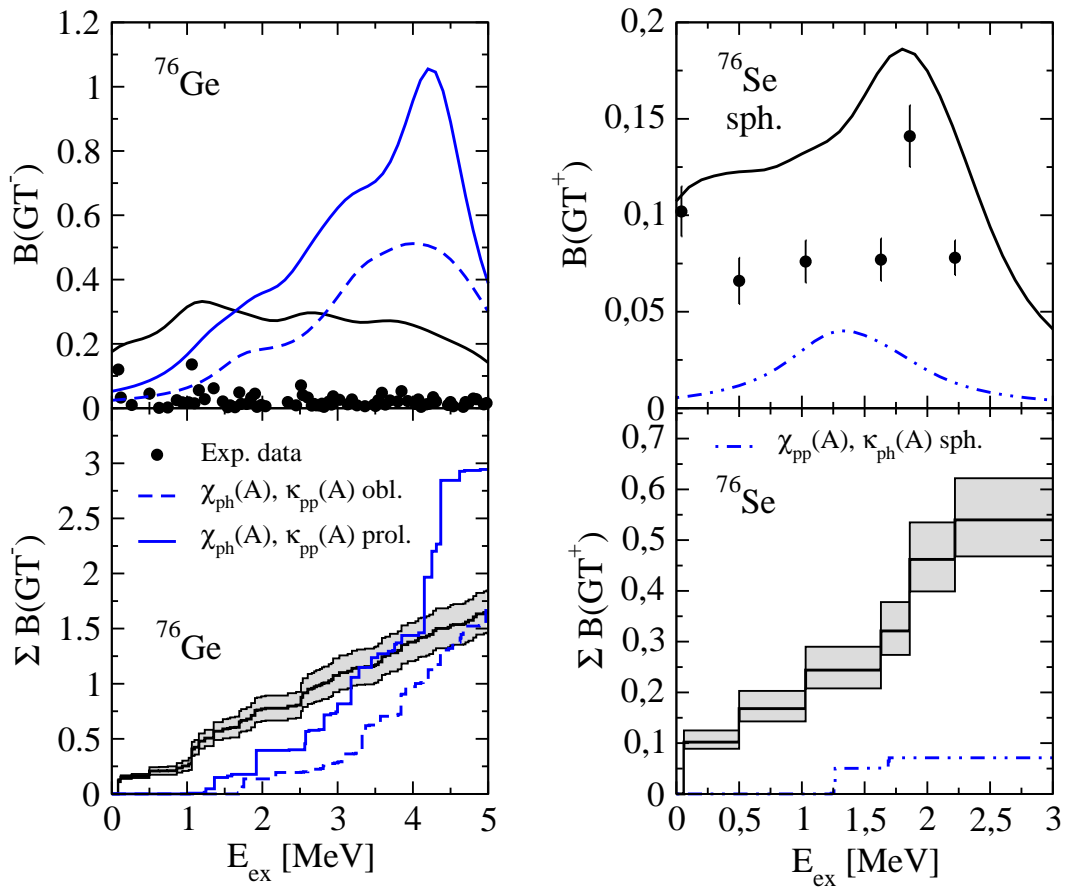


Figura 4.16: Lo mismo que la figura 4.6 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Thi12a] para el  $^{76}\text{Ge}$  y de [Gre08] para el  $^{76}\text{Se}$

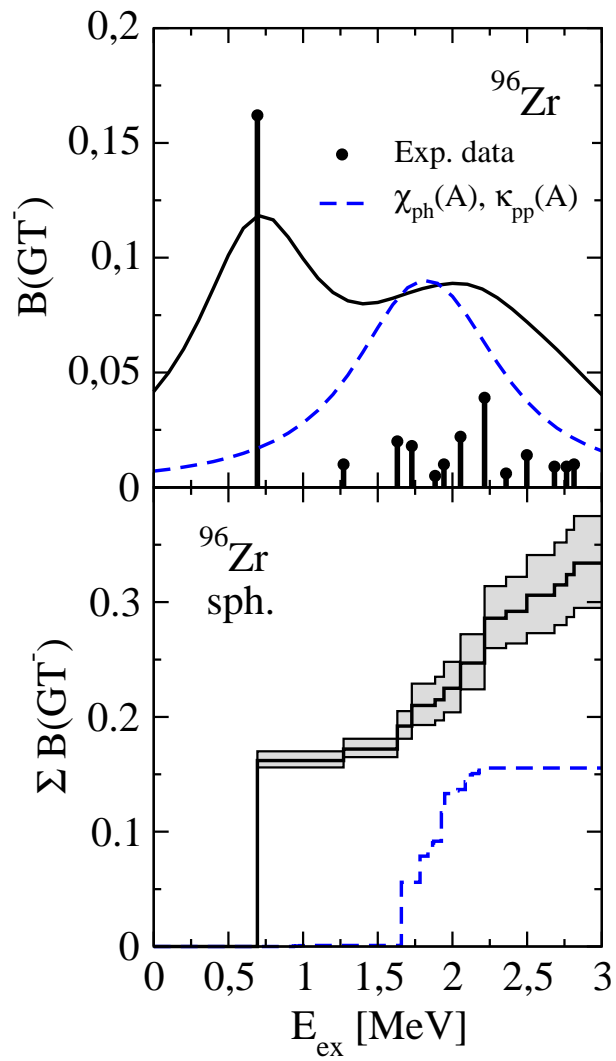


Figura 4.17: Lo mismo que la figura 4.8 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Thi12b]



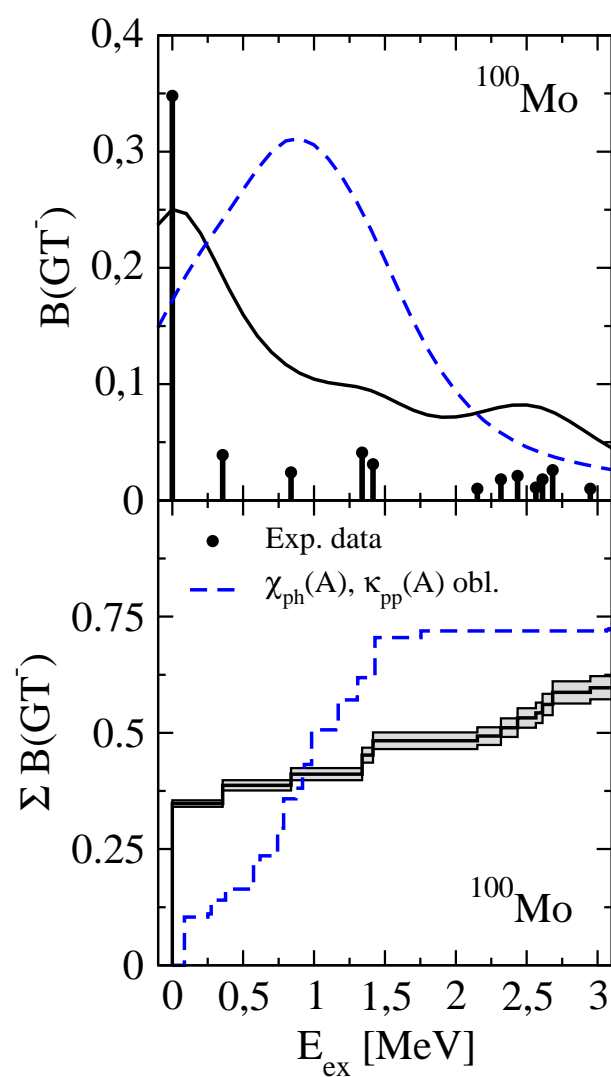


Figura 4.18: Lo mismo que la figura 4.9 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Thi12c]

