

Correcciones radiativas en la reacción cuasielástica $^{12}\text{C}(e,e'p)^{11}\text{B}$

Trabajo Académicamente Dirigido

Grupo de Física Nuclear
Depto. Física Atómica, Molecular y Nuclear
Universidad Complutense de Madrid

Daniel Sánchez Parcerisa

Dirigido por Joaquín López Herraiz y José Manuel Udías Moinelo

Julio de 2009

Índice

Índice de figuras	4
1. Introducción	5
2. Experimentos de dispersión de electrones por núcleos	7
2.1. Teoría	7
2.2. Datos experimentales	9
2.3. Simulación Monte Carlo.....	11
3. El problema de la radiación en experimentos (e,e'p)	13
3.1. Origen de la radiación	13
3.2. Efectos de la radiación	16
3.3. Corrección de la radiación	18
3.3.1. Método clásico (desconvolución directa)	21
3.3.2. Algoritmos estadístico-iterativos.....	22
3.3.3. Corrección multidimensional	24
4. Resultados	27
4.1. Corrección del espectro de energía	27
4.2. Corrección multidimensional.....	29
5. Conclusiones.....	33
Bibliografía.....	35

Índice de figuras

Figura 1: Variables cinemáticas de la reacción (e, e'p)	8
Figura 2. Diagrama del montaje experimental de JLAB	10
Figura 3. Esquema de la cinemática del experimento con el blanco de C	11
Figura 4. Diagramas de Feynman de las interacciones principales que conforman la radiación interna	14
Figura 5. Pérdidas radiativas y colisionales para electrones en Cu.....	15
Figura 6. Diagrama de Feynman para (e, e'p) con emisión de un fotón real.....	16
Figura 7. Efecto de la radiación en el módulo de P_{miss}	18
Figura 8. Simulación del espectro de Emiss del estado fundamental del ^{12}C , con y sin radiación	19
Figura 9. Modelado de la cola radiativa, con parámetros $p_{NR} = 0.474$, $\Delta E = 0.55$ Mev .	20
Figura 10. Deducción geométrica de la corrección del módulo de P_{miss} en peaking approximation	25
Figura 11. Aplicación de los algoritmos de desradiado en una dimensión a datos de Monte Carlo de la capa p del ^{12}C	27
Figura 12. Aplicación de los algoritmos de desradiado en una dimensión a datos de la capa p del ^{12}C del experimento E06-007 de JLAB.....	28
Figura 13. Detalle en escala logarítmica de la aplicación de los algoritmos de desradiado en una dimensión a datos de la capa p del ^{12}C del E06-007 de JLAB.....	28
Figura 14. Aplicación del algoritmo de desradiado multidimensional sobre el módulo de p_{miss} en datos simulados por MCEEP de la capa p del ^{12}C	29
Figura 15. Aplicación del algoritmo de desradiado multidimensional sobre el módulo de p_{miss} en datos simulados por MCEEP de la capa p del ^{12}C	30
Figura 16. Representación de la corrección bidimensional (E_{miss} , p_{miss})	31

1. Introducción

La dispersión de electrones por núcleos es una de las principales herramientas en el estudio de la estructura nuclear. En la zona cuasielástica de energías, el proceso más probable es aquél en el que la interacción electromagnética electrón-núcleo tiene como resultado la extracción de un protón.

La detección en coincidencia del electrón dispersado y el protón extraído permite, conocida con precisión la cinemática del haz de electrones, realizar un balance de energía y momento y deducir información sobre propiedades monoparticulares, como son la distribución de momentos (P_{miss}) y energías (E_{miss}) de los nucleones dentro del núcleo. El espectro de E_{miss} que se obtiene en estos experimentos representa básicamente la energía de ligadura que tenían en el núcleo los protones extraídos.

Sin embargo, al ir atravesando el blanco, el electrón incidente, el electrón dispersado y el protón extraído pueden sufrir pérdidas de energía por interacción con otros núcleos (procesos de radiación externa), con lo que el balance energético de la reacción ($e, e'p$) se ve afectado. Además, en la interacción con el núcleo donde se produce la reacción ($e, e'p$), el electrón puede generar radiación de frenado (radiación interna), emitiéndose fotones con una cierta energía. El conjunto de todos estos procesos origina una deformación y emborronamiento del espectro de energías y momentos.

Históricamente se han propuesto diversas estrategias para corregir los efectos de la radiación en los espectros obtenidos experimentalmente (Ent et al., 2001; Templon et al., 1999). Tradicionalmente se ha utilizado un método de desconvolución directa, basado en cálculos de electrodinámica cuántica (Borie & Drechsel, 1971) y bajo ciertas aproximaciones.

En este trabajo se ha aplicado un algoritmo iterativo de máxima verosimilitud que proporciona resultados muy satisfactorios a la hora de realizar correcciones radiativas. La idea, ya mencionada en (Templon et al., 1999), reside en sustituir los métodos de desconvolución directa de la señal por un algoritmo iterativo, llamado EM-ML (Dempster, Laird, & Rubin, 1977), que parte de una solución inicial trivial, le

aplica un proceso de radiado, compara el espectro radiado con el espectro obtenido experimentalmente, y en función del resultado, corrige el espectro de partida.

Inicialmente se ha comprobado su validez en simulaciones Monte Carlo, y una vez validado el método, se ha aplicado a un espectro real correspondiente a la reacción $^{12}\text{C}(e,e'p)$ a partir de datos del acelerador de electrones del Jefferson Lab (JLAB, Virginia, USA).

Como resultado, se ha desarrollado y probado un método iterativo de corrección radiativa de espectros $(e,e'p)$ que produce resultados fiables en datos tanto simulados como reales, con la principal ventaja de una mayor robustez ante el ruido que los métodos tradicionales.

Además de esto, se ha utilizado la probabilidad de radiación obtenida a partir del espectro de energía para realizar una corrección multidimensional, bajo la *peaking approximation*, del resto de variables cinemáticas del experimento. Los resultados preliminares de la aplicación de este algoritmo a datos simulados muestran una corrección óptima de los espectros de $|\mathbf{p}_{\text{miss}}|$ y de la energía del fotón virtual intercambiado.

