



CAOS CUÁNTICO EN ESTADOS LIGADOS DEL NÚCLEO ^{208}Pb

Belén Monteagudo Godoy
Máster Interuniversitario de Física Nuclear

Septiembre 2016

TRABAJO DE FIN DE MASTER

Dirigido por Laura Muñoz Muñoz
Grupo de Física Nuclear (GFN)
Dpto. de Física Atómica, Molecular y Nuclear

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Índice

1. Introducción	3
2. Caos clásico	4
3. Caos Cuántico	5
3.1. Definición del caos cuántico	6
3.2. Límite semiclásico	6
3.3. Teoría de matrices aleatorias	8
3.4. Estadística espectral	11
3.4.1. Reescalado	12
3.4.2. Distribución de espaciamientos a primeros vecinos	13
4. Caos cuántico en núcleos	16
4.1. Manifestaciones del caos en núcleos	17
4.2. Importancia de la completitud del espectro	18
4.3. Reescalado: La densidad Nuclear	19
4.3.1. Fórmula de la temperatura constante	20
5. Análisis del espectro del ^{208}Pb	23
5.1. Descripción de los niveles	23
5.2. Reescalado	25
5.3. Distribución de espaciamientos	28
5.3.1. Espectro completo	28
5.3.2. Estados de paridad par e impar	30
5.3.3. Estados de paridad natural y no natural	30
6. Conclusiones	34
7. Agradecimientos	36

ABSTRACT

The spectral fluctuations of the complete experimental spectrum for the low lying levels of the ^{208}Pb nucleus are analyzed in this work. The experimental data consists of 151 identified states up to excitation energies of $E_x < 6.20$ MeV with no parity or spin misassignments and therefore a reliable statistical analysis of level fluctuations for the low lying levels of a single nucleus is possible for the first time. The nearest-neighbor spacing distribution (NNSD) shows that natural parity states have a very good agreement with the predictions of Random Matrix Theory (RMT) in contrast to results for unnatural parity states which are far from RMT behaviour. A quantitative measure of chaos is provided by the Brody parameter, w , which shows a definitive chaotic behaviour for natural parity states with $w = 0.85 \pm 0.02$ ($w \simeq 1$ points to a fully chaotic behaviour). The different behaviours for the natural and unnatural parity states is related to the strength of the residual interaction in the atomic nucleus that is much stronger for natural than for unnatural parity states.

En este trabajo se analizan las fluctuaciones espectrales del espectro completo para los niveles bajos de energía del núcleo ^{208}Pb . El conjunto de datos experimentales consiste en 151 estados identificados hasta una energía de $E_x < 6.20$ MeV con asignaciones muy precisas de paridad y espín, dando lugar por tanto, a un estudio estadístico fiable de las fluctuaciones espectrales para los niveles de baja energía de un solo núcleo por primera vez. La distribución de espaciamientos a primeros vecinos (NNSD) muestra que los estados de paridad natural concuerdan de manera satisfactoria con las predicciones de la Teoría de Matrices Aleatorias (RMT), a diferencia de los resultados obtenidos para los estados de paridad no natural, que se encuentran lejos de un comportamiento descrito por la RMT. A partir del parámetro de Brody, w , realizamos una estimación cuantitativa del caos. Para los estados de paridad natural obtenemos un valor de $w = 0.85 \pm 0.02$ ($w \simeq 1$ indica un comportamiento completamente caótico). La diferencia que encontramos entre los estados de paridad natural y no natural se relaciona con la intensidad de la interacción residual en el núcleo, que es mucho mayor para los estados de paridad natural.

1. Introducción

A pesar de ser una disciplina que lleva estudiándose desde hace más de 30 años, el caos cuántico no posee una definición clara. El caos clásico, por el contrario, posee una definición muy precisa y se ha desarrollado enormemente en este último siglo. Gracias al estudio del caos en los sistemas clásicos, el caos cuántico se empezó a desarrollar buscando la manifestación del caos clásico en sistemas cuánticos. Pero esto no es suficiente puesto que sólo es aplicable a sistemas que tienen un análogo clásico, generalmente, sistemas de un cuerpo, y no da una definición concreta a sistemas que carecen de él, como son los sistemas de muchos cuerpos como el núcleo. Mediante el estudio de sistemas cuánticos cuyo análogo clásico se conocía que era caótico, se determinó que las fluctuaciones espectrales poseían características universales que dependían sólo de si el sistema era caótico o regular (*conjetura BGS*), y podían ser descritas por una colectividad de matrices aleatorias. Así, la teoría de matrices aleatorias (RMT) se ha convertido en la herramienta fundamental en el estudio del caos cuántico, siendo aplicable tanto para sistemas con un análogo clásico como para sistemas sin él.

Dado que la RMT surgió en el seno de la física nuclear, el núcleo se ha convertido en el sistema paradigmático del estudio del caos cuántico. A partir de la conjetura BGS que relacionaba las predicciones de la RMT con el caos cuántico, el núcleo, dado su comportamiento complejo, se convirtió en uno de los sistemas más estudiados en la búsqueda de manifestaciones del caos cuántico. En contra de lo que intuitivamente se puede llegar a pensar, el caos no es exclusivo de sistemas de muchas partículas cuyo comportamiento es muy complejo de determinar. Los sistemas más “sencillos” también son susceptibles de exhibir un comportamiento totalmente caótico.

A partir de espectros teóricos calculados con modelos nucleares, se ha demostrado que ciertos núcleos exhiben un comportamiento caótico bajo ciertas condiciones. Sin embargo, debido a la falta de datos experimentales, no ha sido posible detectar aún el caos en el espectro de un único núcleo. En este trabajo, se analizarán por primera vez las fluctuaciones espectrales del núcleo ^{208}Pb a partir del espectro nuclear obtenido recientemente por Heusler *et al.* [1]. Este espectro es el único suficientemente largo y completo que permite el estudio del caos para los estados excitados cercanos al estado fundamental de un solo núcleo. Se analizará el comportamiento conjunto de todos los estados, así como las secuencias de estados de diferente paridad, con especial interés en las de paridad natural y no natural.

2. Caos clásico

En mecánica clásica, la evolución temporal de los sistemas queda bien definida a partir de un conjunto de condiciones iniciales gracias a las ecuaciones de movimiento de Hamilton. El número de constantes de movimiento determina la integrabilidad de estas ecuaciones y clasifica a los sistemas dinámicos en integrables o no integrables. Cuando el número de grados de libertad N del hamiltoniano del sistema coincide con el número de constantes de movimiento independientes del mismo, el sistema es *integrable*. En tal caso, la dinámica del sistema quedará confinada en el espacio de fases según una estructura llamada toro invariante de dimensión N igual al número de grados de libertad. Se dice entonces que el sistema presenta un movimiento regular. Una perturbación que provoque que el sistema tenga diferente número de constantes de movimiento que grados de libertad, puede llevar a la ruptura de este toro invariante. Es decir, las trayectorias dejarían de quedar confinadas en esta estructura del espacio de fases, y podrían moverse hacia regiones mucho más amplias. El sistema se denominará entonces *no integrable* y su movimiento será *caótico*.

La dinámica que presentan estos sistemas será más o menos caótica dependiendo de la intensidad de la perturbación. Esto es, no todos los sistemas caóticos lo son en el mismo grado, sino que siguen una jerarquía. En grado creciente de caoticidad, los sistemas caóticos se pueden clasificar de la siguiente manera: Sistemas ergódicos, sistemas mixing y sistemas K. En estos últimos, no existen órbitas estables que se encuentren en los toros invariantes anteriormente mencionados y por tanto, se dice que el espacio de fases es totalmente caótico. Habitualmente, el término “sistema caótico” es utilizado para designar a los sistemas K. Por otra parte, los sistemas ergódicos engloban a los sistemas mixing, y estos a su vez, engloban a los sistemas K.

Los fundamentos matemáticos de lo que sería la futura teoría del caos fueron desarrollados por Poincaré en sus trabajos sobre teoría de bifurcación en 1885. Sin embargo, la ausencia de ordenadores capaces de hacer frente a la no linealidad de la dinámica Newtoniana impidieron que esta disciplina se desarrollase hasta mediados del siglo XX.

El caos determinista ha supuesto uno de los grandes avances en la física del siglo XX ya que ha permitido estudiar una amplia variedad de sistemas complejos. Procesos que se comportaban aparentemente de forma aleatoria escondían un comportamiento puramente caótico. La mayoría de sistemas no lineales presentan dinámica caótica, especialmente aquellos relacionados con la biología, la meteorología o incluso la economía, y que aun siendo impredecibles a grandes escalas de tiempo pueden ser estudiados en el marco de esta teoría. [2]

Dado el carácter determinista de la mecánica clásica, la manera más sencilla e intuitiva de identificar el caos se basa en la evolución temporal de las trayectorias. Los sistemas caóticos manifiestan una *gran sensibilidad a las condiciones iniciales*: una variación muy pequeña de las condiciones iniciales implica una separación exponencial de las trayectorias en el espacio de fases. Esta sensibilidad es una característica clave y definitoria de los sistemas caóticos que conlleva una pérdida de predecibilidad a largo plazo en el sistema y acota un tiempo máximo hasta el que es posible la predicción del movimiento del sistema. Lorentz denominó esta sensibilidad a las condiciones iniciales como *el efecto mariposa* [3] .

Formalmente, este efecto queda determinado de forma cuantitativa mediante el *exponente de Lyapunov*:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{d(x_0, t)}{d(x_0, 0)} \quad (1)$$

donde $d(x_0, t)$ corresponde a la distancia entre dos trayectorias en un tiempo t y con condiciones iniciales en un entorno x_0 . Si $\lambda > 0$ las trayectorias cercanas divergen de forma exponencial y por tanto, dan cuenta de un posible comportamiento caótico. Por el contrario, valores de $\lambda \leq 0$ que se relacionan habitualmente con movimientos periódicos ($\lambda = 0$) o con trayectorias que convergen en un punto ($\lambda < 0$), no presentarán dinámica caótica [4].

El exponente de Lyapunov positivo, sin embargo, no es condición suficiente para hablar de movimiento caótico. Si bien es cierto que las trayectorias cercanas se separan de forma exponencial, estas se separan de forma local, pero de forma global se vuelven a encontrar una y otra vez. La dinámica está confinada globalmente en una región finita del espacio de fases que corresponde a una propiedad matemática llamada *mixing*. Esta propiedad se cumple necesariamente para todo sistema caótico.

Cuando el sistema además es disipativo, es posible modelizar la dinámica del sistema mediante un atractor. Un atractor representa el conjunto de valores hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar para una amplio conjunto de condiciones iniciales. Todas las trayectorias convergen en esta región del espacio de fases para un tiempo $t \rightarrow \infty$, son “atraídas”. De esta manera, las propiedades de los atractores modelizan la tendencia del sistema a largo plazo.

La complejidad de la dinámica caótica puede inducir a pensar que es exclusiva de sistemas muy complejos con muchos grados de libertad. Sin embargo, sistemas no lineales con pocos grados de libertad pueden ser caóticos y presentar un movimiento tremendamente complejo. Sorprendentemente, muchos de los fenómenos complicados que podemos observar en el mundo pueden tener un origen muy “sencillo”.

3. Caos Cuántico

Se puede decir que la complejidad dinámica que presenta la mecánica clásica surge de la no linealidad de las ecuaciones de movimiento. En la mecánica cuántica, sin embargo, la dinámica se describe mediante la ecuación lineal de Schrödinger, tanto en su versión independiente del tiempo como dependiente del tiempo. ¿Podemos hablar de caos cuántico después de todo?

3.1. Definición del caos cuántico

Dado que la mecánica clásica surge como límite de la mecánica cuántica en la región semiclásica ($\hbar \rightarrow 0$), donde la longitud de onda característica es mucho mayor que la longitud de onda de Broglie, es de esperar que el caos se manifieste de alguna manera en los sistemas cuánticos. Sin embargo, la separación de trayectorias próximas de forma exponencial como definición de caos deja de tener sentido en el mundo cuántico: por un lado, el principio de incertidumbre, $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, impide la determinación exacta de las condiciones iniciales y por otro, el concepto de trayectoria deja de existir en el marco de la mecánica cuántica. Por tanto, no podemos aplicar el concepto clásico de integrabilidad para definir el caos cuántico.