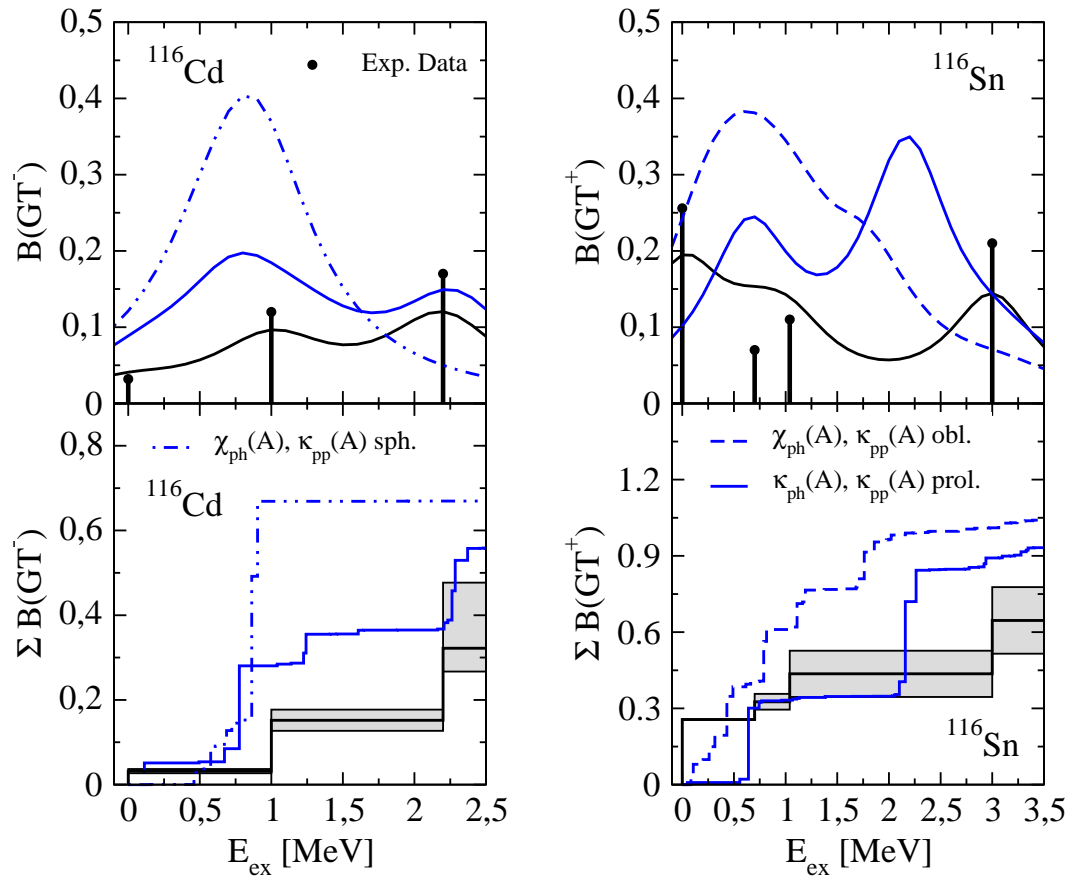


Figura 4.19: Lo mismo que la figura 4.10 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Aki97] para el  $^{116}\text{Cd}$  y de [Rak05] para el  $^{116}\text{Sn}$

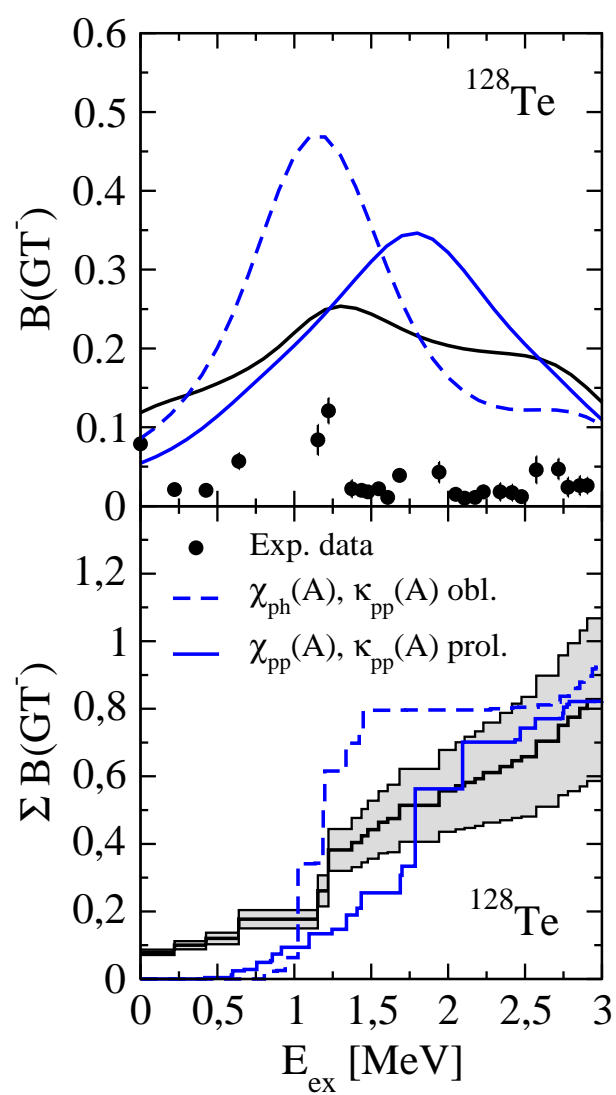


Figura 4.20: Lo mismo que la figura 4.11 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Pup12]

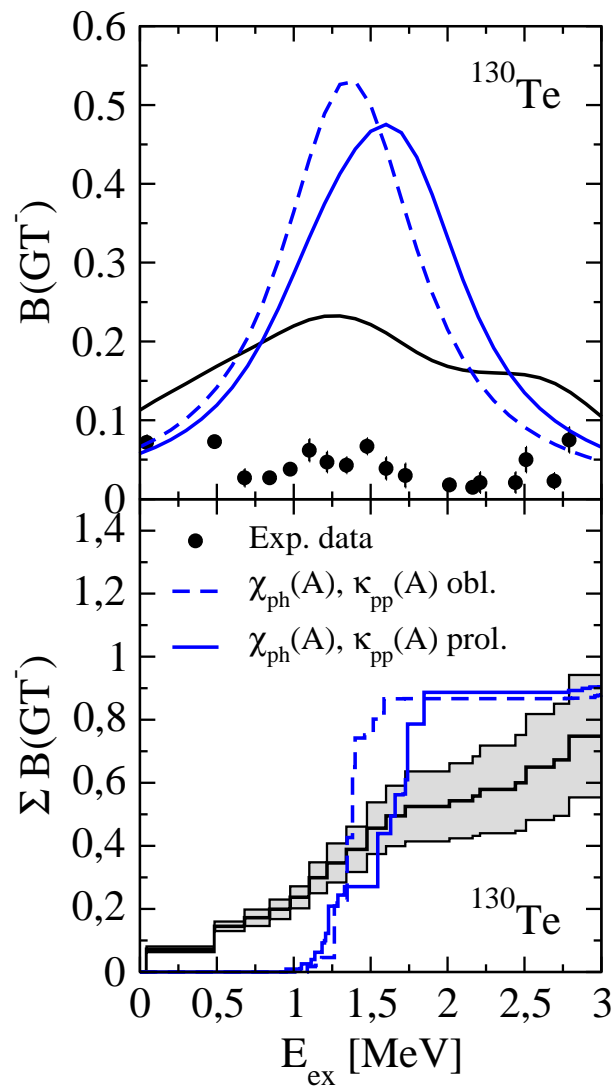


Figura 4.21: Lo mismo que la figura 4.12 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Pup12]