2. Experimentos de dispersión de electrones por núcleos

La dispersión de electrones de alta energía por núcleos es una herramienta muy útil para el estudio de la estructura nuclear. Debido a la debilidad de la fuerza electromagnética comparada con la fuerte, la interacción entre los electrones del haz y los protones del núcleo puede describirse por el intercambio de un fotón virtual. Además, el fotón producido puede muestrear el volumen atómico completo, y no sólo la superficie, como ocurriría con una sonda hadrónica. Sin embargo, el uso de electrones tiene también ciertas desventajas: en primer lugar, una interacción más débil implica una sección eficaz más baja, y por tanto, la necesidad de un mayor tiempo de haz para realizar medidas. Y en segundo lugar, la escasa masa de los electrones hace que los procesos de radiación de frenado cobren una mayor importancia, de tal modo que se hace imprescindible corregir los datos experimentales de estos efectos.

Según la energía del electrón incidente, el proceso será **elástico**, (e, e'), en cuyo caso, los picos en el espectro revelarán resonancias de estados excitados del núcleo; o **inelástico** ($e, e'p$), donde el electrón tiene la energía suficiente para arrancar un protón del núcleo, y los picos del espectro de energía estarán relacionados con los estados excitados del núcleo hijo.

2.1. Teoría

Usando una notación estándar, designamos el cuadrimomento, energía total y trimomento de los participantes de la reacción, en el sistema de coordenadas de laboratorio, como:

Electrón incidente: $k_i^\mu = (E_i, \mathbf{k}_i)$	Electrón dispersado: $k_f^\mu = (E_f, \mathbf{k}_f)$
Núcleo blanco: $p_A^\mu = (E_A, \mathbf{p}_A)$	Núcleo blanco: $p_B^\mu = (E_B, \mathbf{p}_B)$
Energy-momentum transferred: $q^\mu = k_i - k_f = (w, \mathbf{q})$	Protón dispersado: $p_p^\mu = (E_p, \mathbf{p}_p)$

Donde el electrón es ultrarrelativista, de modo que se puede considerar que $m_e = 0$ y su momento y energía coinciden.

La cinemática de la reacción $A(e,e'p)B$ se muestra, en aproximación de Born, en la Figura 1. La figura puede dividirse en dos partes: la parte del electrón y la parte del blanco. En el lado del electrón, el plano definido por los momentos de los electrones incidente y dispersado es el llamado plano de scattering, con el ángulo de difusión denotado como θ_e . En el lado del blanco, el plano definido por el vector de transferencia de momento \mathbf{q} y el momento del protón dispersado se llama plano de eyección, con el ángulo entre el trimomento transferido \mathbf{q} y el momento del protón \mathbf{p}_p denotado como θ_{pq} . El ángulo que forman entre sí estos dos planos se denomina ángulo fuera del plano, y se denota por ϕ .

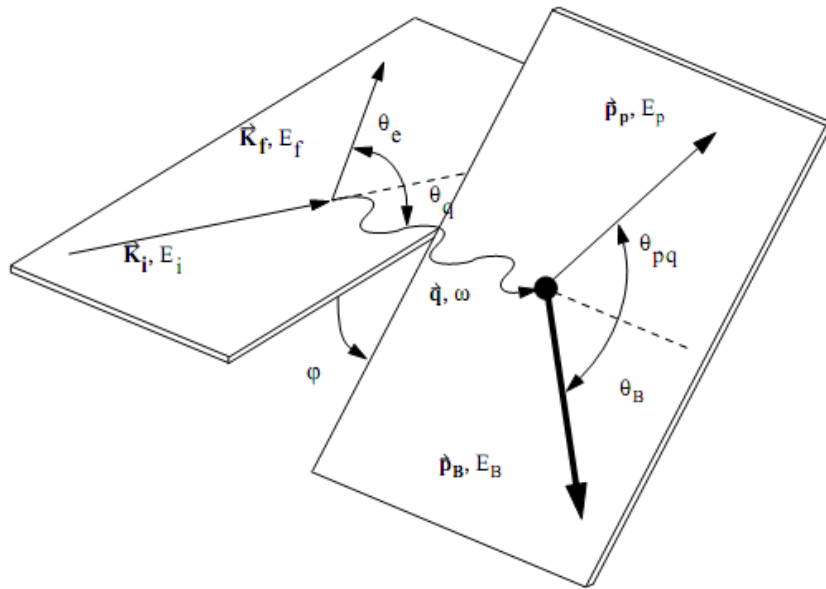


Figura 1: Variables cinemáticas de la reacción (e, e'p)

En este tipo de experimentos, las cantidades medibles experimentalmente son los trimomentos de las partículas que intervienen en la reacción: \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_f y \mathbf{p}_p . La energía total del protón dispersado se obtiene teniendo en cuenta su masa en reposo, $E_p = \sqrt{M_p^2 + p_p^2}$. En el sistema de referencia del laboratorio, con el blanco en reposo, su cuadrimomento se escribe como $p_A = (M_A, \mathbf{0})$, y el cuadrimomento del fotón transferido se escribe, a partir de los cuadrimomentos de los electrones incidente y dispersado, como $q^\mu = k_i - k_f$.

Las dos cantidades principales son el “momento perdido” y la “energía perdida”, a las que nos referiremos en adelante por sus nombres en inglés, \mathbf{p}_{miss} y E_{miss} .

$$\mathbf{p}_{miss} = \mathbf{p}_p - \mathbf{q}$$

$$E_{miss} = w - T_p - T_B$$

donde T_p y T_B son las energías cinéticas del protón arrancado y del núcleo hijo, respectivamente. Explícitamente,

$$E_{miss} = w - \left(\sqrt{\mathbf{p}_p^2 + m_p^2} - m_p \right) - \left(\sqrt{\mathbf{p}_B^2 + M_B^2} - M_B \right)$$

Y, por conservación del momento en el vértice, tenemos:

$$\mathbf{p}_{miss} = \mathbf{p}_p - \mathbf{q} = -\mathbf{p}_B$$

Finalmente, utilizando conservación de energía en el vértice de la reacción, y reescribiendo la masa del núcleo residual en función de las energías y los momentos, podemos eliminar de E_{miss} las variables cinemáticas referentes al núcleo residual, cuyas condiciones desconocemos. El resultado es

$$E_{miss} = m_p - M_A + \sqrt{(w + M_A - E_p)^2 - \mathbf{p}_{miss}^2}$$

Para describir la interacción entre el electrón y el núcleo blanco, en primer orden de aproximación se utiliza la Aproximación de Impulso de Onda Plana (PWIA), bajo la cual el fotón virtual es totalmente absorbido por el protón, ignorando otras posibles interacciones que pueda haber sufrido hasta ser detectado.