Los indicadores de caos clásico, como el exponente de Lyapunov, no pueden aplicarse si hablamos de caos cuántico, siendo necesario desarrollar nuevos conceptos que ayuden a detectar el comportamiento caótico de los sistemas cuánticos. En analogía con el caos clásico, podemos buscar una definición de caos cuántico basándonos en la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, sustituyendo las trayectorias por las funciones de onda cuánticas. Sin embargo, la evolución de las funciones se caracteriza por un operador unitario que mantiene constante el producto escalar en el espacio de Hilbert, de forma que:

$$\langle \phi(t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \phi(t) | \psi(t) \rangle \quad \forall t \quad (2)$$

Aún cuando la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales no se puede aplicar, existen diferentes manifestaciones del caos en los sistemas cuánticos. Por ello, la primera y más aceptada definición del caos cuántico, que se debe a M. Berry [5], propuso definirlo como el estudio de las manifestaciones cuánticas del caos clásico. Es decir, el caos cuántico estudia cuánticamente sistemas cuya caoticidad conocemos para su análogo clásico para tratar de determinar posibles características comunes que indiquen la manifestación o no de caos. De esta manera, se puede caracterizar el caos en sistemas cuánticos mediante una serie de propiedades comunes y extrapolarlo a sistemas cuánticos cuyo análogo clásico no existe.

3.2. Límite semiclásico

La correspondencia entre sistemas clásicos y sistemas cuánticos está bien establecida para sistemas integrables a partir de las reglas de cuantización WKB (Wentzel, Kramer, Brillouin). Sin embargo, para los sistemas no integrables, cuya dinámica no se encuentra confinada en toros invariantes del espacio de fases, la cuantización no es posible [6]. M.C. Gutzwiller resolvió este problema mediante el desarrollo de la teoría de las órbitas periódicas, que culminó en 1971 con la famosa *fórmula de la traza de Gutzwiller* [7]. Mediante esta fórmula, es posible obtener la densidad cuántica de estados $\rho(E)$ a partir del estudio semiclásico de magnitudes clásicas como son las órbitas periódicas del sistema análogo clásico.

La densidad de estados semiclásica desarrollada por Gutzwiller es válida tanto para sistemas caóticos como integrables y depende exclusivamente de la contribución de las órbitas

periódicas clásicas del sistema, así como de su estructura, estabilidad y periodo. Así, la fórmula de la traza de Gutzwiller permite reescribir la densidad de estados según dos contribuciones:

$$\rho(E) = \bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E) \quad (3)$$

donde $\bar{\rho}(E)$ corresponde a la parte suave de la densidad de estados y $\tilde{\rho}(E)$ a la parte fluctuante de la densidad de estados.

La *parte suave de la densidad de estados* $\bar{\rho}(E)$ aparece como la contribución de las órbitas de longitud nula y es proporcional al volumen del espacio de fases accesible clásicamente para una energía E . Se define como parte "suave" puesto que varía suavemente con la energía y generalmente se asocia con el comportamiento medio propio del sistema clásico.

$$\bar{\rho}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dqdp \delta(E - H(q, p)) \quad (4)$$

Si tenemos en cuenta todas las contribuciones de órbitas de longitud no nula obtendremos un término que depende fuertemente de la energía E y que presenta un comportamiento oscilatorio. Este término corresponde a la *parte fluctuante de la densidad de estados* y es propio del sistema cuántico.

$$\tilde{\rho}(E) = \frac{1}{\hbar^{\mu+1}} \sum_{op} A_{op}(E) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{op}(E)\right) \quad (5)$$

donde *op* se refiere al sumatorio sobre todas las órbitas periódicas, A_{op} y S_{op} indican la estabilidad y acción clásica de las órbitas respectivamente, y el parámetro μ depende de si el sistema es integrable o no, siendo $\mu = (d - 1)/2$ para sistemas integrables (d indica la dimensión del espacio), y siendo $\mu = 0$ para sistemas caóticos [8].

Esta fórmula es una herramienta fundamental puesto que el espectro de un sistema cuántico revela importantes características sobre la posible integrabilidad o caoticidad del sistema estudiado. Dependiendo de si el sistema análogo clásico es caótico o integrable, el esquema de niveles presentará mayor o menor regularidad. Esto es, si el sistema clásico es integrable, sorprendentemente, el espectro tendrá un aspecto más irregular, mientras que si es caótico, la distribución de niveles será más regular. Esta regularidad en el esquema de niveles se estudia a partir de la parte fluctuante de la densidad de estados, $\tilde{\rho}(E)$. Las fluctuaciones en el espectro nos indican la forma del espectro (la "regularidad" que presenta) y da cuenta de las propiedades que lo caracterizan.

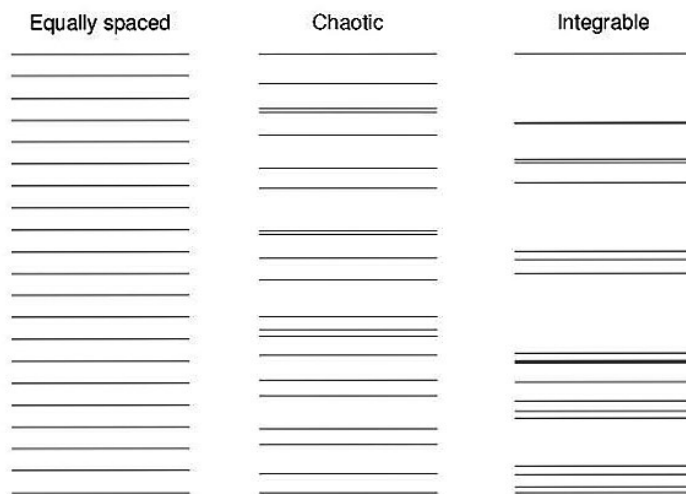


Figura 1: Estructura de esquema de niveles para diferentes sistemas.

Para evaluar la regularidad del espectro hará falta una teoría estadística. Esta estadística espectral no puede predecir la secuencia detallada de los niveles de energía ni los detalles particulares de la misma, pero debe dar cuenta del aspecto y estructura general del esquema de niveles y su grado de regularidad. El estudio de las propiedades estadísticas del espectro nos permitirá la detección del caos en los sistemas cuánticos.

3.3. Teoría de matrices aleatorias

El caos cuántico se estudia desde dos vertientes diferentes: el estudio basado en *métodos semiclásicos* y la *teoría de matrices aleatorias* (RMT: “Random Matrix Theory”). Los métodos semiclásicos estudian la correspondencia entre los sistemas clásicos y cuánticos a partir de la teoría de órbitas periódicas desarrollado por Gutzwiller. Sin embargo, no todo sistema cuántico tiene un correspondiente clásico, como son los sistemas cuánticos de muchos cuerpos. La otra vertiente corresponde a la RMT, que estudia de forma estadística los niveles de energía cuánticos, dando cuenta del comportamiento caótico o regular del sistema.

La RMT fue desarrollada por Wigner, Dyson, Mehta y otros en 1951 para estudiar el espectro de los núcleos atómicos, ante la dificultad de describir en detalle la interacción nuclear, y posteriormente, se desarrolló con éxito para una multitud de problemas físicos diferentes como átomos, moléculas complejas, procesos de dispersión, etc. La posibilidad de estudiar sistemas muy complejos, cuyo estudio en detalle no era posible, hizo que esta teoría estadística fuera de gran éxito. Al igual que en la mecánica estadística, la RMT renuncia al conocimiento exacto y detallado del sistema a cambio de ganar información sobre el comportamiento general del mismo. Ambas teorías estadísticas tienen en común esta renuncia a los detalles del sistema, aunque desde un punto de vista diferente: La mecánica estadística renuncia al conocimiento exacto del estado del sistema, asumiendo que todos los estados son igualmente probables. El sistema se estudia mediante el hamiltoniano que define la interacción y promediando sobre todos los posibles estados. Por el contrario, la RMT se basa en

la renuncia de la “naturaleza” del sistema. Es decir, se renuncia al conocimiento exacto del hamiltoniano del sistema, y por tanto, al conocimiento exacto de la interacción, asumiendo un conjunto de hamiltonianos equiprobables.

Para entender esto, podemos visualizar el núcleo como una «caja negra» donde la interacción entre las partículas que lo forman se desconoce. Para poder estudiar el sistema, se supone un conjunto de hamiltonianos con propiedades genéricas iguales, es decir, suponemos que todas las leyes de interacción compatibles con las simetrías del sistema son igualmente probables [9]. En el caso del núcleo, dado que éste es invariante bajo inversiones temporales y bajo rotaciones, el conjunto de matrices usado para su estudio tiene que ser un conjunto de matrices reales y simétricas. Los elementos de matriz de cada hamiltoniano se definen de forma aleatoria siguiendo una distribución de probabilidad. De esta manera, estaremos considerando un conjunto de matrices hamiltonianas, cuyo estudio estadístico nos dará una descripción del sistema. Sin embargo, dado que cada una de las matrices que definen el conjunto define una ley de interacción diferente, renunciamos al estudio de los detalles que nos proporcionaría el conocimiento exacto de la interacción que tiene lugar en el sistema.

Aunque con esta teoría estadística no obtengamos los detalles que proporcionaría el uso de un hamiltoniano nuclear, nos proporciona información útil sobre la estructura de los niveles y por ello, ha constituido uno de los pilares sobre los que se ha construido la teoría del caos cuántico. La RMT es la herramienta fundamental del caos cuántico puesto que es capaz de caracterizar el espectro de energías según las propiedades generales que presentan. Es decir, gracias a la RMT, podemos caracterizar el comportamiento caótico o regular de un sistema cuántico mediante el estudio estadístico de las propiedades de las fluctuaciones del espectro.

Por tanto, según las simetrías del sistema, deberemos considerar una colectividad diferente de matrices aleatorias:

- Colectividad GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*). Esta colectividad está compuesta por matrices hermíticas invariantes bajo transformaciones unitarias. Será aplicable para sistemas que no sean invariantes bajo inversión temporal.
- Colectividad GSE (*Gaussian Symplectic Ensemble*). Formada por matrices aleatorias reales que son invariantes bajo transformaciones simplécticas. Será aplicable para sistemas con simetría bajo inversión temporal, sin simetría bajo rotaciones y de espín semientero.
- Colectividad GOE (*Gaussian Orthogonal Ensemble*). Esta colectividad está formada por matrices reales y simétricas, invariantes bajo transformaciones ortogonales. Los sistemas con simetría bajo inversión temporal y bajo rotaciones se representan mediante esta colectividad.

La mayoría de sistemas presentan simetría bajo inversión temporal y de rotaciones. Por ello, la colectividad más usada es la colectividad GOE. Esta colectividad cumple las siguien-

tes condiciones:

1. Para una matriz de dimensión N , existirán $N(N + 1)/2$ elementos de matriz independientes no correlacionados. Es decir, suponemos que la distribución de probabilidad de cada elemento es independiente de la del resto:

$$p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{nn}) = p(H_{11})p(H_{12})\dots p(H_{nn}) \quad (6)$$

2. La distribución de probabilidad no depende de la base:

$$p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{nn}) = p(H'_{11}, H'_{12}, \dots, H'_{nn}) \quad (7)$$

Atendiendo a estas dos propiedades, la distribución de probabilidad para GOE se define como sigue:

$$p(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{nn}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{n(n-1)/4} e^{-A \sum_{i,j} H_{ij}^2} \quad (8)$$

donde A es una constante que se relaciona con la desviación cuadrática media σ de la distribución de los elementos diagonales H_{ii} y no diagonales H_{ij} de la siguiente manera:

$$\langle H_{ii}^2 \rangle = \frac{1}{2A}, \quad \langle H_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{4A} \quad (9)$$

El estudio de sistemas más sencillos con pocos grados de libertad pero cuyo análogo clásico presentaba dinámica caótica, dio pie en 1984 a Bohigas, Giannoni y Schmit a formular la famosa *conjetura BGS* [10]. Mediante el estudio de una partícula en un billar de Sinai cuántico cuyo análogo clásico es caótico, encontraron que las fluctuaciones del espectro concordaban de manera satisfactoria con las predicciones de la colectividad GOE. Los resultados obtenidos fueron los mismos que podemos encontrar para sistemas tan diferentes y complejos como los núcleos. Hasta entonces, se pensaba que la RMT era un “método” para estudiar sistemas muy complejos. Por ello, el billar cuántico se ha convertido en el sistema paradigmático del estudio del caos cuántico. Representa el sistema más sencillo que se puede estudiar y sin embargo, exhibe todas las propiedades y comportamientos que podemos encontrar en sistemas mucho más complejos.