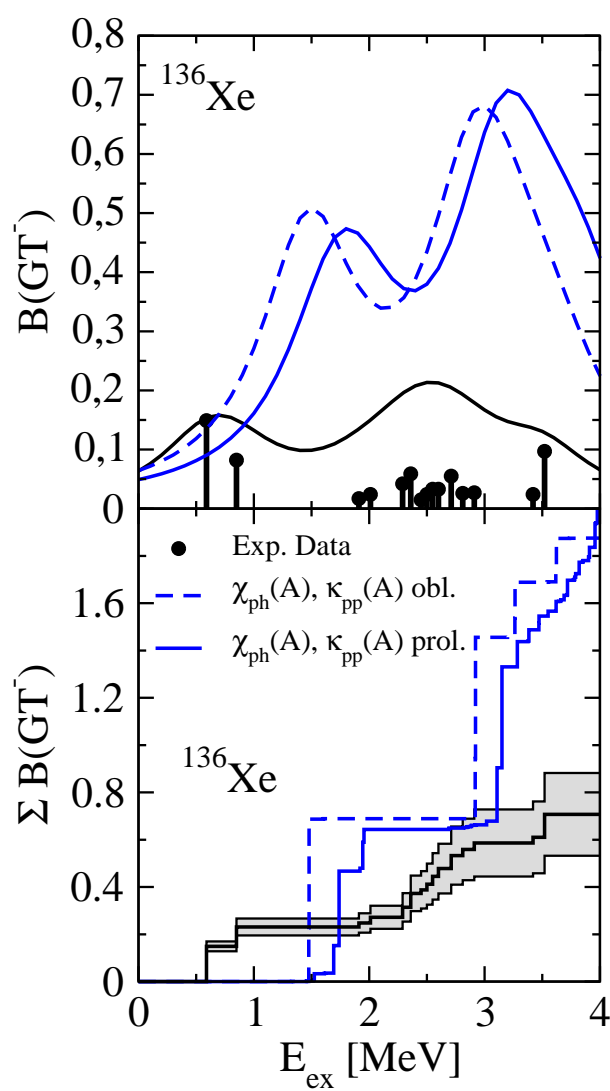


Figura 4.22: Lo mismo que la figura 4.13 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Pup11]

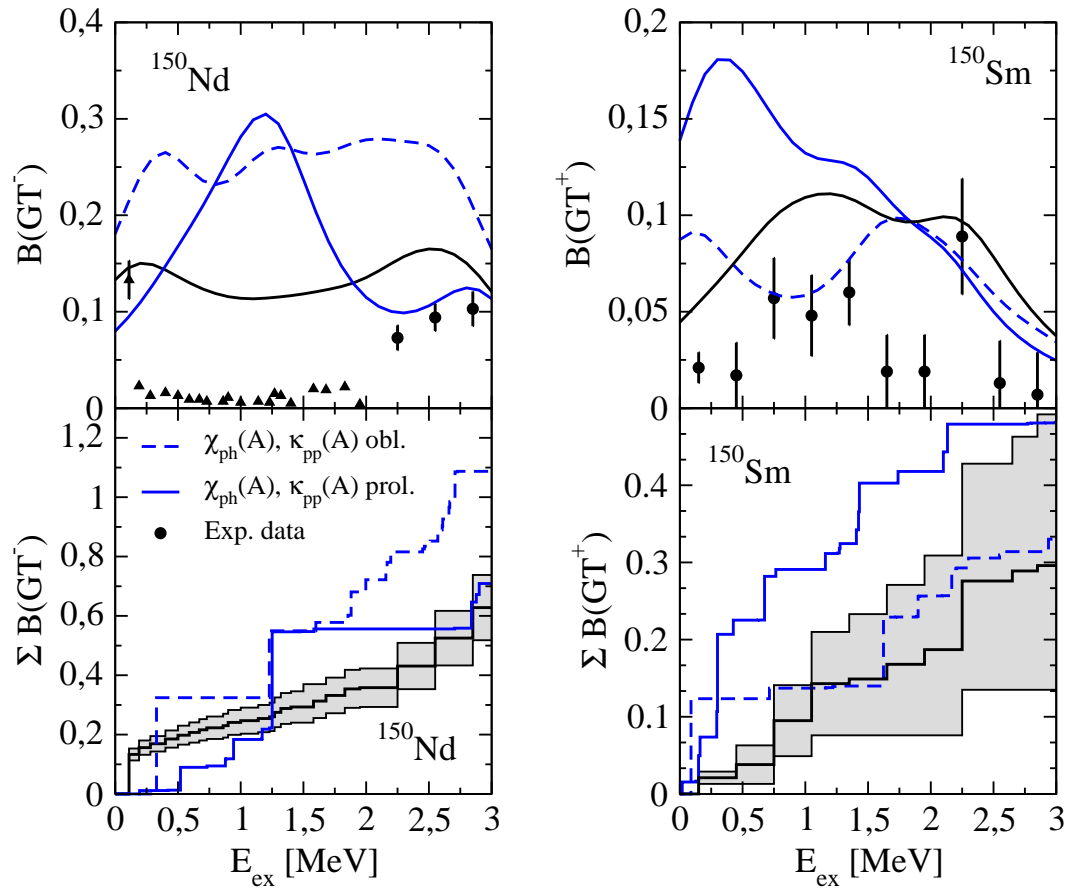


Figura 4.23: Lo mismo que la figura 4.14 para bajas energías de excitación. Los datos experimentales se han obtenido de la referencia [Gue11]

Tras el estudio de estas figuras podemos concluir que en general no se consigue una buena descripción de la distribución GT a bajas energías. Pero a pesar de que no somos capaces de realizar una espectroscopía detallada, en la mayoría de los casos la intensidad total contenida en el rango de bajas energías se reproduce aceptablemente. Esto es así especialmente en los casos de  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{116}\text{Sn}$ ,  $^{128}\text{Te}$ ,  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{150}\text{Nd}$  y  $^{150}\text{Sm}$ .

#### 4.1.4. Papel de los parámetros de cálculo

Para observar la dependencia de resultados frente a los diferentes parámetros de cálculo utilizados, tales como las posibles deformaciones de los núcleos, el tipo de fuerza de Skyrme utilizada o la fuerza residual, vamos a centrarnos únicamente en dos pares de núcleos, los correspondientes al número másico  $A = 116$  y  $A = 150$ , para los que existen datos experimentales en ambas parejas de núcleos y no han sido suficientemente analizados hasta ahora.

Como se ha visto en las figuras 4.5-4.14, la deformación juega un papel importante en las distribuciones de intensidad. En primer lugar, la deformación rompe la degeneración de las capas esféricas, con lo que las distribuciones GT correspondientes a núcleos deformados estarán mucho más fragmentadas que las esféricas, como puede verse si comparamos por ejemplo las figuras 4.5 y 4.14. Además el carácter prolado y oblado de la forma nuclear puede llevar en algunos casos a perfiles similares de intensidad, como ocurre en los núcleos con  $A=82$  (figura 4.7), o a diferencias notables entre las distribuciones de intensidad, como sucede en los isótopos del kriptón [SME98]. De esta manera podemos obtener información de la forma de un núcleo analizando solo la estructura de la desintegración beta.

Como ya se ha comentado antes, la interacción residual tiende a reducir la intensidad. Esto se puede comprobar en las figuras 4.24 y 4.25 para los núcleos  $^{150}\text{Nd}$  y  $^{116}\text{Cd}$  con diferentes valores de la fuerza de acoplamiento  $\chi_{ph}^{GT}$  y  $\kappa_{pp}^{GT}$  de la interacción  $V_{GT}$ .

En el panel de la izquierda se muestra la dependencia de las distribuciones de intensidad GT con la constante de acoplo  $\chi_{ph}^{GT}$  para un valor fijo de la constante  $\kappa_{pp}^{GT} = 2/A$ . Así observamos que el principal efecto de incrementar la intensidad de  $\chi_{ph}^{GT}$  es un desplazamiento de la distribución hacia energías mayores, acompañado de una ligera reducción de la misma. Con lo que podemos concluir que esta constante juega un papel importante a la hora de reproducir la resonancia gigante de estos núcleos. Esto se puede ver de manera aún mas clara en la figura 4.14, donde se pasa de un valor de  $\chi_{ph}^{GT} = 0,15$  a  $\chi_{ph}^{GT} = 0,07$