Bajo esta aproximación, \mathbf{p}_{miss} es el momento que tenía el protón eyectado dentro del núcleo, antes de ser impactado por el electrón, y E_{miss} es la energía de ligadura de dicho protón.

2.2. Datos experimentales

Los experimentos de $(e, e'p)$ se basan en la detección en coincidencia del electrón dispersado y el protón arrancado del núcleo, junto con un análisis calorimétrico de ambos.

Los datos con los que se ha trabajado en este TAD pertenecen al experimento E06-007, llevado a cabo en la sala A (*Hall A*) del Thomas Jefferson Accelerator Facility (JLAB,

2009). Éste acelerador produce haces de electrones de hasta 4 GeV en tres salas independientes (Figura 2). En la sala A coexisten dos espectrómetros de alta resolución, que utilizamos para detectar en coincidencia los electrones dispersados y los protones extraídos del blanco. En el experimento E06-007, se utilizaron dos tipos de blancos: un blanco de plomo recubierto por dos láminas de diamante, y un blanco de geometría similar compuesto únicamente por grafito. Los datos analizados en este trabajo pertenecen a este último.

La intensidad medida en los detectores es de unos $40 \mu\text{C/s}$, lo que supone un haz de $2,5 \cdot 10^{14} \text{ e}^-/\text{s}$. Dicho haz se emite de forma continua, aunque se detecta en paquetes con una frecuencia aproximada de 500 MHz.

Los datos de partida para el análisis de datos se encuentran ya en forma de Ntuplas de ROOT (Brun & Rademakers, 1997), una estructura de datos que almacena en distintas ramas de un árbol toda la información relativa a cada evento individual registrado en el dispositivo experimental, integrando los datos procedentes de cada uno de los detectores, y las principales variables cinemáticas calculadas a partir de ellos.

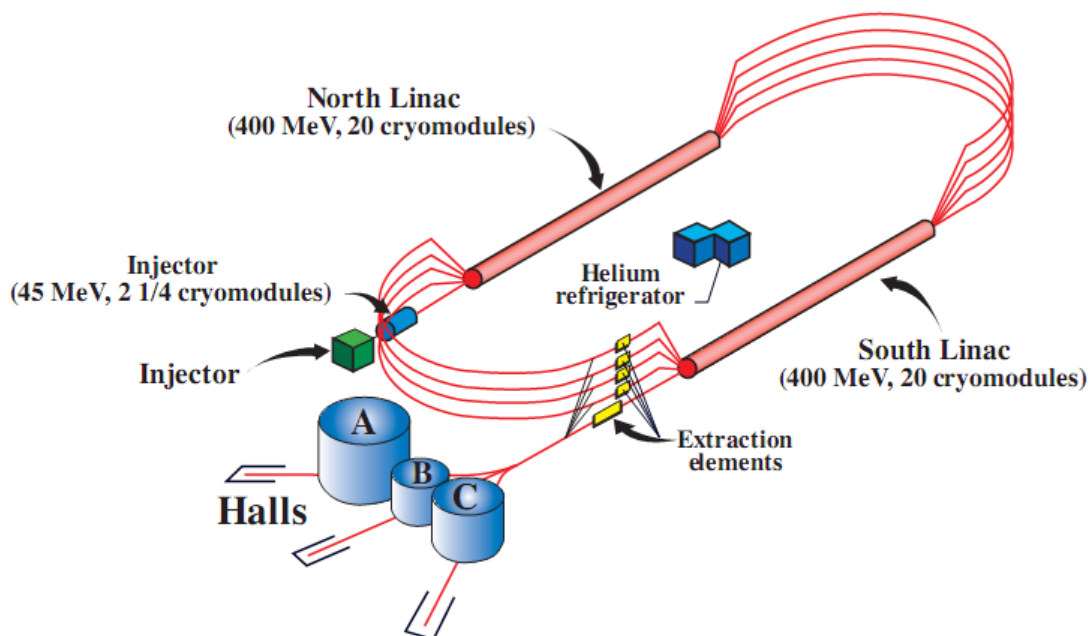


Figura 2. Diagrama del montaje experimental de JLAB

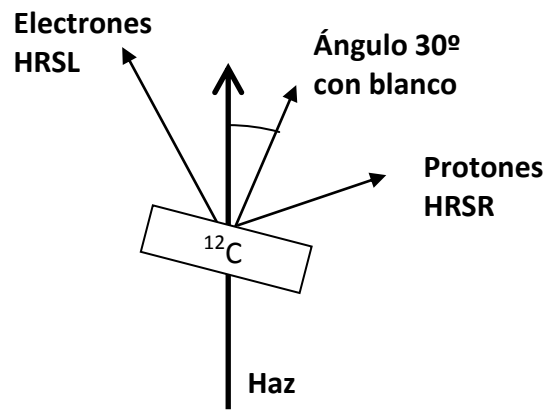


Figura 3. Esquema de la cinemática del experimento con el blanco de C

2.3. Simulación Monte Carlo

Una dificultad típica de los experimentos de $(e,e'p)$ es la forma de incluir en el análisis las aceptancias (angulares, espaciales y en energías) de los detectores. Para solucionar este problema, o bien se aplican a los datos cortes muy restrictivos, de tal forma que se minimicen los efectos de la aceptación de los detectores, lo cual conlleva una merma considerable de la estadística, o la única opción es estudiar cuidadosamente la respuesta de los detectores, realizando una simulación detallada de los mismos ante los fenómenos físicos que se espera analizar en ellos, de modo que sea posible corregir los datos medidos de efectos derivados de la aceptación de los detectores.