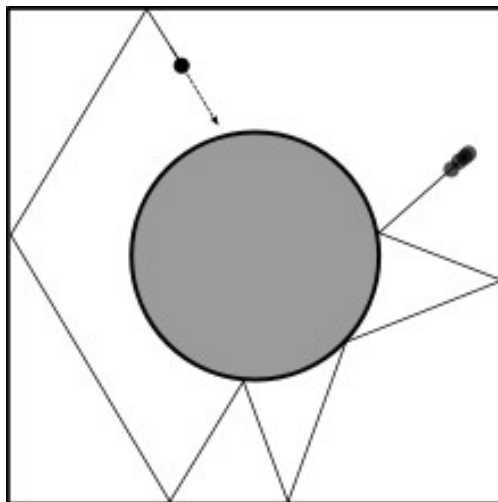


Figura 2: Billar de Sinai.

Llamamos billar cuántico a una partícula confinada en un potencial de paredes infinitas. El análogo clásico de este sistema corresponde a una partícula en una caja. Mediante el estudio de la correspondencia entre billares cuánticos y clásicos, se encontró una posible conexión entre la RMT y la caoticidad de un sistema cuántico: *La conjetura BGS* establece que las fluctuaciones de un sistema cuántico son universales y siguen una estadística GOE cuando su análogo clásico es caótico. Por el contrario, según el trabajo de Berry y Tabor [11], las fluctuaciones seguirán las predicciones de Poisson cuando su análogo clásico sea integrable. Para un billar clásico rectangular, la dinámica es integrable, y por tanto, la trayectoria de la partícula queda bien definida. Las fluctuaciones del espectro del billar cuántico rectangular seguirán entonces una estadística de Poisson puesto que su análogo clásico es integrable. Si consideramos una partícula clásica en un billar de Sinai (figura 2), un billar rectangular igual que el anterior pero de donde se ha extraído una zona circular, tendremos que la dinámica que ésta presenta es totalmente caótica. Las fluctuaciones espectrales del billar de Sinai cuántico siguen una estadística GOE. Para sistemas que presenten simetrías diferentes a GOE, la conjetura BGS se aplica entonces para las colectividades GUE (sin simetría bajo inversión temporal) o GSE (sin simetría bajo rotaciones), según corresponda.

3.4. Estadística espectral

Las fluctuaciones espectrales son la llave para determinar la caoticidad de un sistema cuántico puesto que son universales y sólo dependen de si el sistema es caótico o regular. Por lo tanto, se trata de estudiar de forma estadística las propiedades de las fluctuaciones mediante *estadísticos* a partir únicamente de la secuencia de niveles. Los estadísticos más ampliamente utilizados para el estudio del caos cuántico son la distribución de espaciamientos a primeros vecinos $P(s)$, que mide las correlaciones de corto alcance y la rigidez espectral Δ_3 , que mide las correlaciones de largo alcance.

Para poder evaluar únicamente las fluctuaciones espectrales, será necesario eliminar la parte suave del espectro. Es decir, será necesario reescalar las energías del espectro de tal

manera que obtengamos únicamente la parte del espectro correspondiente a las fluctuaciones $\tilde{\rho}(E)$. Este proceso se denomina *reescalado* (*Unfolding*).

3.4.1. Reescalado

El reescalado constituye uno de los procesos más importantes del análisis espectral ya que determina la calidad de los estadísticos calculados, pudiendo derivar en conclusiones erróneas acerca de la caoticidad del sistema cuando el reescalado no se realiza de forma correcta [12]. Según la fórmula de la traza de Gulltzwiler (ec. 3), la densidad de estados se divide en una parte suave $\bar{\rho}$ y una parte fluctuante $\tilde{\rho}$. Para poder comparar las fluctuaciones del espectro de sistemas de naturaleza diferente, debemos hacer un cambio de variable tal que la parte suave de la densidad de estados sea igual para todos los sistemas. De esta manera, conseguiremos que la densidad de estados solo dependa de las fluctuaciones características de cada sistema y no dependa de la parte suave.

Teniendo en cuenta el conjunto de energías sin reescalar, E_i , la densidad acumulada de estados será:

$$N(E) = \int_{-\infty}^E dx \rho(x). \quad (10)$$

Y por tanto, la densidad acumulada de estados también se podrá escribir como una contribución de una parte suave y otra parte fluctuante:

$$N(E) = \bar{N}(E) + \tilde{N}(E). \quad (11)$$

Queremos definir un nuevo espectro de energías ε_i cuya densidad media sea la unidad, es decir, un espectro donde $\bar{\rho}(\varepsilon) = 1$. Para ello, utilizaremos el siguiente cambio de variable para una secuencia de niveles [13] :

$$\varepsilon_i = \bar{N}(E_i) \quad i = 1, 2, 3 \dots n. \quad (12)$$

Teniendo en cuenta la siguiente relación

$$\bar{\rho}(E) = \frac{d\bar{N}(E)}{dE} \quad \tilde{\rho}(E) = \frac{d\tilde{N}(E)}{dE}, \quad (13)$$

la nueva densidad de estados, $\rho(\varepsilon)$, para el espectro reescalado de energías ε_i :

$$\rho(\varepsilon) = \frac{d\bar{N}(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{d\tilde{N}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 1 + \frac{d\tilde{N}(E)}{dE} \frac{dE}{d\varepsilon}. \quad (14)$$

Dado que ε corresponde a la parte suave de la antigua densidad de estados, $\frac{dE}{d\varepsilon} = \left(\frac{\bar{N}(E)}{dE}\right)^{-1} = \bar{\rho}(E)^{-1}$, y la nueva densidad de estados se escribirá como:

$$\rho(\varepsilon) = 1 + \frac{\tilde{\rho}(E)}{\bar{\rho}(E)}. \quad (15)$$

La parte suave de la nueva densidad de estados es igual a la unidad e igual para todos los sistemas en los que el reescalado esté correctamente realizado. La nueva parte fluctuante $\tilde{\rho}(\varepsilon)$ resulta de la normalización de la antigua $\tilde{\rho}(E)$ a partir de la parte suave del espectro $\bar{\rho}(E)$.

Aunque la descomposición del espectro pueda parecer una tarea sencilla, no lo es en absoluto, puesto que es imprescindible para ello el conocimiento la parte suave de la densidad acumulada $\bar{N}(E)$. Para sistemas donde el comportamiento medio de la densidad se conoce de forma exacta, el procedimiento del reescalado es sencillo.

Sin embargo, para sistemas donde la densidad media no es conocida, la densidad ha de determinarse a partir de la información que proporciona el espectro. A partir del espectro completo, se intenta ajustar la densidad a una función suave que dé cuenta únicamente del comportamiento medio y excluya las fluctuaciones. La determinación de la densidad ha de realizarse con sumo cuidado puesto que la elección de una u otra densidad puede llevar a una caracterización errónea de las fluctuaciones del sistema.

3.4.2. Distribución de espaciamientos a primeros vecinos

Una vez se obtiene el espectro reescalado, la caoticidad de un sistema queda determinada a partir de sus fluctuaciones espectrales. Uno de los estadísticos más utilizados para el análisis de las fluctuaciones es la distribución de espaciamientos a primeros vecinos o $P(s)$, que como se dijo anteriormente, mide las correlaciones de corto alcance entre los niveles del espectro. Dada una secuencia de niveles ε_i con $i = 1, 2, \dots, n$, ordenada en orden creciente de energía, se definen los espaciamientos a primeros vecinos como:

$$s_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (16)$$

La distribución de probabilidad de estos espaciamientos mide el grado de regularidad que caracteriza al esquema de niveles. Esta regularidad en el espectro se relaciona con la correlación entre niveles. Los niveles de energía de un sistema cuántico cuyo análogo clásico es integrable no están correlacionados entre sí, pues siguen una distribución de Poisson, dando lugar a degeneraciones. La probabilidad de encontrar dos niveles de energía con el mismo valor (equivalente a encontrar un espaciamiento nulo) será distinta de cero, por lo que el aspecto del espectro tendrá en apariencia menos regularidad. Por el contrario, si el análogo clásico del sistema cuántico estudiado es caótico, los niveles de energía están correlacionados, ya que siguen la estadística predicha por la teoría de matrices aleatorias, y el esquema de niveles no presentará degeneraciones, pareciendo más regular. Este fenómeno se denomina *repulsión de niveles* y es característico de los sistemas caóticos. Un espectro caracterizado por la repulsión de niveles tiene espaciamientos cercanos a la unidad, mantiene una distancia entre niveles más equidistante, y tiene una probabilidad muy baja de encontrar espaciamientos cercanos a 0. Por tanto, a partir de este estadístico se puede estudiar la caoticidad del sistema gracias a la caracterización de la repulsión de niveles que presenta y su correlación. Los sistemas cuánticos se ajustan idealmente a cuatro distribuciones de probabilidad: la distribución de Poisson, GOE, GUE, y GSE.

La *distribución de Poisson* describe el comportamiento de los sistemas con dinámica regular. Los niveles no están correlacionados y por tanto, $P(0) = 1$.

$$P(s) = e^{-s} \quad (17)$$

Para sistemas cuánticos caóticos, la $P(s)$ corresponde a la descrita por las colectividades gaussianas GOE, GUE o GSE atendiendo a la conjetura BGS anteriormente citada. Aunque en un principio la conjetura fue formulada para la colectividad GOE, numerosos estudios posteriores confirmaron la misma conjetura tanto para la colectividad GUE como para la GSE. Es decir, las fluctuaciones espectrales de un sistema caótico que presente las simetrías de las colectividades GUE o GSE quedarán entonces descritas mediante estas colectividades. Sin embargo, la universalidad de las fluctuaciones para GUE y GSE pertenece más al plano teórico que al experimental. La mayoría de datos experimentales confirman la universalidad de GOE, y por ello, esta colectividad es la más usada y popular de las tres. Para cualquiera de estas tres colectividades se observa repulsión y por tanto, $P(0) = 0$. La distribución de espaciamientos para cada una de las colectividades será:

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2} \quad \text{GOE} \quad (18)$$

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\frac{4}{\pi} s^2} \quad \text{GUE} \quad (19)$$

$$P(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 e^{-\frac{64}{9\pi} s^2} \quad \text{GSE} \quad (20)$$

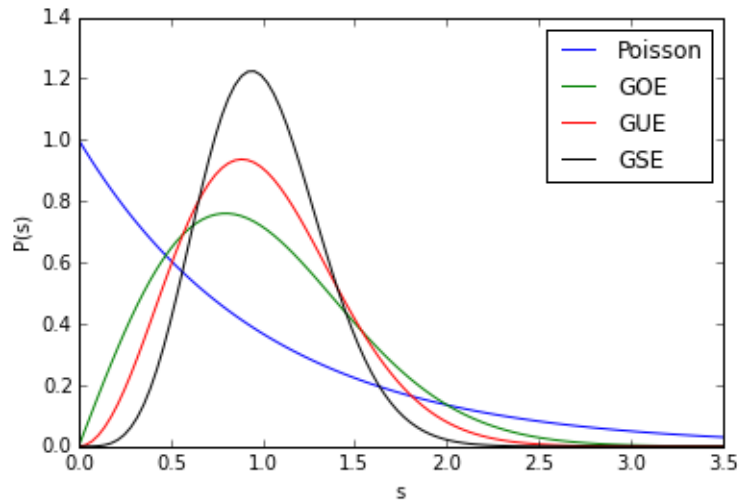


Figura 3: Distribución de espaciamientos a primeros vecinos para las distribuciones de Poisson, GOE, GUE y GSE.