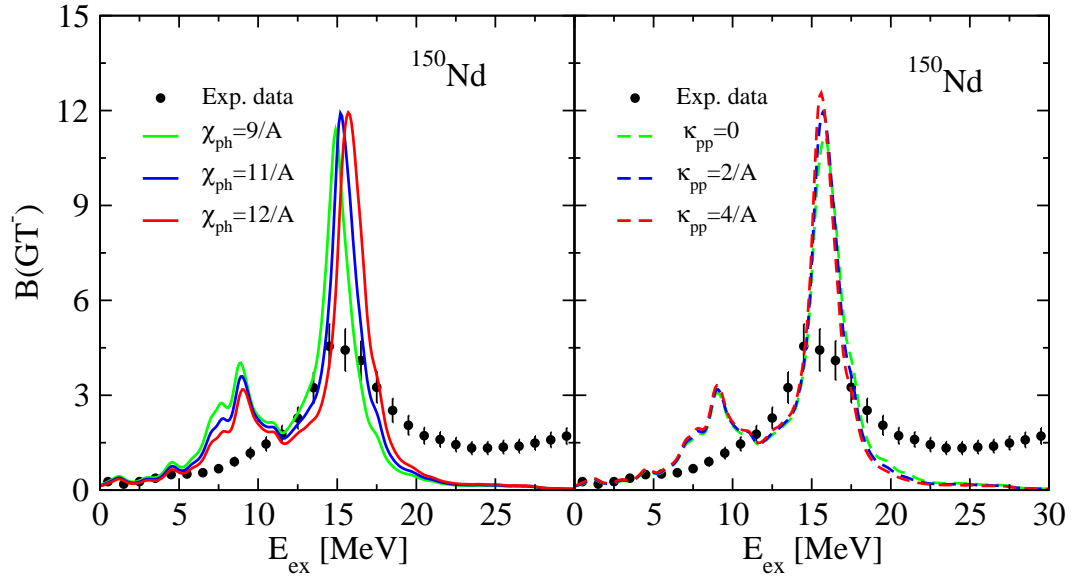


Figura 4.24: Distribuciones de intensidad Gamow-Teller en  $^{150}\text{Nd}$  para diversas intensidades de las fuerza residuales  $\chi_{ph}$  (izquierda) y  $\kappa_{pp}$  (derecha).

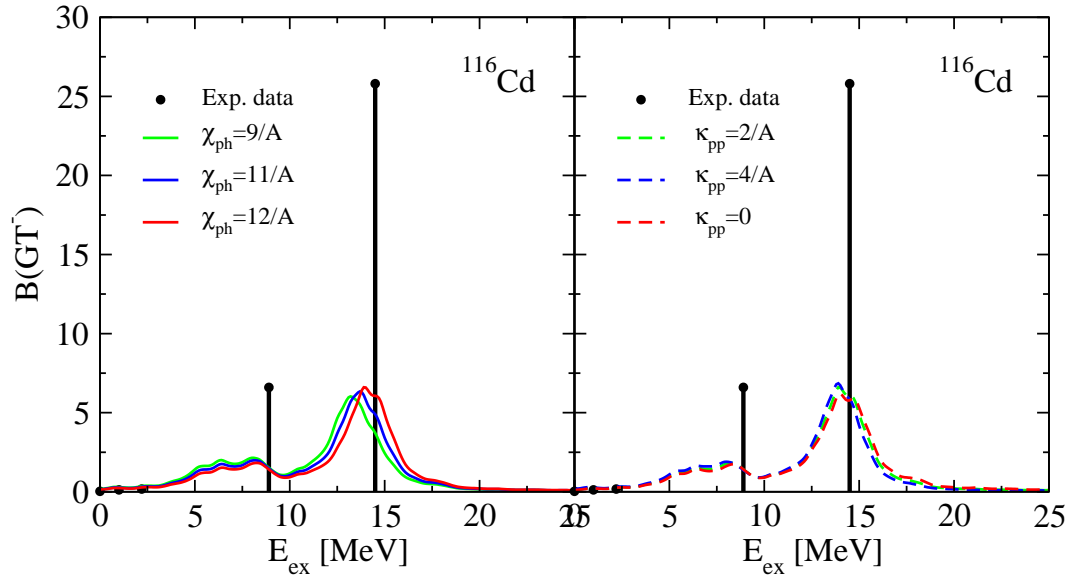


Figura 4.25: Lo mismo que la figura 4.24 en  $^{116}\text{Cd}$ .

Sin embargo el pico de la GTR es casi insensible a la variación de la constante de acoplamiento  $\kappa_{pp}^{GT}$ ; en el panel de la derecha de ambos núcleos



se muestran las distribuciones de intensidad GT para un valor constante de  $\chi_{ph}^{GT} = 12/A$  MeV y para diversos valores de  $\kappa_{pp}^{GT}$ . Observamos que la posición de la resonancia no varía de forma apreciable, pero más adelante veremos que sí lo harán las vidas medias de los procesos  $2\nu\beta\beta$ .

La reducción de la distribución a medida que se incrementa  $\chi_{ph}^{GT}$  también se observa a bajas energías, como se muestra en la figura 4.26.

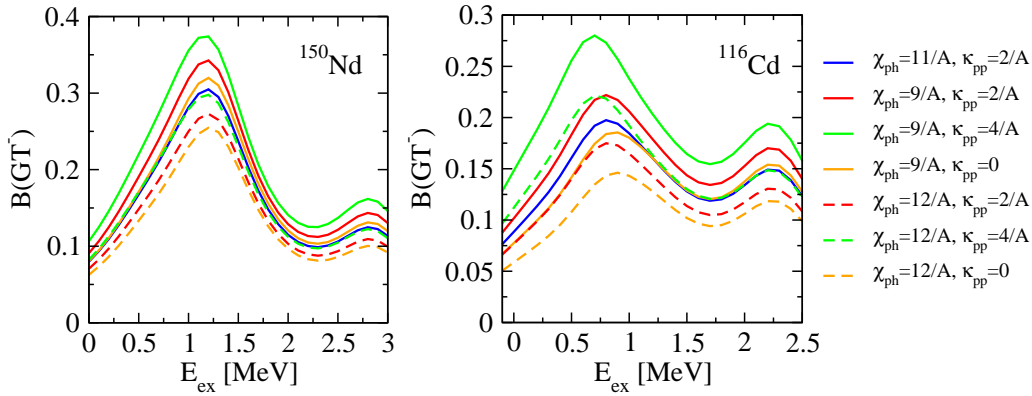


Figura 4.26: Lo mismo que las figuras 4.24 y 4.25 a bajas energías.

Otro aspecto interesante es comprobar el efecto que tiene la interacción de Skyrme sobre las distribuciones de intensidad. Para ello comparamos las figuras 4.14 y 4.10, donde se ha empleado la fuerza de Skyrme SLy4 en los cálculos, con las figuras 4.27 y 4.28, donde se ha empleado la fuerza SG2.

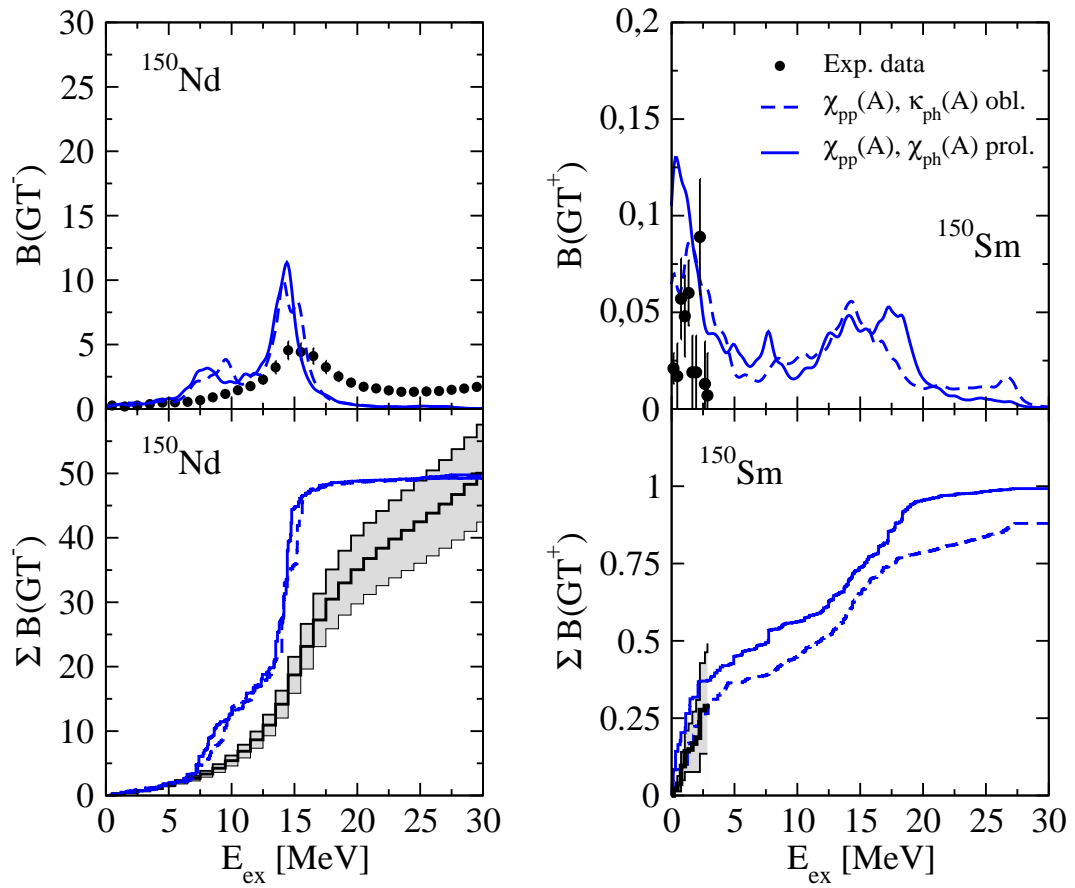


Figura 4.27: Lo mismo que en la figura 4.14 para una fuerza de Skyrme SG2 y constantes de acoplamiento  $\chi_{ph} = 11/A$  y  $\kappa_{pp} = 2/A$