Además, las simulaciones Monte Carlo permiten controlar diferentes parámetros físicos del experimento y estudiar las diferentes interacciones en condiciones no accesibles experimentalmente, por ejemplo, separando los efectos de los distintos procesos que intervienen.

Para estas simulaciones se ha utilizado el paquete MCEEP, el estándar de facto para todos los experimentos del Hall A. El paquete incluye modelos bien desarrollados de los espectrómetros, así como modelos físicos de los procesos que componen la interacción $(e,e'p)$.

Los datos simulados, al igual que los datos reales, se encuentran en forma de Ntuplas de ROOT, lo cual hace muy sencillo su análisis conjunto y comparación. El conjunto de datos concreto que se ha utilizado para este Trabajo es el descrito en (Herraiz, 2009), para el blanco de ^{12}C .

3. El problema de la radiación en experimentos (e,e'p)

El origen electromagnético de la interacción electrón-protón complica sensiblemente el análisis de los experimentos de (e,e'p). Por un lado, la emisión y reabsorción de fotones virtuales origina variaciones en la sección eficaz, que han de ser corregidas. Por otro lado, la emisión de fotones reales (debidos a la radiación de frenado que pueden emitir los electrones) varía no solamente la sección eficaz, sino el balance de energía y momento de la reacción. Es necesario modelar y corregir estos procesos a la hora de interpretar los datos experimentales, ya que su efecto puede resultar muy importante.

3.1. Origen de la radiación

Se consideran principalmente tres efectos para las correcciones radiativas (Leo, 1994). En primer lugar, la llamada **radiación interna**, que comprende los efectos de los fotones (reales o virtuales) radiados por el electrón en el campo coulombiano del núcleo con el que interacciona. En segundo lugar, la **radiación externa**, que describe la radiación del electrón en el seno de otros núcleos distintos al de la interacción. Y por último lugar, y con menor importancia, el **stragglng de Landau**, cuyo efecto es un leve ensanchamiento de los picos en el espectro de energías, debido a ionizaciones de los átomos del blanco, y un desplazamiento global.

La radiación interna, descrita por Schwinger (Schwinger, 1949) y por Mo y Tsai (Mo & Tsai, 1969), tiene, salvo para blancos de anchura muy grande, la mayor parte de la contribución radiativa. La Figura 4 describe los procesos físicos que la componen. Los procesos (a) y (b) corresponden con la emisión de un fotón real, (a) para el electrón incidente y (b) para el dispersado; los procesos (c) y (d) resultan en la renormalización de la masa del electrón, (c) incidente y (d) dispersado, el proceso (e) en una renormalización completa del vértice, y el proceso (f) en una renormalización del fotón virtual debida a la polarización del vacío. Además de estos procesos, la emisión de múltiples fotones (Yennie, Frautschi, & Suura, 1961) o las interacciones mediadas por más de un fotón virtual, en estudio en la actualidad (Afanasev, 2008) pueden tener un efecto relevante

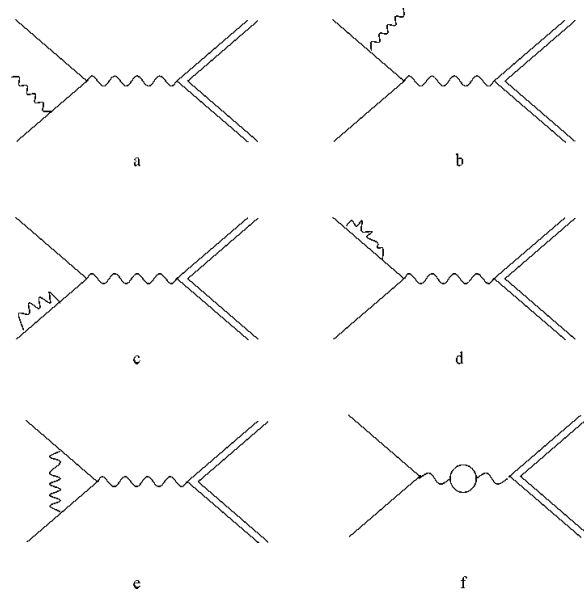


Figura 4. Diagramas de Feynman de las interacciones principales que conforman la radiación interna

La radiación externa es un proceso mucho más sencillo de describir, ya que su efecto puede promediarse en los distintos núcleos, provocando una pérdida de energía promedio al atravesar el electrón cierta anchura de material.

En general, la pérdida de energía de un electrón que atraviesa un medio es la suma de las pérdidas de energía colisionales, descritas por la conocida fórmula de Bette-Bloch, y las pérdidas de energía por *Bremstrahlung*. Para energías del orden del GeV, como las del haz de electrones producidos en el Hall A, las pérdidas por radiación resultan dominantes, como se muestra en la Figura 5.

Para modelar las pérdidas por radiación externa hay que tener en cuenta cada uno de los materiales que atraviesa el haz de electrones (aire, blindajes del experimento, detectores) además del blanco. Reproduciendo el trabajo de (Templon et al., 1999), cada capa sucesiva se puede modelar mediante la distribución de Tsai para un radiador estrecho (Tsai, 1974), que da la probabilidad de que un electrón de energía E_0 emita un fotón de energía k al atravesar t longitudes de radiación de un material. La expresión exacta para esta distribución es

$$I_{ext}(E_0, k, t) = \frac{bt}{\Gamma(1 + bt)} \left(\frac{k}{E_0}\right)^{bt} \frac{1}{k} \left[1 - \frac{k}{E_0} + \frac{3}{4} \left(\frac{k}{E_0}\right)^2\right],$$