Estas distribuciones se pueden generalizar en una única distribución genérica, tal que:

$$P(s) = as^\nu e^{-bs^2} \quad (21)$$

donde ν se denomina *parámetro de repulsión*, $\nu = 1$ (GOE), $\nu = 2$ (GUE) y $\nu = 4$ (GSE). Para estos valores los pares de valores para a y b serán, $(a, b)_{GOE} = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$, $(a, b)_{GUE} = (\frac{32}{\pi^2}, \frac{4}{\pi})$, $(a, b)_{GSE} = (\frac{2^{18}}{3^6 \pi^3}, \frac{64}{9\pi})$.

Por tanto, para un conjunto de valores de s pequeños, la distribución de Poisson se ajustará mejor que las distribuciones de las colectividades gaussianas, puesto que para valores de s pequeños, éstas crecen muy despacio: Para GOE, $P(s) \sim s$ (repulsión lineal), para GUE $P(s) \sim s^2$ (repulsión cuadrática) y para GSE $P(s) \sim s^4$ (repulsión cuártica). Si por el contrario, obtenemos un conjunto de espaciamientos alejados de valores pequeños y cercanos a la unidad, las distribuciones descritas por las colectividades gaussianas serán las que describan mejor nuestro conjunto de espaciamientos. Este comportamiento queda reflejado en la figura 3 donde se presentan estas cuatro distribuciones: Poisson, GOE, GUE y GSE.

En general, la distribución de espaciamientos a primeros vecinos no es puramente Poisson o gaussiana sino que suele presentar contribuciones de ambas. Los sistemas reales no son absolutamente integrables ni caóticos y la $P(s)$ presenta un comportamiento intermedio. La distribución de probabilidad más utilizada para poder estudiar de forma cuantitativa el grado de caoticidad de un sistema con un espacio de fases mixto es la expresión de Brody para la $P(s)$. Esta función interpola entre dos casos extremos como son el de un sistema integrable que sigue una distribución de Poisson, y el de un sistema totalmente caótico que

se ajusta a una distribución GOE:

$$P(s) = (w + 1)a_w s^w \exp(-a_w s^{w+1}) \quad (22)$$

donde $a_w = \left[\Gamma\left(\frac{w+2}{w+1}\right) \right]^{w+1}$ y Γ corresponde a la función gamma definida como $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ para $z > 0$. El parámetro w se define como *parámetro de Brody* y mide de forma cuantitativa el grado de caos del sistema. Para $w = 0$ la fórmula de Brody corresponde a la $P(s)$ de la distribución de Poisson, mientras que para $w = 1$ coincide con la distribución de la $P(s)$ de GOE.

La distribución integrada de Brody asociada, que como veremos más adelante, será más conveniente a la hora de estudiar el espectro, es:

$$I(s) = \int_0^s P(s) ds = 1 - e^{-a_w s^{w+1}} \quad (23)$$

Por tanto, al igual que para la fórmula de Brody no integrada, el parámetro de Brody $w = 0$ coincidirá con la $I(s)$ de Poisson y para $w = 1$ con la $I(s)$ de GOE:

$$I(s) = 1 - e^{-s} \quad w = 0 \quad (\text{Poisson}) \quad (24)$$

$$I(s) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}s^2} \quad w = 1 \quad (\text{GOE}) \quad (25)$$

4. Caos cuántico en núcleos

El núcleo atómico es un sistema paradigmático para el estudio de la aplicabilidad de la RMT en sistemas fermiónicos de muchos cuerpos, así como para el estudio de la manifestación del caos cuántico y su relación con la teoría de matrices aleatorias. Tras el desarrollo de la RMT en los años 60, el análisis de los datos experimentales relacionaron de forma unívoca las predicciones de la RMT y los espectros nucleares, lo que hizo muy popular el estudio del caos cuántico en los núcleos en los años 80 [14].

Los niveles de energía nucleares se caracterizan por los números cuánticos J (Espín total), Π (Paridad), y T (Isoespín), que reflejan las simetrías del hamiltoniano nuclear: J refleja simetría bajo rotaciones, Π refleja la invariancia frente a reflexiones, y T refleja la simetría protón-neutrón. Los elementos de la matriz que representa el hamiltoniano nuclear $H^{J\Pi T}$ sólo se acoplan con otros elementos que tengan las mismas simetrías, es decir, la matriz es

diagonal por bloques con los mismos números cuánticos. Si la dinámica nuclear es caótica, entonces cada uno de estos bloques de elementos $H^{J\Pi T}$ se puede representar mediante un conjunto de matrices aleatorias. En el caso nuclear, dado que presenta simetría bajo inversiones temporales, el conjunto de matrices aleatorias correspondiente sería el de GOE.

4.1. Manifestaciones del caos en núcleos

El estudio de las fluctuaciones espectrales nucleares requiere un conjunto de niveles de energía experimentales de igual simetría suficientemente grande como para que el estudio estadístico de sus propiedades sea fiable. Sin embargo, esto no es siempre fácil. La densidad media de niveles para cualquier núcleo crece de forma exponencial con la energía de excitación y con el número másico A . A medida que aumenta la densidad de niveles, aumenta la resolución energética necesaria: para estados excitados cerca del estado fundamental encontramos espaciamientos entre niveles con los mismos números cuánticos del orden de cientos de keV y del orden de unos pocos eV para estados cerca del umbral de emisión de neutrones. Esto limita los estudios del caos cuántico en núcleos a ciertas regiones energéticas. De manera general, se han llevado a cabo estudios sobre las fluctuaciones espectrales para las siguientes regiones del espectro nuclear:

- **RESONANCIAS DE NEUTRONES Y PROTONES.** Hasta los años 80, el número de resonancias medidas para cada núcleo no fue suficiente como para realizar estudios fiables sobre la concordancia de las predicciones de la RMT con los espectros nucleares. En 1983, Haq y Bohigas [15] combinaron conjuntos de datos de un gran número de núcleos para resonancias tanto de neutrones como de protones con $J^{\Pi} = (1/2)^+$. Sus análisis demostraron por primera vez que los espectros nucleares, en concreto las resonancias de protones y neutrones para núcleos medios y pesados, seguían las predicciones de GOE. Tras la conjetura BGS, el término caos se comenzó a usar en el contexto de la física nuclear a partir de estos resultados.
- **ESTADOS EXCITADOS CERCA DEL ESTADO FUNDAMENTAL.** Visto que los núcleos manifestaban caos en las resonancias, se intentó estudiar los espectros nucleares de los estados excitados a energías bajas. Sin embargo, para la mayoría de núcleos, las secuencias de niveles con los mismos números cuánticos en este rango de energía son demasiado cortas. Por ello, para realizar un estudio estadístico fiable se combinaron datos experimentales de un gran número de núcleos clasificándolos según su número másico A . Para ciertos núcleos comprendidos entre $150 < A \leq 180$ (núcleos de elementos de tierras raras) y $230 < A$ (núcleos superpesados), la $P(s)$ se desviaba de GOE y se acercaba más a una distribución de Poisson. Esta desviación a Poisson se puede observar en la figura 4 donde se presenta el estudio de las fluctuaciones espectrales en función del número másico A llevado a cabo por Shriner *et al.* [16]. En ambos rangos de masas, las deformaciones nucleares son importantes y provocan movimientos rotacionales. Estas rotaciones se explican mediante un modelo integrable y por tanto, exhiben movimiento regular. En general, hay evidencia, a falta de un conjunto de datos

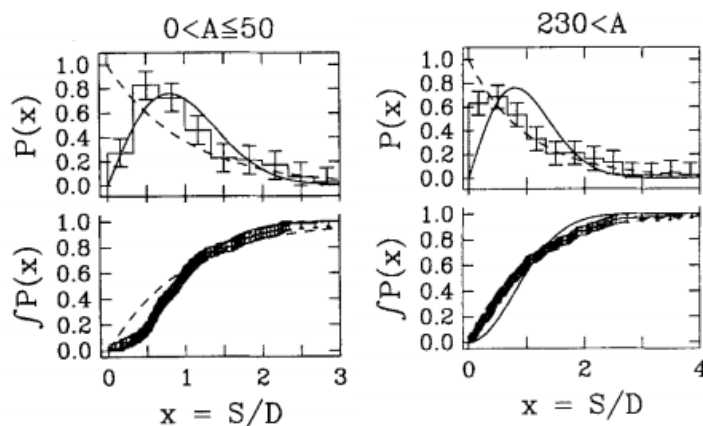


Figura 4: Estudio de la distribución de espaciamientos a primeros vecinos para núcleos muy ligeros con $0 < A \leq 50$ y para núcleos superpesados con $230 < A$ [16] .

mayor, de que los estados excitados cercanos al estado fundamental, los estados 2^+ y 4^+ , exhiben un movimiento regular que se explica mediante la distribución de Poisson cuando domina el movimiento colectivo, y que se explica mediante una distribución GOE cuando estos estados son aproximadamente esféricos. En la figura 5 se puede observar la desviación a GOE o Poisson en función del estudio de las fluctuaciones espectrales para los estados 2^+ y 4^+ para núcleos que presentan deformación para estos estados y para los que no. En concreto, para el caso de los núcleos que presentan deformación, la proximidad a Poisson puede ser debido a la omisión de una simetría fundamental cuantificada por el número cuántico K y que, a día de hoy, resulta complicado incluir debido a la falta de más datos experimentales. Por otro lado, el estudio realizado en [16] separa el análisis en 6 regiones de masas observándose una disminución del parámetro w a medida que la masa aumenta y por tanto, una transición de GOE a Poisson a medida que nos acercamos a núcleos más pesados. Se puede encontrar información más detallada en [17], [18] y [19] .

En conclusión, mientras que para la región energética de resonancias de protones y neutrones se tienen grandes evidencias de la manifestación del caos cuántico en núcleos, para la región de energías de excitación bajas, hacen falta más estudios que lo corroboren. Una de las dificultades reside en la falta de un conjunto de datos experimentales que respalde un estudio estadístico fiable. Por el momento, los estudios realizados señalan una dependencia de la caoticidad en los núcleos según su número másico y su deformación para energías de excitación bajas.

4.2. Importancia de la completitud del espectro

La completitud del espectro es fundamental para el buen análisis estadístico de las fluctuaciones espectrales. Es necesario tener un espectro completo y puro, es decir, un espectro en el que tengamos para cada secuencia todos los niveles que lo forman (completo) y donde

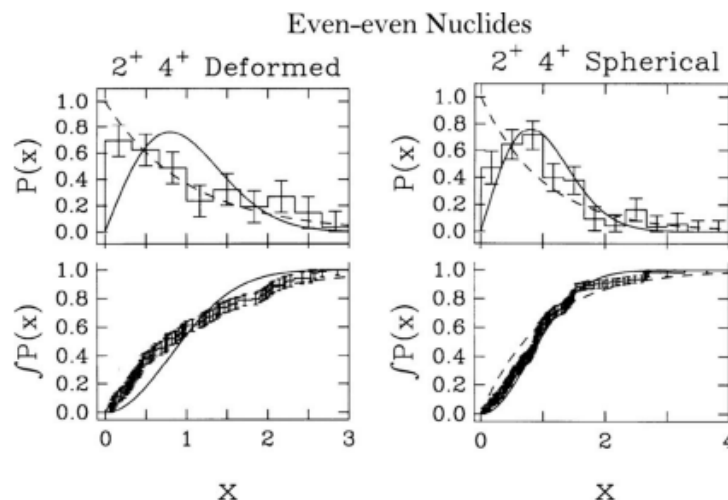


Figura 5: Estudio de la distribución de espaciamientos a primeros vecinos para los estados excitados 2^+ y 4^+ en núcleos fuertemente deformados y en núcleos aproximadamente esféricos [16].

no haya niveles de diferentes simetrías mezcladas (puro), es decir, donde los valores de J^π estén correctamente asignados.