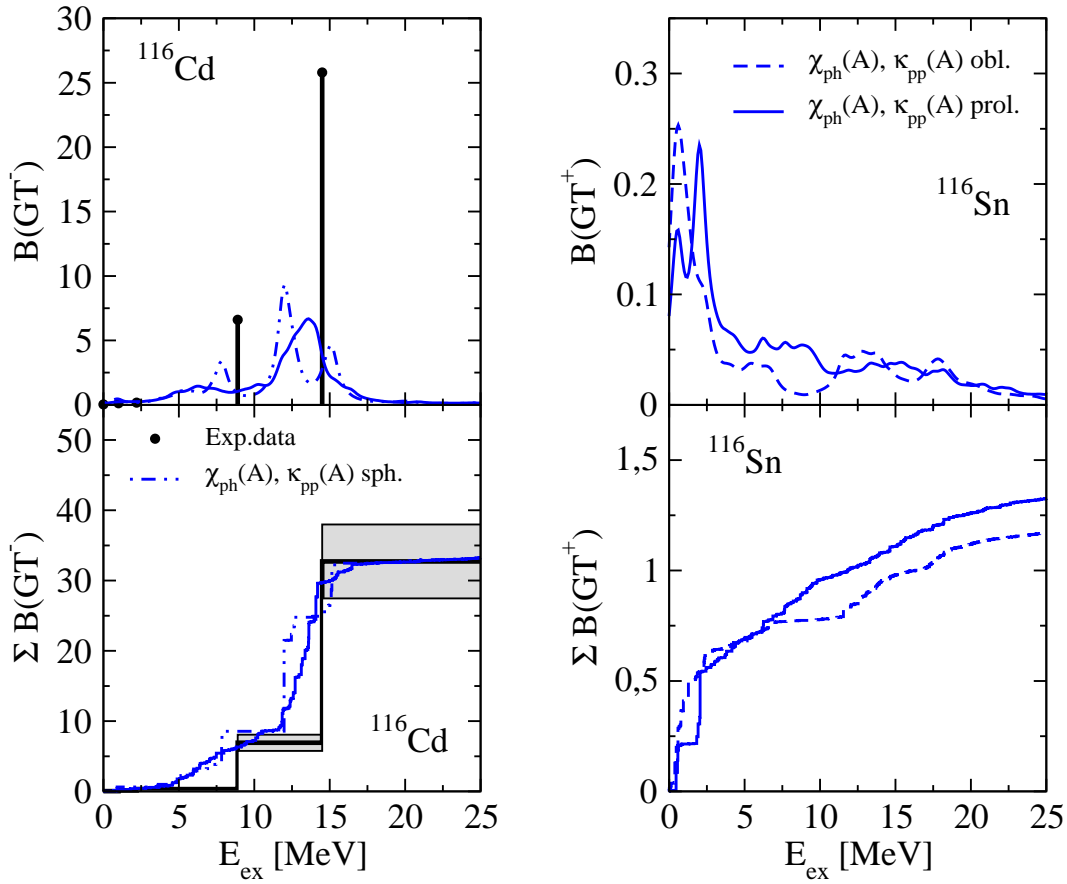


Figura 4.28: Lo mismo que en la figura 4.10 para una fuerza de Skyrme SG2 y constantes de acoplamiento  $\chi_{ph} = 11/A$  y  $\kappa_{pp} = 2/A$

Puede verse como, aunque el patrón de la distribución de intensidad GT sea el mismo que en las figuras anteriores, se encuentra ligeramente desplazado hacia energías menores, con lo que necesitaríamos un valor mayor de  $\chi_{ph}$  para reproducir la posición de la resonancia gigante.

## 4.2. Elementos de matriz doble beta

En esta sección analizaremos el efecto de la deformación nuclear sobre la doble desintegración beta con emisión de neutrinos, así como el efecto de las interacciones residuales. Para ello, estudiaremos los elementos de matriz  $2\nu\beta\beta$  para la desintegración de los núcleos  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$  y  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$  y los compararemos con los que se extraen a partir de las vidas medias de [Bar06].

Comenzaremos por estudiar la sensibilidad a la deformación de los núcleos padre e hijo de los elementos de matriz de estructura nuclear  $M_{GT}^{2\nu}$ . En la figura 4.29 se representa el elemento de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  como función de la energía de excitación máxima considerada en el núcleo intermedio virtual para distintas deformaciones del padre y del hijo en el caso de  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ . Los cálculos se han llevado a cabo utilizando los valores de la tabla 4.2. Así mismo, se muestran en la figura los valores experimentales de  $M_{GT}^{2\nu}$  (regiones grises) obtenidos a partir de las vidas medias experimentales de la referencia [Bar06]. A partir de las vidas medias y los correspondientes valores cinemáticos  $G^{2\nu}$  (3.25), obtenemos dos valores experimentales que se corresponden con los límites superior e inferior de la región en gris: en uno de ellos suponemos de la constante de acoplo axial es  $g_A/g_V = 1,25$  y en el otro  $g_A/g_V = 1$ .

Tabla 4.2: Valores de los parámetros de gap para protones y neutrones  $\Delta n$  y  $\Delta p$  (MeV), parámetros b y q, deformación del estado fundamental  $\beta$  y constantes de acoplo de la interacción residual  $\chi_{ph}$  y  $\kappa_{pp}$  para la desintegración  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ .

Deformación	Núcleo	$\Delta n$	$\Delta p$	b	q	$\beta$	$\chi_{ph}[\text{MeV}]$	$\kappa_{pp}[\text{MeV}]$
Prolada	$^{150}\text{Nd}$	1.1	1.2	0.5	1.2	0.25	0.07	0.013
	$^{150}\text{Sm}$	1.2	1.4			0.19		
Oblada	$^{150}\text{Nd}$	1.1	1.2	0.5	0.8	-0.18	0.07	0.013
	$^{150}\text{Sm}$	1.2	1.4			-0.14		
Esférica	$^{150}\text{Nd}$	1.1	1.2	0.5	1.0	0.02	0.07	0.013
	$^{150}\text{Sm}$	1.2	1.4			0		

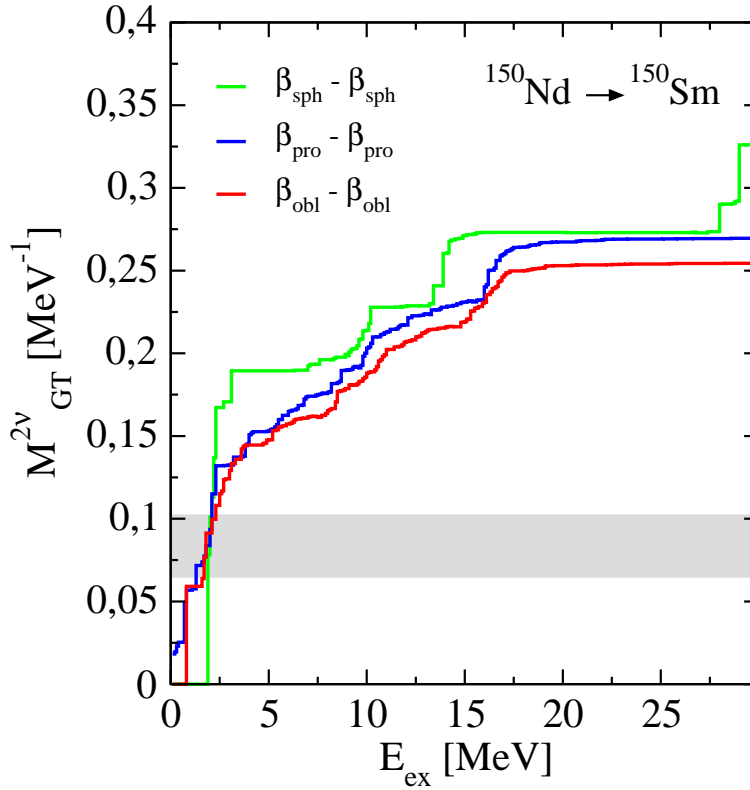


Figura 4.29: Elementos de matriz nucleares de la doble desintegración beta del núcleo  $^{150}\text{Nd}$  para varias deformaciones del padre y del hijo en función de la energía de excitación máxima considerada en el núcleo intermedio virtual.