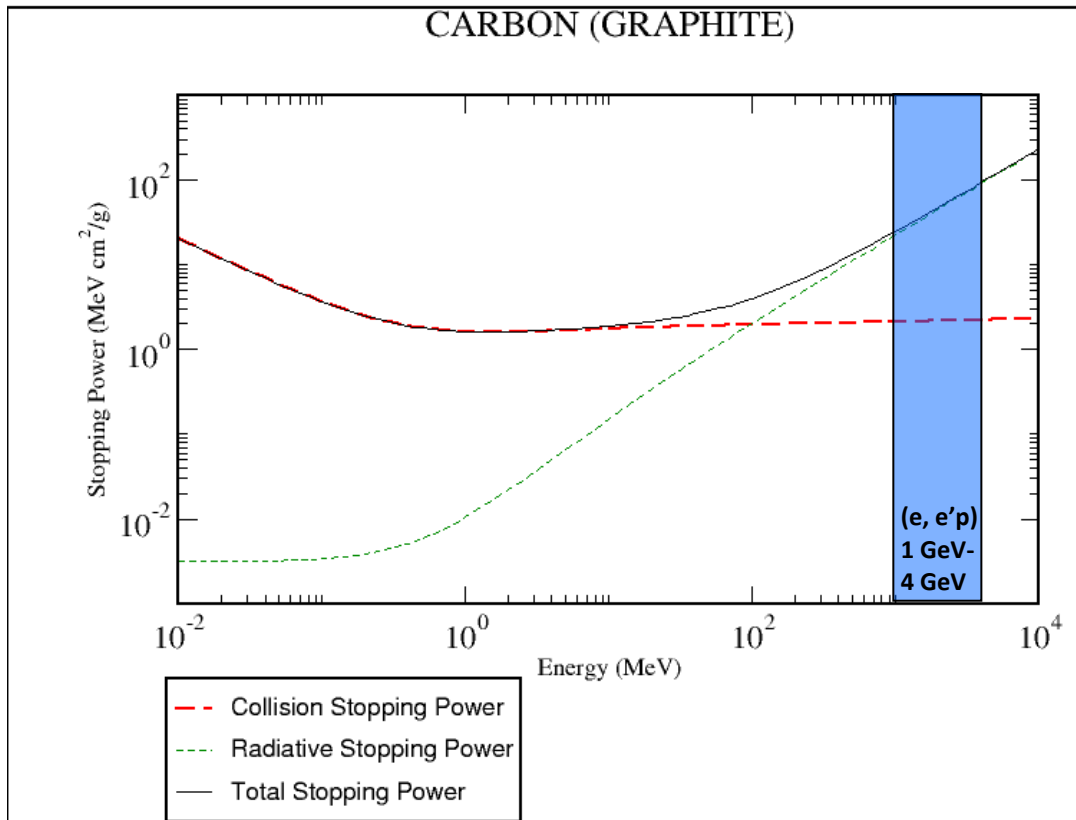


Figura 5. Pérdidas radiativas y colisionales para electrones en Cu

donde el parámetro b define el material atravesado, y viene dado por la expresión

$$b = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{Z^2 + Z}{Z^2 L_{rad} + Z L_{rad}'} \right),$$

en la que los parámetros L_{rad} y L_{rad}' vienen definidos y tabulados en la tabla B del citado artículo.

Por otra parte, las pérdidas colisionales (por ionizaciones de los átomos del blanco) vendrán dadas por la fórmula de Bette-Bloch para electrones. Su efecto, a pesar de ser pequeño comparado con las pérdidas de radiación, es apreciable: produce un desplazamiento global del orden de 1 MeV del espectro de energías.

Reproduciendo el cálculo de (MCEEP, 2009), sustituimos en la fórmula de Bette-Bloch (Leo, 1994),

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{\tau^2(\tau + 2)}{2 \left(\frac{I}{m_e c^2} \right)^2} \right) + F(\tau) - \delta - 2 \frac{C}{Z} \right]$$

donde τ es la energía cinética del electrón en unidades de $m_e c^2$, y

$$F(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{\tau^2/8 - (2\tau + 1) \ln 2}{(\tau + 1)^2}$$

y utilizando que el espesor másico del blanco de grafito es (Herraiz, 2009) de $t = 0.0838 \pm 0,0001 \text{ g/cm}^2$, y las energías del electrón incidente y dispersada son, respectivamente, de 2649 MeV y 2216 MeV, la pérdida colisional prevista es de aproximadamente $\Delta E_{\text{colisional}} \approx 0,2 \text{ MeV}$, sobre una pérdida media (incluyendo Brehmstrahlung y colisiones) de $\approx 2,5 \text{ MeV}$.

3.2. Efectos de la radiación

Al añadir un fotón real a la interacción (e, e'p), como se muestra en la Figura 6, hemos de tenerlo en cuenta al considerar la conservación de energía y momento.

Por lo tanto, hemos de diferenciar ahora dos tipos de variables. Por un lado, las medidas de E_{miss} y \mathbf{p}_{miss} derivadas de las medidas directas de los detectores: son las llamadas **variables asintóticas**. Y por otro, las variables en ausencia de radiación, es decir, las que se medirían en el vértice qA, entre el fotón virtual y el núcleo blanco. Son las llamadas **variables en el vértice**, y las denotamos con el superíndice v, E_{miss}^v y $\mathbf{p}_{\text{miss}}^v$.

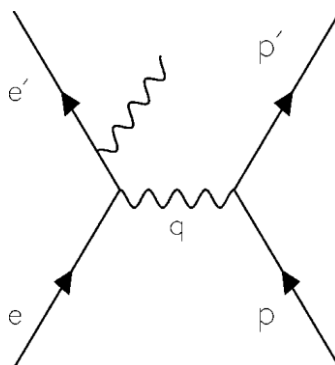


Figura 6. Diagrama de Feynman para la colisión (e, e'p) con emisión de un fotón real

La conservación del cuadrimomento para el núcleo de retroceso es ahora

$$R = (e - e') + A + p' - \gamma,$$

donde $\gamma = (k, \mathbf{k})$ es el cuadrimomento del fotón real emitido. La componente de momento lineal de esta ecuación implica que, en el vértice, $\mathbf{p}_{R,v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}_p' - \mathbf{k}$, por lo que

$$\mathbf{p}_{miss}^v = \mathbf{p}_{miss} - \mathbf{k}.$$

Y de igual modo, para la energía,

$$E_{miss}^v = E_m - k.$$

La emisión de un fotón real, como es lógico, no solamente varía E_{miss} y \mathbf{p}_{miss} , sino que también influye en el resto de variables cinemáticas. Por lo tanto, si queremos corregir correctamente los datos experimentales por la emisión de fotones reales, tenemos que tener en cuenta, no sólo la energía de los fotones radiados, sino la dirección en que éstos han sido emitidos.