Dado que los niveles de energía de un sistema caótico poseen correlaciones que se describen mediante GOE, un espectro incompleto derivaría en niveles menos correlacionados. Menos correlación entre niveles desplazaría el comportamiento de las fluctuaciones hacia la estadística de Poisson, aún cuando el sistema cuántico tuviese un comportamiento completamente caótico. Así mismo, un espectro GOE se desplazaría hacia uno de tipo Poisson si mezcláramos niveles con simetrías diferentes (diferentes J^π) [20].

Sin embargo, comprobar la completitud de un esquema de niveles no es tarea sencilla. Para ello, es importante comparar los niveles experimentales con los predichos por la teoría siempre que se pueda y con el esquema de niveles de los núcleos vecinos para mayor fiabilidad. Y no sólo eso, la calidad de las medidas experimentales es otro gran factor a tener en cuenta y ha de tenerse en cuenta a la hora de valorar la fiabilidad de los resultados estadísticos obtenidos.

4.3. Reescalado: La densidad Nuclear

El conocimiento de la densidad nuclear aparece como una de las mayores dificultades en el procedimiento del reescalado. Los modelos teóricos para la densidad nuclear deben dar cuenta de los datos experimentales y tratar de explicar el comportamiento exponencial de la densidad con la energía de excitación E .

Existen dos modelos para la densidad nuclear ampliamente utilizados que describen este

comportamiento exponencial. El uso de uno u otro modelo depende del rango de energía de excitación considerado [21]. La *fórmula de Bethe* para la densidad nuclear explica bien los niveles altos de excitación pero no los niveles más bajos de energía. Para regiones energéticas de menos de 10 MeV, el *modelo de temperatura constante* se ajusta muy bien a los datos experimentales.

En este trabajo, se utilizará el modelo de temperatura constante puesto que la región energética del espectro del ^{208}Pb se encuentra por debajo de los 10 MeV.

4.3.1. Fórmula de la temperatura constante

El modelo de la temperatura constante es uno de los modelos teóricos más sencillos que explica el comportamiento exponencial. Este modelo asume que la densidad puede ser explicada a partir de la definición de una temperatura termodinámica constante T , tal que [22]:

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}, \quad (26)$$

donde S corresponde a la entropía del sistema. Dado que se puede considerar al núcleo como un sistema aislado, que no intercambia energía con el exterior, y que por tanto, mantiene una energía y número de partículas fijo, podemos estudiar la excitación nuclear en el marco de la colectividad microcanónica. Según la termodinámica estadística, la entropía (escalada adimensional) es proporcional al número de estados accesibles para una energía de excitación E :

$$S(E) = \ln(\rho(E)), \quad (27)$$

por tanto, la temperatura nuclear quedará definida entonces como:

$$\frac{1}{T} = \frac{d \ln(\rho(E))}{dE}, \quad (28)$$

cuya integral da lugar a la fórmula de la temperatura constante:

$$\rho(E) = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{E - E_0}{T}\right). \quad (29)$$

Los parámetros T y E_0 son parámetros libres que se determinan a partir del ajuste con los datos experimentales.

De acuerdo con este modelo, en un cierto rango energético, el aumento de la energía de excitación no implica un aumento en la temperatura sino que ésta permanece constante. Este comportamiento es similar al que encontramos en las transiciones de primer orden de sólido-líquido o líquido-gas. Es decir, el núcleo se comporta de forma análoga a una mezcla de agua y hielo donde, durante el cambio de estado, la temperatura permanece constante aunque los grados de libertad del sistema aumenten. Este comportamiento se debe a que los pares de Cooper que forman los nucleones se van rompiendo a medida que la energía de excitación aumenta y todos los nucleones excitados se encuentran confinados en una región energética de anchura $\sim T$. Esto da lugar a que la energía media por nucleón excitado permanezca constante según la expresión, $T \sim E/n_{ex}$ [23], [24] .

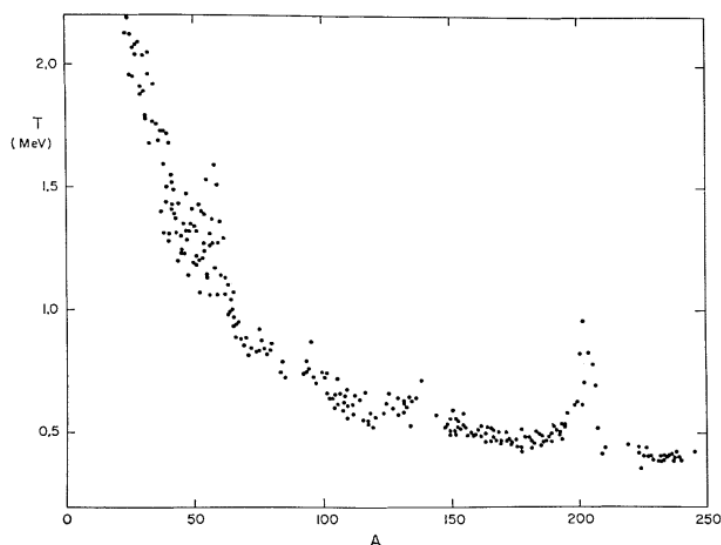


Figura 6: Temperatura T vs número másico A [16] .

Este modelo gana popularidad por su sencillez, teniendo en cuenta además, que para la mayoría de los núcleos, especialmente para los más pesados, los niveles de excitación más bajos son los que se conocen de manera más fiable y completa. En la figura 6 se puede ver un estudio de la temperatura en función del número másico. Para los núcleos ligeros, la temperatura es alta, cercana a los 2 MeV, y a medida que los núcleos son cada vez más pesados, la temperatura cae de forma exponencial. Cabe señalar el comportamiento especial de la temperatura alrededor de los núcleos mágicos. En estas zonas, la temperatura no sólo no decrece de forma exponencial con A , sino que crece y decrece rápidamente alrededor del número mágico formando acusados picos. Por tanto, esperamos encontrar temperaturas ligeramente mayores para núcleos cercanos a estos números.

Para el ajuste de los parámetros T y E_0 , es conveniente usar la integral de $\rho(E)$ correspondiente a la densidad de niveles acumulada $N(E)$ [16] :

$$N(E) = \int_0^E \rho(E') dE' = \exp[(E - E_0)/T] - \exp[-E_0/T] + N_0 \quad (30)$$

Donde $N(E)$ representa el número de niveles con energía menor o igual a E y N_0 el número de niveles por debajo de una energía $E = 0$. Dado que esta ecuación se usará en el reescalado para ajustar la parte suave de la densidad de estados, dejaremos, si resulta más conveniente para el ajuste, que N_0 pueda tomar valores distintos de cero [16] .

5. Análisis estadísticos del espectro del ^{208}Pb

Para el estudio del comportamiento caótico del núcleo ^{208}Pb , se utiliza un espectro de niveles con una energía de excitación menor de $E_x = 6.2$ Mev. La identificación de los estados ha sido realizada de forma experimental mediante el estudio de las reacciones $^{208}\text{Pb}(p, p')$, $^{206,207,208}\text{Pb}(d, p)$ y $^{208}\text{Pb}(d, d')$ [1]. En total, 151 estados han sido identificados y se les ha podido asignar espín y paridad con certeza.

Este espectro representa el mayor y más completo conjunto de datos experimentales que existe a día de hoy para estados cercanos al estado fundamental de un núcleo. Para confirmar su completitud, los estados del espectro del ^{208}Pb se han comprobado mediante la correspondencia con los predichos por el modelo de capas esquemático extendido (eSM). Por debajo de una energía de $E_x = 6.20$ Mev, el número de estados identificados experimentalmente concuerda satisfactoriamente con el número de estados que predice el modelo eSM. Las medidas experimentales han sido realizadas con el espectógrafo magnético Q3D del laboratorio de Maier-Leibnitz en Garching (Alemania). El Q3D ha permitido determinar energías de excitación para los estados del ^{208}Pb con una incertidumbre menor de 10 eV, calibrado a partir de los datos de las energías de excitación recogidos en NDS2007 (Nuclear Data Sheets de 2007 [25]). La precisión con respecto NDS2007 se ha mejorado para unos 50 estados, se han identificado 5 nuevos estados, y se les ha asignado valores de J^π a otros 57 estados. Esto abre las puertas a un estudio fiable de la caoticidad en un núcleo como el ^{208}Pb , doblemente mágico, a partir de un espectro lo más completo, puro y amplio posible.

5.1. Descripción de los niveles

Los 151 niveles corresponden a estados con valores de J entre 0 y 12, con paridades tanto positivas como negativas. Dado que queremos comparar las fluctuaciones espectrales con las predicciones de GOE, será necesario considerar en el reescalado sólo los niveles con las mismas simetrías, que en física nuclear, equivale a comparar sólo niveles con los mismos números cuánticos, generalmente mismo momento angular J y misma paridad π . Sin embargo, las secuencias de niveles que son demasiado cortas no tienen la estadística suficiente y puede llevar a errores. Por ello, eliminaremos del análisis las secuencias con menos de 5 niveles [16].

Los números cuánticos J^π han sido determinados a partir del modelo de capas esquemático para configuraciones partícula-hueco extendido a partir de la inclusión de los elementos de matriz diagonales de la interacción SDI (surface delta interaction). Esto es, aparte de los estados debidos a las configuraciones partícula-hueco, que son resultado de considerar campo medio pero no interacción residual, se incluye la parte diagonal de la interacción residual. Al no incluir los elementos de matriz no diagonales de la interacción residual, el modelo teórico considerado no tiene en cuenta la mezcla de configuraciones. Por tanto, las discrepancias entre el modelo teórico utilizado y los datos experimentales dan cuenta de la interacción residual. Si tuvieramos en cuenta la interacción residual al completo, cada estado con espín J y paridad π sería descrito mediante una mezcla de configuraciones de la partícula con estado (L, J) , y del hueco con (l, j) :

$$|\tilde{E}_x, J^\pi\rangle = \sum_i c_i |E_x(i), J_i^\pi\rangle \quad (31)$$

donde i suma sobre todas las posibles configuraciones LJl_j de la partícula-hueco, y las amplitudes c_i están comprendidas entre $-1 < c_i < +1$.

Así, se puede calcular un valor medio de los elementos de matriz de la interacción residual, V_{ij} , a partir de los datos experimentales obtenidos. V_{ij} se calcula a partir de la diferencia entre la acción del hamiltoniano medida de forma experimental y la acción del modelo de capas sin interacción. Considerando que el hamiltoniano se escribe como $H = H_0 + V_{ij}^{res}$, donde H_0 corresponde al campo medio más la parte diagonal de la interacción residual, la diferencia entre los operadores H da lugar a los elementos de matriz V_{ij} que definen la interacción residual. De esta manera, Heusler *et al* [1] han encontrado que la mezcla de configuraciones depende de la naturaleza de la paridad: las configuraciones con paridad no natural se encuentran, por lo general, poco mezcladas para distancias menores de 100 keV, mientras que las configuraciones con paridad natural, se encuentran fuertemente mezcladas si la distancia entre ellas es menor de 200 keV. Es decir, la interacción residual es mucho más intensa para los estados de paridad natural que para los estados de paridad no natural.

Consideramos que la paridad es natural cuando se cumple lo siguiente:

$$\Pi = (-1)^J \quad (32)$$

Mientras que por el contrario, la paridad no natural será aquella para la cual:

$$\Pi = (-1)^{J+1} \quad (33)$$

De esta manera, podremos clasificar los estados según la naturaleza de su paridad:

- ESTADOS CON PARIDAD NATURAL: $1^-, 2^+, 3^-, 4^+, 5^-, 6^+, 7^-, 8^+$. En total, 71 estados.
- ESTADOS CON PARIDAD NO NATURAL: $2^-, 4^-, 5^+, 6^-, 7^+, 9^+$. En total, 44 estados.