Como vemos en la figura 4.29, nuestros valores teóricos se diferencian de los obtenidos a partir de las vidas medias en un factor 2-3. Puesto que a la vista de la figura 4.4, la deformación en el equilibrio es la prolada tanto en el núcleo  $^{150}\text{Nd}$  como en el  $^{150}\text{Sm}$ , en adelante solo consideraremos dicha aproximación.

A continuación vamos a evaluar los elementos de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  en función de la intensidad partícula-partícula  $\kappa_{pp}$ . Como se ve en la figura 4.30, con una deformación prolada de ambos núcleos, se necesitaría una constante  $\kappa_{pp} \approx 0,06$  para reproducir correctamente el valor experimental.

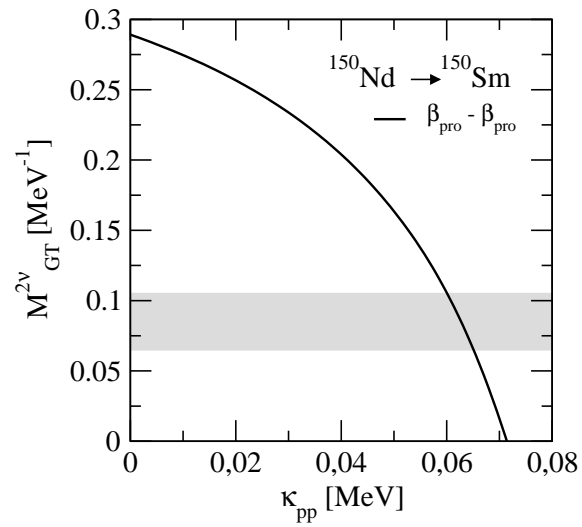


Figura 4.30: Elementos de matriz de doble desintegración beta para el núcleo  $^{150}\text{Nd}$  en función de la interacción residual  $\kappa_{pp}$ .

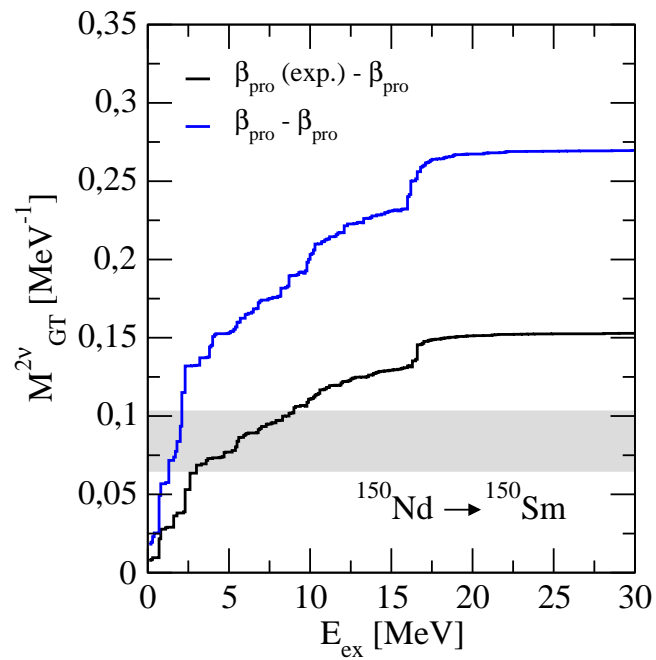


Figura 4.31: Elementos de matriz de doble desintegración beta para el núcleo  $^{150}\text{Nd}$  con una deformación experimental  $\beta = 0,285$  en función de la energía de excitación máxima considerada en el núcleo intermedio virtual.

Para apreciar aun más la sensibilidad de los elementos de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  frente a la deformación nuclear, vemos en la figura 4.31 que utilizando una deformación nuclear para el núcleo  $^{150}\text{Nd}$  ligeramente distinta de la utilizada,  $\beta_{Nd} = 0,247$ , se consigue variar considerablemente estos elementos. Con el valor experimental  $\beta_{Nd}(\text{exp}) = 0,285$  [Ram87] se consigue una mejora sustancial de nuestro resultado anterior.

Con el fin de ilustrar mejor el efecto de la deformación en los elementos de matriz, estudiamos la desintegración doble beta del núcleo  $^{116}\text{Cd}$  (figura 4.32). Así pues, hay que tener en cuenta que ahora no tenemos una deformación en el equilibrio tan clara como con el núcleo anterior, tal y como podía verse en la figura 4.2. Las deformaciones consideradas pueden verse en la tabla 4.3.

Tabla 4.3: Valores de los parámetros de gap para protones y neutrones  $\Delta n$  y  $\Delta p$  (MeV), parámetros b y q, deformación del estado fundamental  $\beta$  y constantes de acoplo de la interacción residual  $\chi_{ph}$  y  $\kappa_{pp}$  para la desintegración  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ .

Deformación	Núcleo	$\Delta n$	$\Delta p$	b	q	$\beta$	$\chi_{ph}[\text{MeV}]$	$\kappa_{pp}[\text{MeV}]$
Prolada	$^{116}\text{Cd}$	1.4	1.5	0.45	1.4	0.18	0.09	0.017
	$^{116}\text{Sn}$	1.2	1.8			0.24		
Oblada	$^{116}\text{Cd}$	1.4	1.5	0.45	0.8	-0.10	0.09	0.017
	$^{116}\text{Sn}$	1.2	1.8			-0.14		
Esférica	$^{116}\text{Cd}$	1.4	1.5	0.45	1.0	-0.02	0.09	0.017
	$^{150}\text{Sn}$	1.2	1.8			0		
Prolada	$^{116}\text{Cd}$	1.4	1.5	0.45	1.4	0.18	0.09	0.017
Esférica	$^{116}\text{Sn}$	1.2	1.8			0		
Oblada	$^{116}\text{Cd}$	1.4	1.5	0.45	0.8	-0.10	0.09	0.017
Esférica	$^{116}\text{Sn}$	1.2	1.8			0		
Esférica	$^{116}\text{Cd}$	1.4	1.5	0.45	0.8	0	0.09	0.017
Oblada	$^{116}\text{Sn}$	1.2	1.8			-0.14		
Esférica	$^{116}\text{Cd}$	1.4	1.5	0.45	1.4	0	0.09	0.017
Prolada	$^{116}\text{Sn}$	1.2	1.8			0.24		