En este trabajo se ha usado la *peaking approximation* (Ent et al., 2001), que supone una distribución angular para la radiación emitida prácticamente nula en todos los puntos, salvo en las direcciones de incidencia y de emisión del electrón, y en la dirección del protón extraído.

De hecho, para nuestro trabajo, inicialmente partiremos de un modelo aún más simplificado, en el que consideramos que la energía radiada en la dirección del protón es despreciable frente al *bremstrahlung* de los electrones, y en el que además, como la energía del electrón es del mismo orden antes y después de la colisión (E_e y $E_{e'}$ son del orden de GeV, mientras que los fotones emitidos son del orden de unos pocos MeV), podemos considerar igual la probabilidad de emisión antes y después de la colisión.

Como ejemplo, en la Figura 7 puede verse el efecto de la radiación en el módulo de P_{miss} . Realizando un corte en los eventos con mayor E_{miss} (procedentes de la cola radiativa), se observa un desplazamiento del espectro de P_{miss} , cuya media pasa de 72 MeV/c para el global de eventos a 80 MeV/c para los eventos del corte.

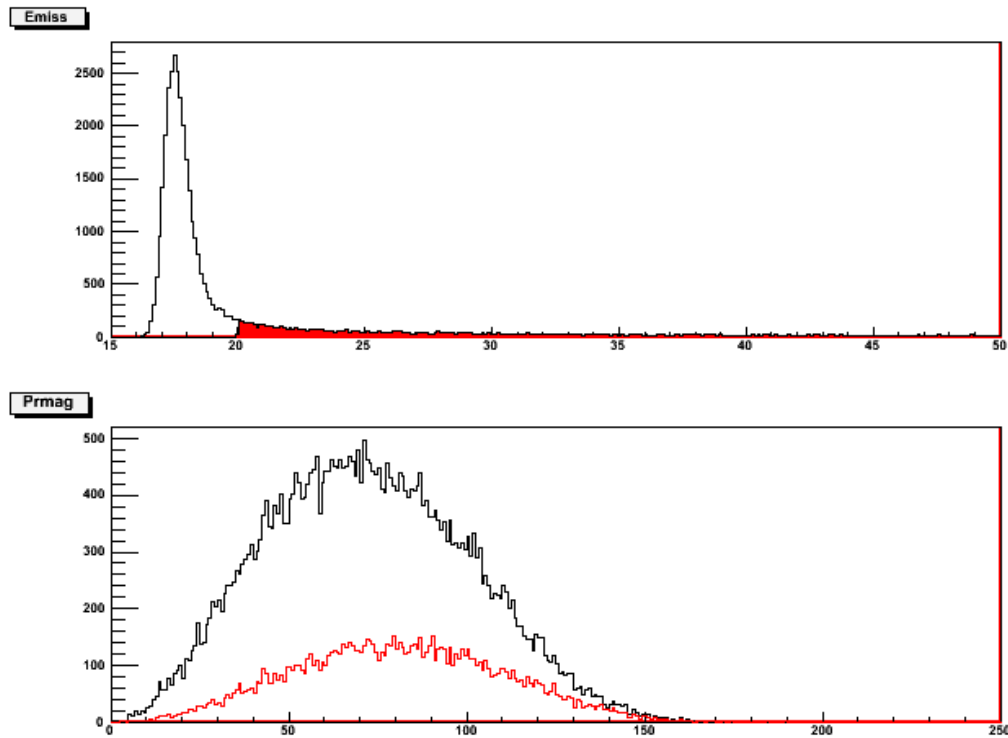


Figura 7. Efecto de la radiación en el módulo de Pmiss

3.3. Corrección de la radiación

La herramienta básica para eliminar el efecto de la radiación en los datos es el estudio del espectro en energías. Dado un evento determinado, buscamos conocer la distribución de probabilidades de que sea un evento medido en el vértice, o de que sea un evento medido fuera del vértice y que ha sido afectado por radiación, habiendo radiado un fotón real de una determinada energía.

Una posible solución es modelar dicha distribución como una función inversa de la energía del fotón emitido, es decir, la probabilidad de que se emita un fotón de energía k , $p(k)$, es proporcional a $1/k$. La divergencia en el origen se corrige estableciendo una energía umbral δk , por debajo de la cual no se considera emisión de fotones reales. En nuestros espectros de energía, hemos tomado este umbral como la mitad de la anchura de un bin, $\delta k = \Delta/2$. En ese caso, la probabilidad de no emitir ningún fotón ha de tomarse como parámetro, y utilizarse para normalizar la distribución.

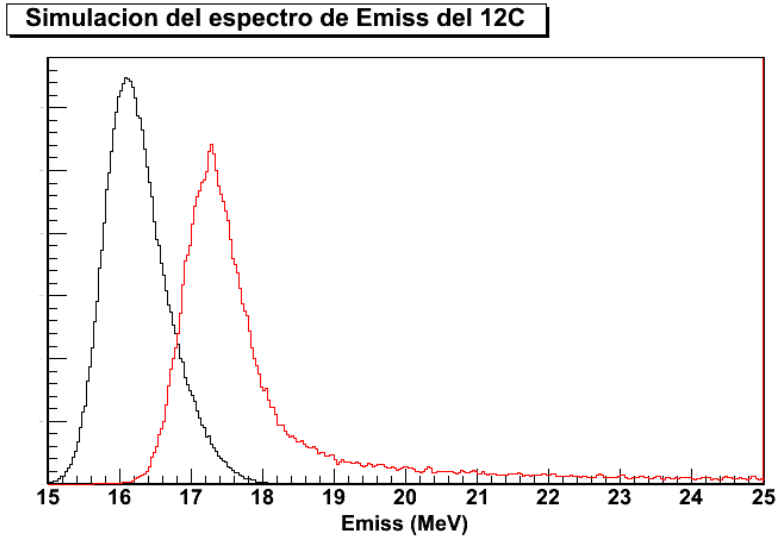


Figura 8. Simulación del espectro de Emiss del estado fundamental del ^{12}C , con y sin radiación

Si llamamos p_{NR} a ese parámetro, tenemos que:

$$p(k)dk = p_{NR}dk, \text{ para } 0 < k < \delta k$$

$$p(k)dk = (1 - p_{NR})\frac{1}{N} \frac{dk}{k}, \text{ para } k > \delta k$$

donde N es la constante de normalización, tal que $\int_{\delta k}^{k_{max}} p(k)dk = 1 - p_{NR}$, de forma que, a su vez, la probabilidad total esté normalizada, $\int_0^{\infty} p(k)dk = 1$. La constante de normalización tiene el valor de $N = \ln \frac{k_{max}}{\delta k}$.