Se encuentra además que los estados de paridad no natural concuerdan de manera más satisfactoria con el modelo teórico utilizado para contrastar los niveles del espectro. Las energías de excitación experimentales se desvían de las teóricas en un máximo de 0.2 MeV, mientras que para los estados de paridad natural, donde la interacción residual es más notable, las energías de excitación experimentales se desvían en hasta 0.5 MeV. En la tabla 1, se describen con más detalle las secuencias de niveles sin reescalar, indicando la longitud, la energía de inicio y final de cada una de ellas.

J^π	N	E_i (KeV)	E_f (KeV)
1^-	7	4842	6076
2^-	9	4230	6086
2^+	9	4086	6193
3^-	19	2615	6191
4^-	14	3475	6012
4^+	7	4324	6099
5^-	15	3198	5993
5^+	6	4962	6102
6^-	8	3920	5686
6^+	9	4424	6037
7^-	5	4037	5694
7^+	8	4867	6023
8^+	8	4611	6026
9^+	5	5010	5901

Tabla 1: Conjunto de secuencias para los estados del ^{208}Pb . N indica la longitud de cada secuencia y E_i , E_f el rango de energía de la secuencia.

5.2. Reescalado

Como ya se ha comentado en secciones anteriores, el análisis de las fluctuaciones del espectro requiere separar la densidad de estados en una parte suave y en una parte fluctuante. Para ello, usaremos la fórmula de la temperatura constante (ec. 29) como punto de partida y trataremos de encontrar el mejor ajuste a la parte suave.

La ecuación depende de tres parámetros libres: T , E_0 y N_0 . Si tenemos en cuenta que lo que queremos es encontrar la parte suave de la densidad, un ajuste con tres parámetros libres puede no resultar adecuado según el caso. El ajuste que queremos encontrar no es el mejor ajuste a los puntos experimentales, sino el mejor ajuste a una función suave que nos permita obtener únicamente las fluctuaciones espectrales. En nuestro caso, tres parámetros libres ajustan “muy bien” a los datos experimentales y obtenemos reescalados que físicamente no tienen sentido:

- Por un lado, esperamos que la parte suave de la densidad crezca de manera exponencial con la energía de excitación. Utilizando tres parámetros libres, la función puede llegar a ajustar “muy bien” y la parte suave de la densidad deja de crecer de forma exponencial. La densidad que obtenemos es lineal, lo cual, sabemos que no es cierto. Cuando esto ocurre, los espaciamientos se acercan más a la unidad y los resultados de los análisis de las fluctuaciones espectrales se desvían hacia GOE por error. Esto es porque un ajuste con demasiados parámetros libres provoca que la densidad suave contenga gran parte de las fluctuaciones. Si, por ejemplo, visualizamos la densidad acumulada de niveles en forma de histograma, las fluctuaciones equivaldrían a los escalones del histograma y la parte suave a la tendencia general del histograma. Empleando una

función con demasiados parámetros libres, en el caso más extremo, podemos llegar a ajustar la función al histograma de manera que siga aproximadamente la forma escalonada del mismo. Sin embargo, aunque estuviéramos ajustando satisfactoriamente los puntos experimentales, las fluctuaciones quedarían dentro de la que consideraríamos la parte suave de la densidad de estados y los resultados estadísticos no tendrían validez.

- Por otra parte, aunque se trate de dar cuenta de la parte suave de la densidad y no de ajustar fielmente los puntos experimentales, no podemos tener en cuenta ajustes para los cuales los valores de los parámetros libres carecen de sentido físico. N_0 representa el número de niveles por debajo de 0, y por tanto, aunque su valor estricto ha de ser 0, podemos dejar que varíe para un mejor ajuste pero siempre teniendo en cuenta que su valor ha de estar próximo a 0. El parámetro E_0 es la energía inicial, por lo que debe de ser del orden de los miles de keV y cercano al valor inicial de la secuencia. Por último, la temperatura T , será aproximadamente de cientos de keV [18].

Para evitar estos problemas, utilizaremos la forma lineal de la ecuación de la temperatura, omitiendo el parámetro N_0 :

$$\log[N(E)] = aE + b \quad (34)$$

donde $a = 1/T$ y $b = -E_0/T$. Los parámetros a y b son diferentes para cada secuencia de niveles. Con ellos, obtendremos la función que mejor ajusta a la parte suave de la densidad y calcularemos las nuevas energías reescaladas. Como ya se vio anteriormente, las energías que representan las fluctuaciones vendrán determinadas por las funciones que representan el mejor ajuste a la parte suave de la densidad acumulada en E , es decir, $\varepsilon_i = \overline{N}(E_i)$. En la tabla 2, se pueden ver los nuevos rangos de energías reescaladas con los que trabajaremos. Como ejemplo, en la figura 7, se muestra el reescalado para las secuencias 1^- , 2^+ , 3^- y 5^- . Para cada una de las secuencias del espectro realizamos un ajuste independiente a partir del cual obtenemos los valores a y b que definen la función de la parte suave de la densidad de estados. Las energías reescaladas ε_i se hallan evaluando esta función sobre las energías sin reescalar E_i . Se comprueba que el parámetro a , que depende exclusivamente de la temperatura $T \sim \text{cte}$, es muy parecido para todos los ajustes del reescalado y se mantiene siempre alrededor de $a \sim 10^{-3} \text{ keV}^{-1}$. Esto dará una temperatura de alrededor de $T \sim 1 \text{ MeV}$, compatible con estudios como el de [18], en el que se obtienen temperaturas para ^{207}Pb y ^{210}Bi de 0.89 y 0.81 MeV respectivamente, teniendo en cuenta que se espera que la temperatura de un núcleo doblemente mágico como el ^{208}Pb sea mayor que la de sus vecinos (figura 6).

J^π	N	ε_i (KeV)	ε_f (KeV)
1^-	7	0.89	7.10
2^-	9	0.91	9.37
2^+	9	0.63	9.60
3^-	19	-0.22	20.24
4^-	14	1.00	13.34
4^+	7	1.01	6.66
5^-	15	1.02	15.31
5^+	6	1.16	5.61
6^-	8	1.27	8.13
6^+	9	0.84	8.87
7^-	5	1.02	4.83
7^+	8	1.21	7.84
8^+	8	1.30	7.57
9^+	5	1.28	5.12

Tabla 2: Secuencias reescaladas. N es la longitud de la secuencia, ε_i representa la energía inicial de la secuencia y ε_f la energía final de la misma.

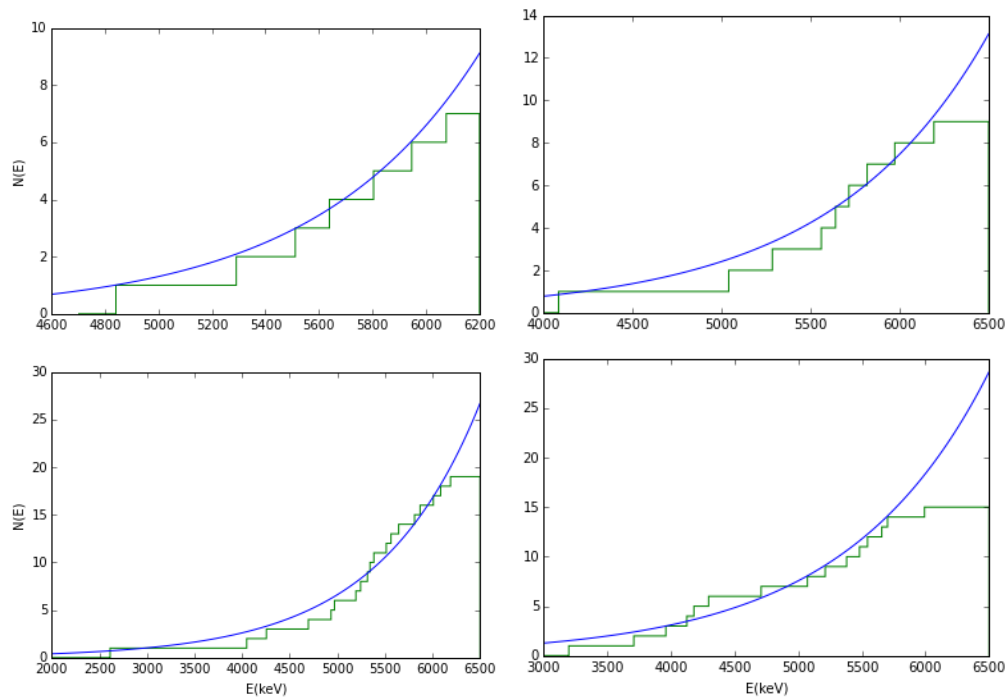


Figura 7: Reescalado para las secuencias 1^- , 2^+ , 3^- y 5^- .

5.3. Distribución de espaciamentos a primeros vecinos

Una vez tenemos el espectro reescalado, podemos proceder con los análisis espectrales de las fluctuaciones. Para ello, calcularemos la distribución de espaciamentos a primeros vecinos $P(s)$. Dado que las secuencias no son suficientemente largas, no podremos calcular la $P(s)$ para cada secuencia de forma individual (notése que para la secuencia más larga, 3^- , con $N = 19$ niveles, el número de espaciamentos será $N - 1 = 18$). Para poder obtener resultados que estadísticamente sean fiables, deberemos unir varias secuencias para calcular su $P(s)$.

En la búsqueda de las posibles manifestaciones del caos en los estados del ^{208}Pb , analizaremos los espaciamentos de los siguientes conjuntos de datos: 1) Para todos los estados (115 espaciamentos), 2) para los estados de paridad par (45 espaciamentos), 3) para los estados de paridad impar (70 espaciamentos), 4) para los estados de paridad natural (71 espaciamentos) y 5) para los estados de paridad no natural (44 espaciamentos). De esta manera, podemos estudiar las posibles manifestaciones de la dinámica caótica en conjuntos de datos que comparten características comunes.

5.3.1. Espectro completo

El conjunto de los espaciamentos obtenidos a partir de todos los estados es el más largo con 115 espaciamentos. A partir de estos espaciamentos, podemos calcular de forma fiable la distribución a primeros vecinos $P(s)$ y su correspondiente distribución acumulada $I(s)$, y comparar ambas con las distribuciones de Poisson y GOE. Para realizar de forma correcta esta comparación, es necesario además, que las distribuciones de espaciamentos estén normalizadas a la unidad ya que tanto en la distribución de Poisson como en la de GOE, la densidad de estados se encuentra normalizada a 1. Por otra parte, como ya se explicó anteriormente, se puede medir de forma cuantitativa la caoticidad de un sistema mediante el parámetro de Brody, w , que interpola entre las distribuciones de Poisson y GOE. Este parámetro se puede calcular tanto a partir de la $P(s)$ como de la $I(s)$, y aunque teniendo que ser similares, su cálculo mediante la $I(s)$ es más exacto pues no depende de la definición de los intervalos del histograma para $P(s)$. Por ello, calcularemos el parámetro de Brody a partir de la $I(s)$.

En la figura 8 podemos ver que la $P(s)$ está lejos de ajustarse perfectamente a una distribución poissoniana, y sin embargo, aunque más cercana a GOE, tampoco se ajusta perfectamente. Se puede decir que los estados del ^{208}Pb presentan una dinámica mixta, ni puramente caótica ni puramente regular. El parámetro $w = 0.68 \pm 0.02$ obtenido a partir del ajuste de la $I(s)$, en la figura 9, nos indica de forma cuantitativa lo que podemos ver de forma aproximada tanto en la $P(s)$ como en la $I(s)$.

El parámetro de Brody calculado a partir de la $P(s)$ corresponde a un valor $w = 0.63 \pm 0.13$. Como se puede ver, los parámetros, aunque no iguales, son similares y dan cuenta de un comportamiento parecido. Sin embargo, al ser más exacto el calculado a partir de la $I(s)$, el parámetro que se tendrá en cuenta de forma general será éste y no el calculado a partir de la $P(s)$.