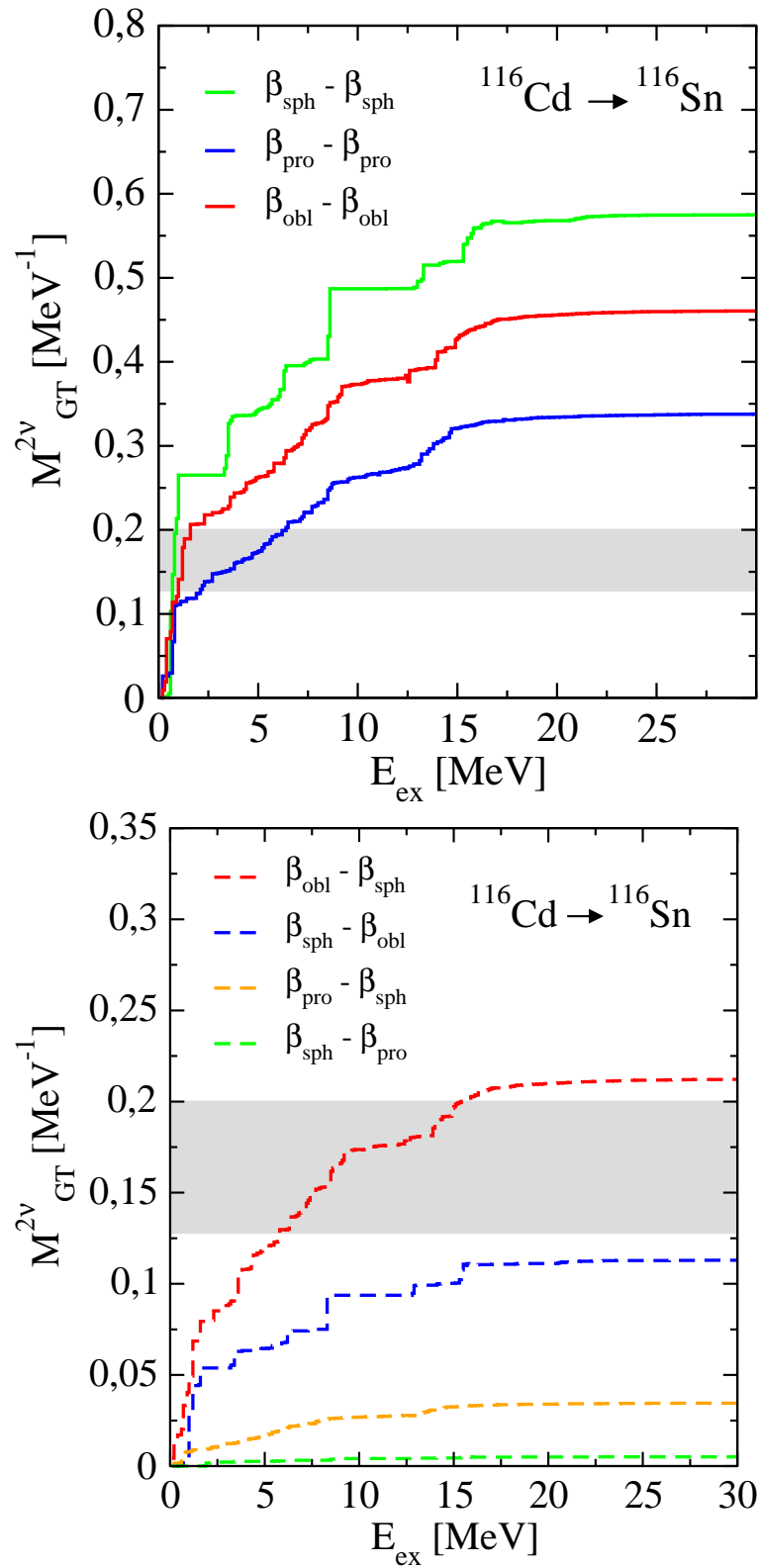


Figura 4.32: Elementos de matriz de doble desintegración beta para el núcleo  $^{116}\text{Cd}$  en función de las deformaciones del padre y del hijo.



En general podemos decir que una deformación similar de los núcleos padre e hijo produce elementos de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  sobreestimados, especialmente cuando en ambos núcleos predomina la deformación oblada. Al considerar deformaciones distintas (compatibles con la deformación consistente), estos elementos sufren una drástica reducción. Los mejores resultados son los que se consiguen considerando una deformación oblada (esférica) en el núcleo padre y una deformación esférica (oblada) en el núcleo hijo. Observamos además que en la transición de padre esférico a hijo prolado, el elemento de matriz se reduce considerablemente comparado con los casos de esférico a esférico o prolado a prolado. En la referencia [Alv04] se estudia esta dependencia de las deformaciones, llegándose a la conclusión de que los elementos de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  toman los valores máximos cuando las deformaciones del padre y del hijo son aproximadamente iguales, y estos decrecen rápidamente al aumentar la diferencia entre la deformación del padre y la del hijo.



# Capítulo 5

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos estudiado las distribuciones de intensidad GT en las dos ramas  $GT^-$  y  $GT^+$  en procesos de doble desintegración beta, centrándonos en 10 parejas de núcleos confirmados como emisores doble beta:  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ ,  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ ,  $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ ,  $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$ ,  $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ ,  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ ,  $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$ ,  $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$ ,  $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$ ,  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ , así como los elementos de matriz de doble desintegración beta con emisión de dos neutrinos para los núcleos  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$  y  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ .

Hemos comenzado por exponer el método utilizado, basado en un campo medio Hartree-Fock axialmente deformado con fuerzas efectivas nucleón-nucleón de tipo Skyrme y con correlaciones de apareamiento en aproximación BCS. Mediante cálculos de HF con ligadura en la deformación se obtienen las energías correspondientes a las deformaciones cuadrupolares ( $\beta$ ) que pueden tener los núcleos considerados.

Una vez obtenida la descripción de la estructura nuclear para cada núcleo, tratamos las intensidades de las posibles transiciones de Gamow-Teller bajo una aproximación QRPA con correlaciones espín-isospín de tipo partícula-hueco y partícula-partícula. Mediante reacciones de intercambio de carga de tipo  $(p, n)$  o  $(^3\text{He}, t)$  se estudian los procesos  $GT^-$  que conectan el estado fundamental del núcleo padre ( $0^+$  al ser par-par) para una deformación de equilibrio dada con los estados excitados en el núcleo intermedio ( $1^+$  por las reglas de selección de transiciones GT). Mediante reacciones de tipo  $(n, p)$  o  $(t, ^3\text{He})$ , se estudian los procesos  $GT^+$  que conectan el estado fundamental del núcleo hijo  $0^+$  con los estados  $1^+$  del núcleo intermedio.

Una gran ventaja de este método es su amplia aplicabilidad tanto a núcleos esféricos como deformados a lo largo de la carta de núcleos. Los méritos

de esta aproximación son bien conocidos ([SMN96], [SMN97], [FQKV73], [VB72], [Vau73], [AW95], [BT75], [Bei75]...). Además mediante el procedimiento descrito, somos capaces de tratar tanto las excitaciones como el estado fundamental de forma autoconsistente y sin apenas parámetros libres. Esto nos proporciona mayor fiabilidad a la hora de estudiar núcleos alejados del valle de la estabilidad para los que no es posible tener un ajuste local de parámetros y es necesario usar extrapolaciones de ajustes a núcleos estables.

Los principales resultados obtenidos pueden resumirse como siguen:

Hemos comenzado estudiando la deformación del estado fundamental de los núcleos mencionados arriba. Se obtuvieron deformaciones próximas en energía para los núcleos  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{76}\text{Se}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{82}\text{Kr}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{116}\text{Sn}$ ,  $^{128,130}\text{Te}$ ,  $^{128,130}\text{Xe}$  y  $^{136}\text{Ba}$ , dando lugar a la posibilidad de coexistencia de forma en estos isótopos. En el caso de los núcleos  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ti}$  y  $^{96}\text{Mo}$  y  $^{136}\text{Xe}$ , se encontró una solución esférica. Por último, los núcleos  $^{100}\text{Ru}$ ,  $^{150}\text{Nd}$  y  $^{150}\text{Sm}$ , muestran una deformación prolada en su estado fundamental. Hemos comprobado además que estos resultados no dependen apenas de la interacción efectiva de Skyrme (Sk3, SG2 o SLy4) utilizada.

A continuación hemos analizado las distribuciones Gamow-Teller con el fin de contrastar nuestros resultados con los datos experimentales disponibles, obtenidos a partir de reacciones de intercambio de carga ( $n, p$ ) - ( $p, n$ ) en todo el rango energético y ( $^3\text{He}, t$ ) - ( $t, ^3\text{He}$ ) en el rango de bajas energías. Así mismo se ha visto cómo estas distribuciones de intensidad dependen significativamente de la deformación del núcleo. Se han considerado también diferentes valores de las constantes de acoplo de la interacción residual ( $\chi_{ph}$  y  $\kappa_{pp}$ ), con el objetivo de ver cómo varía la distribución GT, obteniéndose mayor afinidad con los valores experimentales en el caso de los valores dependientes del número másico, esto es,  $\chi_{ph} = 11/A$  MeV y  $\kappa_{pp} = 2/A$  MeV.