A este modelo hay que aplicarle, además, la variante de que los datos del espectro están discretizados, con una anchura de bin igual a $2 \cdot \delta k$. Por lo tanto, lo que nos interesa es: dado un evento que en el vértice tiene una E_{miss} igual a E_i (es decir, en intervalo entre $E_i - \delta k$ y $E_i + \delta k$), ¿qué probabilidad tiene de ser detectado con una E_{miss} comprendida entre $E_j - \delta k$ y $E_j + \delta k$?. Llamaremos $p_{i \rightarrow j}$ a esta cantidad, que, teniendo en cuenta que la energía del fotón real puede expresarse como $k = 2\delta k (j - i)$, se escribe:

$$p_{i \rightarrow j} = \begin{cases} \frac{(1 - p_{NR})}{\ln \frac{k_{max}}{\delta k}} \ln \frac{2(j - i) + 1}{2(j - i) - 1} & , \quad si \ j > i \\ p_{NR} & , \quad si \ j = i \end{cases}$$

El parámetro p_{NR} podemos deducirlo de un ajuste de los datos de simulación a nuestro modelo. A pesar de la simplicidad de éste, reproduce de una forma aceptable los datos simulados por MCEEP, incluyendo los efectos tanto de la radiación interna como de la externa, como se ve en la Figura 9.

En todo el procedimiento mencionado, es necesario incluir el efecto de las pérdidas por ionizaciones de átomos del blanco (E_{loss}), que se modela simplemente introduciendo un desplazamiento global (*shift* de energías, ΔE) del espectro de energías. El valor de E_{loss} no es fijo, sino que tiene una componente estadística, por lo que también provoca un cierto ensanchamiento de los picos (*straggling*). Para corregir por este efecto tomamos el shift ΔE como el valor promedio de E_{loss} .

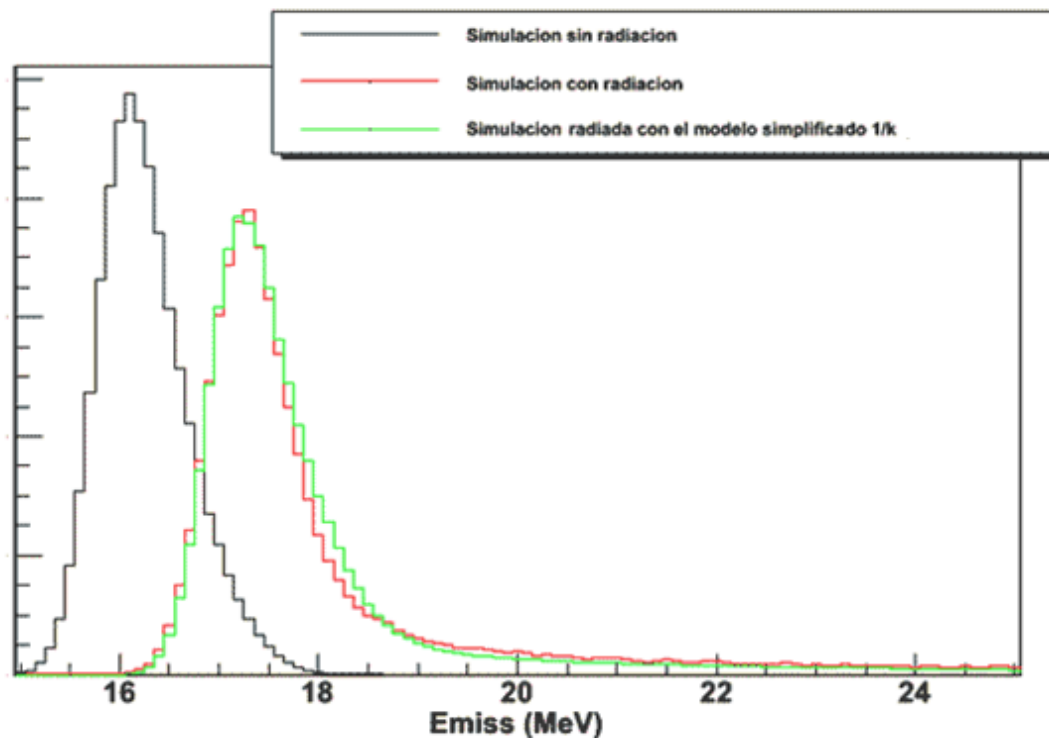


Figura 9. Modelado de la cola radiativa, con parámetros $p_{NR} = 0.474$, $\Delta E = 0.55$ Mev

3.3.1. Método clásico (desconvolución directa)

La principal ventaja de este modelo es que, al estar basado en una probabilidad sencilla, esta es invertible. Es decir, si para cada par de bins i, j con energías E_i, E_j , conocemos la probabilidad de que una colisión cuya E_{miss} es igual a E_i , el electrón radie un fotón real con energía $k = E_j - E_i$, y el evento sea registrado en el bin E_j , podemos calcular la probabilidad de que, dado un evento medido en el experimento, con E_{miss} dentro del bin centrado en E_j , este evento provenga de un evento en el vértice con E_{miss} real en torno a E_i . De esta forma podremos corregir todo el espectro de E_{miss} , y la bondad de esta corrección dependerá de lo bien que nuestro modelo reproduzca la cola de radiación que como hemos mostrado es muy razonable.