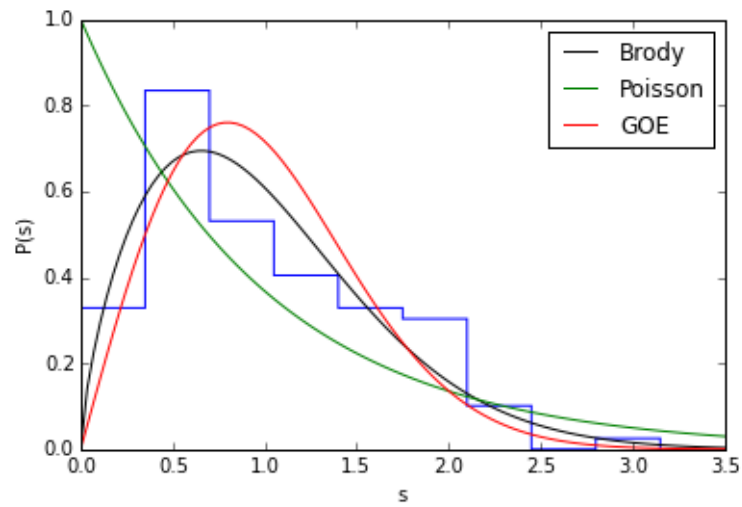


Figura 8: $P(s)$ para el conjunto de espaciamentos de todos los estados del espectro del ^{208}Pb en comparación con las curvas de GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.68 \pm 0.02$.

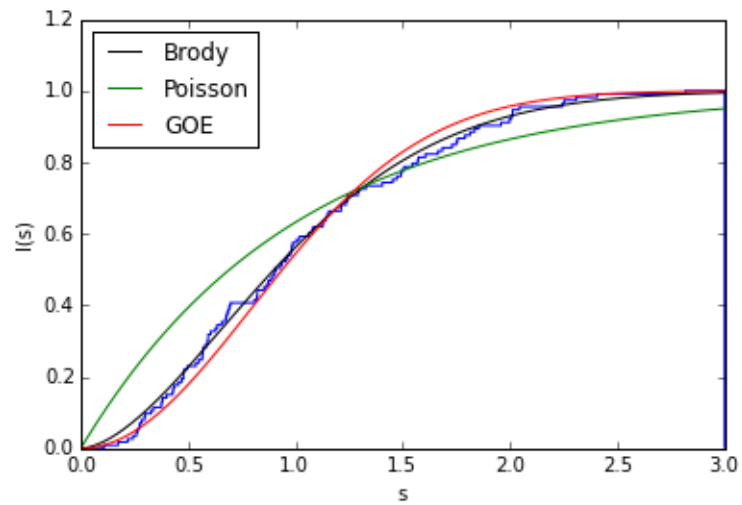


Figura 9: $I(s)$ para el conjunto de espaciamentos de todos los estados del espectro del ^{208}Pb en comparación con las curvas de GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.68 \pm 0.02$.

5.3.2. Estados de paridad par e impar

Se han analizado así mismo la distribución de espaciamentos a primeros vecinos para los estados de paridad par e impar. Como se puede observar en las figuras 10, 11, 12 y 13, no se observan grandes diferencias entre los estados con paridad positiva y negativa. En ambos casos, el parámetro de Brody, $w = 0.61 \pm 0.05$ para estados con paridad par y $w = 0.67 \pm 0.04$ para estados con paridad impar, refleja un comportamiento intermedio entre caótico y regular.

5.3.3. Estados de paridad natural y no natural

Las $P(s)$ e $I(s)$ de los estados de paridad natural y no natural muestran una diferencia significativa entre ellas. Por un lado, tenemos la distribución a primeros vecinos de los estados de paridad natural que manifiestan claramente una dinámica de niveles muy caótica. En las figuras 14 y 15, se muestran la $P(s)$ y la $I(s)$, respectivamente, junto con la curva de su ajuste a Brody. El parámetro de Brody calculado para estos estados corresponde a $w = 0.85 \pm 0.02$, valor que concuerda muy satisfactoriamente con GOE. Cabe señalar que el parámetro de Brody que mejor ajusta a GOE realmente es $w = 0.957$ y no $w = 1$ [26]. El valor de $w = 1$ es el mejor valor para que ambas $P(s)$ coincidan de forma analítica. Por tanto, podemos decir que obtener un valor de $w = 0.85$ da una clara evidencia de un comportamiento caótico. Tanto en la $P(s)$ como en la $I(s)$ se observa que la curva de ajuste a Brody casi coincide con la curva de la distribución GOE. En concreto, esta coincidencia se aprecia mucho mejor en la figura de la densidad acumulada, donde se ve que la distribución de Brody sigue claramente la distribución de GOE. Podemos ver que en la $P(s)$ de los estados de paridad natural, la repulsión de niveles es mucho más notable que para los estados de paridad no natural. El número de niveles con espaciamentos muy pequeños cercanos a 0, con $s < 0.3$, es más del doble en los estados de paridad no natural que en los de paridad natural. Esto es debido al carácter caótico que se manifiesta en los estados de paridad natural.

El parámetro de Brody para los estados de paridad no natural, $w = 0.43 \pm 0.03$, por el contrario, denota un comportamiento intermedio. En las figuras 16 y 17 podemos ver la $P(s)$ e $I(s)$ para los estados de paridad no natural. Esta gran diferencia que se tiene en función de la naturaleza de la paridad es un efecto notable de la interacción residual. Según el estudio de Zelevinsky *et al.* [27], en donde se han estudiado las fluctuaciones de forma teórica en función de una interacción residual variable y en base al modelo de capas, a medida que la interacción residual crece, los niveles de energía se desvían hacia una distribución descrita por GOE y se alejan de Poisson. Esto es, a mayor interacción residual, la dinámica se vuelve más caótica. En el modelo de capas, el campo medio da lugar a un movimiento regular, mientras que la introducción de una interacción residual resulta en la mezcla de los estados y destruye el comportamiento regular que el campo medio otorgaba. Este efecto se ha podido observar con un espectro experimental como el del ^{208}Pb . La diferencia tan grande entre los parámetros de Brody para los estados de paridad natural y no natural pone de manifiesto este efecto y es la primera vez que se tiene constancia de ello a partir de datos experimentales.

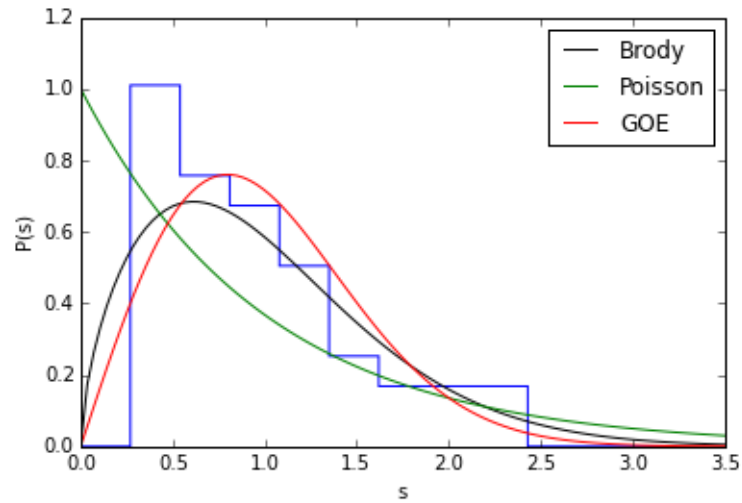


Figura 10: $P(s)$ para los espaciamientos de los estados de paridad positiva del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.61 \pm 0.05$.

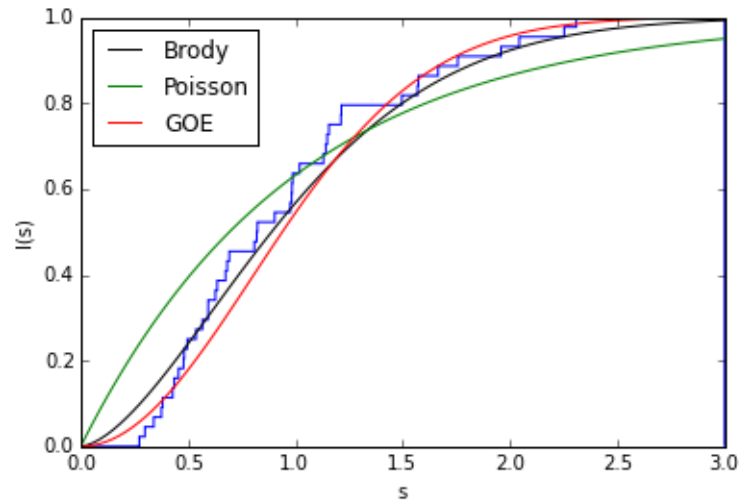


Figura 11: $I(s)$ para los espaciamientos de los estados de paridad positiva del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.61 \pm 0.05$.

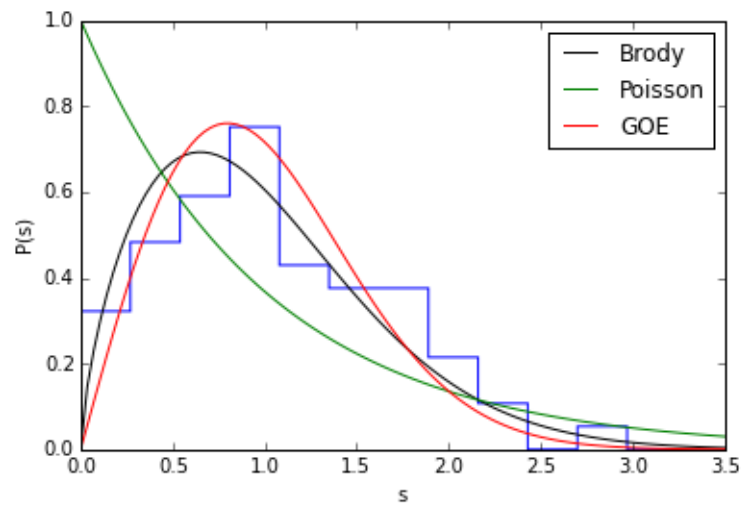


Figura 12: $P(s)$ para los espaciamentos de los estados de paridad negativa del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.67 \pm 0.04$.

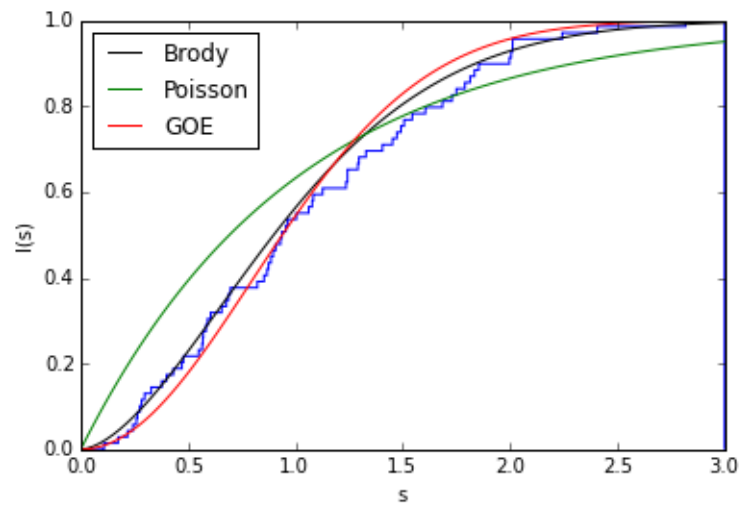


Figura 13: $I(s)$ para los espaciamentos de los estados de paridad negativa del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.67 \pm 0.04$.

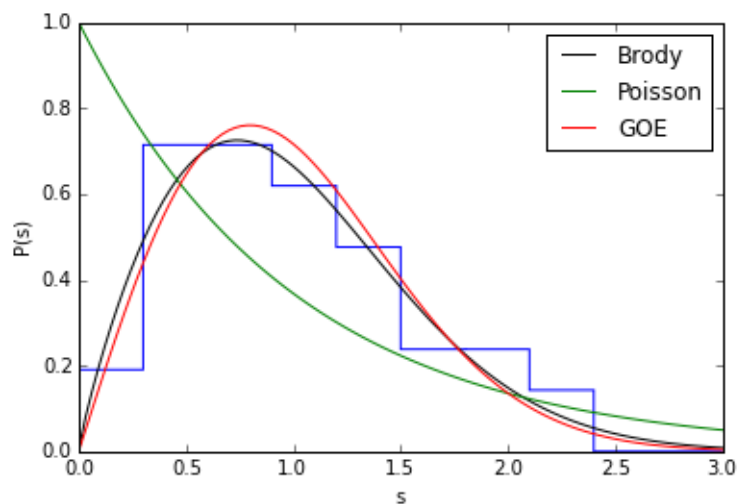


Figura 14: $P(s)$ para los espaciamentos de los estados de paridad natural del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.85 \pm 0.02$.