A partir de las distribuciones energéticas  $\text{GT}^-$  para los núcleos padre y  $\text{GT}^+$  para los núcleos hijo, hemos obtenido el elemento de matriz  $M_{GT}^{2\nu}$  de doble desintegración beta con emisión de dos neutrinos de  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$  y  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ . Lo primero que se ha observado es la gran dependencia del elemento de matriz con la diferencia de deformación entre los núcleos padre e hijo, obteniéndose valores máximos del elemento de matriz cuando ambas deformaciones son iguales. Lo segundo que se ha estudiado es, una vez fijada la deformación, la dependencia de  $M_{GT}^{2\nu}$  con la constante de acoplo de la interacción residual partícula-partícula  $\kappa_{pp}$ .

En conclusión, hemos sido capaces de reproducir las propiedades generales de las distribuciones de intensidad Gamow-Teller (intensidad total y posición de la resonancia) de los núcleos estudiados. Sin embargo las propiedades que implican espectroscopía en detalle (en especial a bajas energías) no están tan bien descritas. Hemos analizado la dependencia de los elementos de matriz nucleares  $M_{GT}^{2\nu}$  con la deformación nuclear y los parámetros de las fuerzas residuales, obteniendo un buen acuerdo con los datos experimentales para valores de estos parámetros dentro de los rangos esperados. Este resultado es un importante punto de partida para estudiar en un futuro la doble desintegración beta sin emisión de neutrinos, pieza clave para el análisis de la física más allá del Modelo Estándar.



# Bibliografía

- [Aki97] H. Akimune et al., Phys. Lett. B **394**, 23-28 (1997)
- [Alv04] R. Alvarez-Rodríguez et al., Phys. Rev. C **70**, 064309 (2004).
- [AS70] M. Abramovitz and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical functions*, Dover, (1970).
- [AW95] G. Audi et al., Chinese Phys. C **36**, 1157 (1995).
- [Bar06] A. S. Barabash, Czech. J. Phys. **56**, 437 (2006).
- [BB67] D. M. Brink and E. Boeker Nucl. Phys. **91**, 1 (1967).
- [BCS57] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** 1175-1204 (1957).
- [Bei75] M. Beiner e al., Nucl. Phys. A **238**, 29-69 (1975).
- [BET61] G. E. Beown, J. A. Evans and D. J. Thouless, Nucl. Phys. **24**, 285-303 (1961).
- [BM69] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, W. A. Benjamin, New York, (1969).
- [BT75] G. F. Bertsch and S. F. Tsai, Phys. Rep. **18**, 125-158 (1975).
- [Cha98] E. Chabanat et al., Nucl. Phys. A **635**, 231-256 (1198).
- [DPPS69] J. Damgaard, H. C. Pauli, V. V. Paskhevich and V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A **135**, 432 (1969).
- [Foc30] V. A. Fock, Zeitschrift für Physik, **61**, 126 (1930).
- [FQKV73] H. Flocard, P. Quentin A. K. Kerman and D. Vautherin, Nucl. Phys A **203**, 433-472 (1973).

- [FRG11] Y. Fujita, B. Rubio and W. Gelletly, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **66**, 549 (2011).
- [Fu39] W.H. Furry, *Phys. Rev.* **56** (1939).
- [Go75] D. Gogny, *Proceedings of the International Conference on Nuclear Selfconsistent Fields*, Trieste, (1975). G. Ripka and M. porneuf, Eds. North Holland, Amsterdam, 176, 209, 265, 266 (1975).
- [Goe35] M. Goeppert-Mayer, *Phys. Rev.* **48**, 512-516 (1935).
- [Gre07] E. W. Grewe et al., *Phys. Rev. C* **76**, 054307 (2007).
- [Gre08] E. W. Grewe et al., *Phys. Rev. C* **78**, 044301 (2008).
- [Gue11] C. J. Guess et al., *Phys. Rev. C* **83**, 064318 (2011).
- [Ha90] J. C. Hardy et al., *Nucl. Phys. A* **509**, 429-460 (1990).
- [Har28] D. R. Hartree, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **24**, 89 (1928).
- [Hel97] R. L. Helmer et al., *Phys. Rev. C* **55**, 2802-2810 (1997).
- [HS67] J. A. Halbleib and R. A. Sorensen, *Nucl. Phys. A* **98**, 542 (1967).
- [LM03] K. Langanke and G. Martínez-Pinedo, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 819 (2003).
- [Mad89] R. Madey et al., *Phys. Rev. C* **40**, 540-552 (1989).
- [Mo70] S. A. Moszkowski, *Phys. Rev.* **C2**, 176, 209 (1970).
- [MR90] P. Möller and J. Randrup, *Nucl. Phys. A* **514**, 1 (1990).
- [Mu92] K. Muto et al., *Z. Phys. A* **341**, 407-415 (1992).
- [Ost92] F. Osterfelder, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 491 (1992).
- [PS68] J. M. Pearson and G. Saunier, *Phys. Rev.* **173**, 991 (1968).
- [Pup12] P. Puppe et al., *Phys. Rev. C* **86**, 044603 (2012).
- [Pup11] P. Puppe et al., *Phys. Rev. C* **84**, 051305 (2011).
- [Rak04] S. Rakers et al., *Phys. Rev. C* **70**, 054302 (2004).
- [Rak05] S. Rakers et al., *Phys. Rev. C* **71**, 054313 (2005).



- [Ram87] S. Raman et al., *At. Data and Nucl. Data Tables* **36** (1987).
- [Ro68] D. J. Rowe, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 301 (1968).
- [Sar98] P. Sarriguren et al., *Nucl. Phys. A* **635**, 55-85 (1998).
- [Sar09] P. Sarriguren, *Phys. Rev. C* **79**, 044315 (2009).
- [Sar12] P. Sarriguren, *Phys. Rev. C* **86**, 034335 (2012).
- [SC98] J. Suhonen and O. Civitarese, *Phys. Rep.* **300**, 123-214 (1998).
- [SG81] N. van Giai and H. Sagawa, *Phys Lett. B* **106**, 379-382 (1981).
- [Sk59] T. H. R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1959).
- [Sk56] T. H. R. Skyrme, *Phyl. Mag.* **1**, 1043 (1956).
- [SME98] P. Sarriguren, E. Moya de Guerra and A. Escuderos, *Nucl. Phys. A* **658** (1998).
- [SME01] P. Sarriguren, E. Moya de Guerra and A. Escuderos, *Phys. Rev. C* **64**, 064306 (2001).
- [SMEC98] P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, A. Escuderos and A. C. Carrizo, *Nucl. Phys. A* **635**, 55 (1998).
- [SMN96] P. Sarriguren, E. Moya de Guerra and R. Nojarov. *Phys. Rev. C* **54**, 690 (1996).
- [SMN97] P. Sarriguren, E. Moya de Guerra and R. Nojarov. *Zeitschrift für Physik, A* **357**, 143 (1997).
- [SPF04] F. Simkovic, L. Pacearescu and A. Faessler, *Nucl. Phys. A* **733**, 321-350 (2004).
- [Thi12a] J. H. Thies et al., *Phys. Rev. C* **86**, 014304 (2012).
- [Thi12b] J. H. Thies et al., *Phys. Rev. C* **86**, 054323 (2012).
- [Thi12c] J. H. Thies et al., *Phys. Rev. C* **86**, 044309 (2012).
- [Vau73] D. Vauherin, *Phys. Rev. C* **7**, 296-313 (1973).
- [VB72] D. Vautherin and D. M. Brink, *Phys. Rev. C* **5**, 626-647 (1972).
- [WM74] W. H. Wilkinson and B. E. F. Macefield, *Nucl. Phys. A* **232**, 58-92 (1974).

[Yako09] K. Yako et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 012503 (2009).

[Zeg06] R. G. T. Zegers et al., Phys. Rev. C **74**, 024309 (2006).