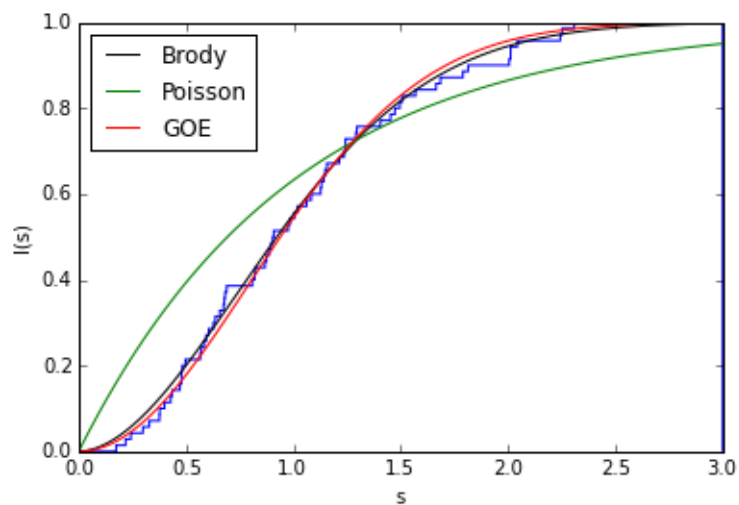


Figura 15: $I(s)$ para los espaciamentos de los estados de paridad natural del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.85 \pm 0.02$.

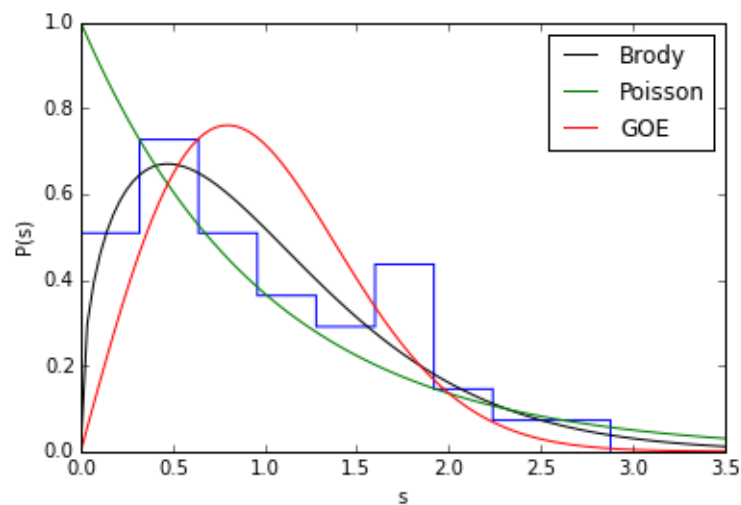


Figura 16: $P(s)$ para los espaciamientos de los estados de paridad no natural del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.43 \pm 0.03$.

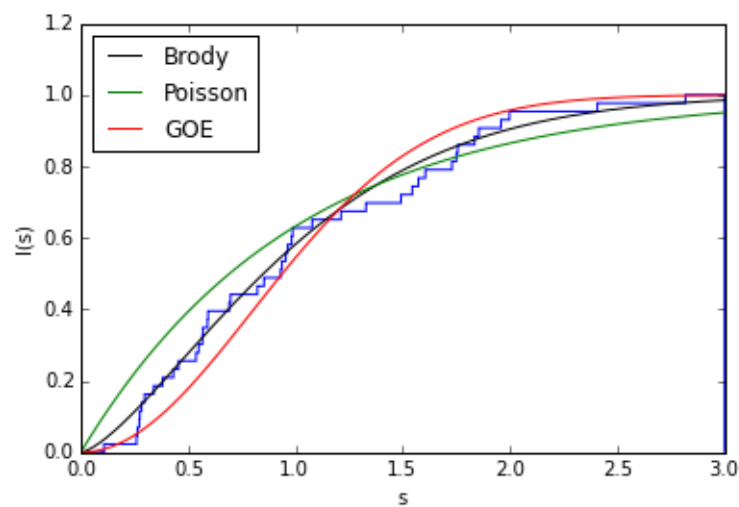


Figura 17: $I(s)$ para los espaciamientos de los estados de paridad no natural del espectro del ^{208}Pb , en comparación con las curvas correspondientes a GOE, Poisson y el mejor ajuste a Brody, $w = 0.43 \pm 0.03$.

6. Conclusiones

El espectro experimental para el ^{208}Pb medido por Heusler *et al.* [1] es el espectro más largo disponible a día de hoy para un único núcleo. No sólo es excepcionalmente largo, con 151 niveles, sino que además, ha sido posible identificar el espín J y paridad π para todos los estados de forma precisa, dando lugar así, a largas secuencias J^π de niveles. Esto conforma el espectro más *largo*, *completo* y *puro* conocido para un núcleo y permite un análisis estadístico de las fluctuaciones espectrales fiable y de calidad.

A pesar de que el núcleo es un sistema paradigmático del caos cuántico, la falta de datos experimentales a bajas energías no ha permitido el estudio en profundidad que confirme la manifestación del caos en estos sistemas. El estudio pionero de [15] arrojó luz sobre el tema y mostró evidencias de caos en las regiones de resonancias de protones y neutrones. Los estudios concernientes a la región energética cercana al estado fundamental [16], [17], [18], [19] señalan una dependencia de la caoticidad según el número másico A y la deformación nuclear pero sin embargo, se necesitan más datos experimentales que lo confirmen. El espectro utilizado para el ^{208}Pb nos da la posibilidad, por primera vez, de analizar las fluctuaciones espectrales para un único núcleo en la región de baja energía, $E_x < 6.20$ MeV, sin necesidad de unir secuencias de diferentes núcleos.

Hemos encontrado secuencias de estados que exhiben claramente un comportamiento caótico, mientras que otras exhiben un comportamiento intermedio entre caótico y regular. La comparación del espectro experimental con el modelo de capas esquemático extendido (eSM) para configuraciones 1p-1h indica que estos dos comportamientos tan diferentes se pueden explicar según la intensidad de la interacción residual. Para estados de paridad natural, la interacción residual es mucho más intensa que para estados de paridad no natural [1], y esta diferencia se aprecia claramente en los resultados de los análisis de las fluctuaciones espectrales. La distribución de espaciamientos a primeros vecinos ($P(s)$ y $I(s)$) indica que las fluctuaciones espectrales de los estados de paridad natural exhiben un comportamiento cercano al predicho por la colectividad GOE, que es la que caracteriza el comportamiento caótico. El parámetro de Brody, con el que estudiamos de forma cuantitativa la caoticidad de los sistemas, tiene un valor de $w = 0.85 \pm 0.02$, muy cercano al valor para una distribución puramente GOE, $w = 0.957$. Para los estados de paridad no natural, encontramos un valor para el parámetro de Brody de $w = 0.43 \pm 0.03$, alejado de un comportamiento GOE y más cercano a Poisson ($w = 0$). En la tabla 3, se resumen los resultados obtenidos para todos los conjuntos de estados. Según la intensidad de la interacción residual, vemos que el comportamiento del núcleo será más o menos caótico. Esto confirma, por primera vez con un espectro experimental, que los estados que se describen mediante el campo medio, sin interacción residual, exhiben un comportamiento regular y que es la interacción residual la que elimina este comportamiento regular y da lugar a la manifestación del caos en los núcleos.

Paridad	Número de espaciamientos	w
Todos	115	0.68 ± 0.02
Natural	71	0.85 ± 0.02
No natural	44	0.43 ± 0.03
Positiva	45	0.61 ± 0.05
Negativa	70	0.67 ± 0.04

Tabla 3: Resultados obtenidos para el parámetro de Brody w para las diferentes secuencias.

7. Agradecimientos

Quiero agradecer a la Laura Muñoz Muñoz todo su esfuerzo y dedicación. No hubiera podido realizar este trabajo sin todas las ayudas y directrices de Laura. ¡Agradezco enormemente su paciencia conmigo y sus ganas de enseñarme!

Referencias

- [1] A. HEUSLER, R.V. JOLOS, T. FAESTERMANN, R. HERTENBERGER, H.F. WIRTH, P. VON BRENTANO., *Phys. Rev. C* **93**, 054321 (2016).
- [2] H. G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos*, VCH, Physic Verlag, Weinheim (1988).
- [3] E. LORENZ, *The essence of Chaos*, UCL Press Limited (1995).
- [4] E. OTT, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge (1993).
- [5] M. BERRY, "Quantum chaology, not quantum chaos", *Physica Scripta* **40**, 335 (1989).
- [6] A. EINSTEIN, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* **19**, 82 (1917).
- [7] M. C GUTZWILLER, *J. Math. Phys.* **12**, 343 (1971).
- [8] R. A. MOLINA, *Caos cuántico en sistemas hamiltonianos de muchos cuerpos*, Tesis Doctoral (2001).
- [9] EUGENE P. WIGNER, *Random matrices in physics*, *SIAM Review* **9**, 1-23 (1967).
- [10] O. BOHIGAS, M. J. GIANNONI, C. SCHMIT, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [11] M. V. BERRY, M. TABOR, *Proc. Roy. Soc. London* **A356**, 375 (1977).
- [12] J. M. G. GÓMEZ, R. A. MOLINA, A. RELAÑO, AND J. RETAMOS, *Phys. Rev.* **E66**, 036209 (2002).
- [13] L. MUÑOZ, *Caos cuántico en sistemas esquemáticos de partículas idénticas*, Tesis Doctoral (2008).
- [14] H. A. WEIDENMÜLLER, G. E. MITCHELL, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 539 (2009).
- [15] R. U. HAQ, A. PANDEY, AND O. BOHIGAS, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1086 (1982).
- [16] J. F. SHRINER, JR., G. E. MITCHELL AND T. VON EGIDY., *Z. Phys. A Hadrons and Nuclei* **338**, 309-318 (1991).
- [17] T. VON EGIDY, A. N. BEHKAMI, H. H. SCHMIDT, *Nucl. Phys.* **A454**, 109 (1986).
- [18] T. VON EGIDY, H. H. SCHMIDT, A. N. BEHKAMI, *Nucl. Phys.* **A481**, 189-206 (1988).
- [19] A. Y. ABUL-MAGD, H. A. WEIDENMILLER, *Phys. Lett.* **162 B**, 223 (1985).

-
- [20] R.A. MOLINA, J. RETAMOS, L. MUÑOZ, A. RELAÑO, E. FALEIRO., *Phys. Lett. B* **644**, 25–32 (2007).
- [21] A. GILBERT, A.G.W. CAMERON, *Can. J. Phys.* **43**, 1446 (1965).
- [22] M. GUTTORMSEN, M. HJORTH-JENSEN, E. MELBY, J. REKSTAD, A. SCHILLER, AND S. SIEM., *Phys. Rev. C* **63**, 044301 (2001).
- [23] T. VON EGIDY, D. BUCURESCU., *J. Phys.: Conf. Ser.* **338**, 012028 (2012).
- [24] A. BOHR, B.R. MOTTELSON, *Nuclear structure, volumen 1: single particle motion*, 154-155 (1998).
- [25] M. J. MARTIN, *Nucl. Data Sheets*, 108:1583 (2007).
- [26] T. A. BRODY, J. FLORES, J. B. FRENCH, P. A. MELLO, A. PANDEY, S. S. M.WONG, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981).
- [27] V. ZELEVINSKY, B.A. BROWN, N. FRAZIER, M. HONROI, *Phys. Rep.* **276**, 85 (1996).