Conocida la probabilidad de radiar de un bin a otro ($p_{i \rightarrow j}$), el procedimiento de radiado podría describirse como:

Para cada bin del espectro desde $i:=\text{MAX_BINS}$ hasta $i=1$, de derecha a izquierda:

$$Cuentas_i = Cuentas_i * p_{NR}$$

Para cada bin del espectro desde $j:=i+1$ hasta $j=\text{MAX_BINS}$:

$$Cuentas_j = Cuentas_j + Cuentas_i * p_{i \rightarrow j}$$

Éste es el procedimiento utilizado en la Figura 9. Del mismo modo, por tanto, puede aplicarse un procedimiento de desradiado similar para desconvolucionar el espectro de E_{miss} . El pseudocódigo de dicho procedimiento es el siguiente:

Para cada bin del espectro desde $i:=1$ hasta MAX_BINS :

$$Cuentas_i = Cuentas_i / p_{NR}$$

Para cada bin del espectro desde $j:=i+1$ hasta $j=\text{MAX_BINS}$:

$$Cuentas_j = \text{Max}(0, Cuentas_j - Cuentas_i * p_{i \rightarrow j})$$

La invertibilidad del proceso está garantizada, debido a las operaciones realizadas. El único punto conflictivo es el de garantizar la no negatividad de las cuentas en ninguno de los bins, lo cual puede llevar a una variación final del número total de cuentas en espectros muy ruidosos, que puede corregirse simplemente reescalando el espectro.

3.3.2. Algoritmos estadístico-iterativos

Los problemas de **desconvolución** se caracterizan por la asimetría de ciertos procesos, los cuales son muy sencillos de realizar en un sentido, pero muy complicados en el inverso. El cifrado de contraseñas es un ejemplo típico de este problema: debido a las propiedades de los números primos, el descifrado de una contraseña sencilla no es un problema computacionalmente accesible; y sin embargo, su cifrado es una operación instantánea. De hecho, los programas que intentan romper sistemas de cifrado por fuerza bruta se basan en iterar, en modo ensayo-error, múltiples cadenas de texto. Éstas se cifran con el algoritmo conocido y se comparan con la cadena problema. Es decir, si denotamos una cadena por x_s , y la operación de cifrar por $f(x_s)$, el descifrado por fuerza bruta de una contraseña y_s no se realiza buscando una $f^{-1}(y)$, tal que $x_s = f^{-1}(x)$, sino que se hace probando múltiples cadenas x_i , de tal modo que, si se encuentra una cadena x_i tal que $f(x_i) = y_s$, entonces x_i es la x_s buscada.

Los algoritmos iterativos EM-ML, de *Expectation Maximization – Maximum Likelihood* (Dempster, Laird, & Rubin, 1977), y ART, *Algebraic Reconstruction Technique* (Byrne, 2005) se basan en este principio, pero en lugar de realizar pruebas por fuerza bruta, utilizan la información de la salida de cada iteración para corregir la entrada en la siguiente. Es decir, en el caso de los espectros de E_{miss} , el método consiste en partir de un espectro plano, radiarlo (en nuestro caso, con el modelo simplificado de $1/k$), comparar el espectro radiado con el espectro problema, y corregir el espectro de partida. Si la convergencia es buena, el método de radiado es fiable, y la solución del problema es única, podemos asegurar que el espectro obtenido corresponde a la desconvolución del espectro obtenido experimentalmente.

La diferencia entre los algoritmos EM-ML y ART radica en el método de corrección de la solución inicial, que en el EM-ML es multiplicativa, y en el ART, aditiva. Denotando por x_i^n como el número de cuentas en el bin i -ésimo en la iteración n , escribimos:

$$\text{EM-ML:} \quad x_i^{n+1} = x_i^n \cdot \frac{y_i^{\text{real}}}{y_i^n}$$

$$\text{ART:} \quad x_i^{n+1} = x_i^n + (y_i^{\text{real}} - y_i^n)$$

El principal problema en ambos casos reside en relacionar la salida con la entrada, es decir, en definir el valor y_i^n , que será el que, al compararlo con el valor equivalente y_i^{real} en el espectro real, proporcionará la corrección para obtener el valor de x_i en la siguiente iteración.

Una primera idea sugeriría tomar y_i directamente como el número de cuentas del bin i -ésimo tras radiar. Sin embargo, esto pasaría por alto el *shift* en energías aplicado junto con la radiación, por lo que una segunda variante consistiría en tomar y_i como el número de cuentas del bin $(i+\Delta)$ -ésimo, siendo Δ el shift en energías dividido por la anchura en energía de cada bin. Pero este método obviaría que el contenido real de cada bin influye en todos los sucesivos depende según la amplitud de probabilidad ya calculada, $p_{i \rightarrow j}$. Finalmente, la forma de aplicar los métodos iterativos teniendo en cuenta las probabilidades es, denotando por z_i el contenido del bin i -ésimo **tras radiar**,

$$\text{EM-ML:} \quad x_i^{n+1} = x_i^n \cdot \sum_{j=i}^{\text{MAX_BINS}} p_{i \rightarrow j} \frac{z_j^{\text{real}}}{z_j^n}$$

$$\text{ART:} \quad x_i^{n+1} = x_i^n + \sum_{j=i}^{\text{MAX_BINS}} p_{i \rightarrow j} (z_j^{\text{real}} - z_j^n)$$

Los dos métodos tienen convergencias parecidas, aunque existen sutilezas a la hora de aplicarlos: en el ART hay que controlar la introducción de valores negativos, y en el EM-ML, el espectro tiende a suavizarse en presencia de valores bajos del número de cuentas.

Como ya se ha comentado, la aplicación de métodos iterativos tiene sentido cuando la función a desconvolucionar resulta compleja de invertir. En éste caso, debido a la simplificación que hemos tomado para la forma de la cola radiativa (aproximación $1/k$), la función de radiado **sí** es invertible, y por tanto, esperamos que el resultado de los algoritmos iterativos coincida exactamente con el método directo expuesto en la sección anterior. Sin embargo, presentamos estos métodos aquí debido a su potencial aplicación junto con mecanismos de radiado más complejos. Por ejemplo, en (Herraiz, 2009) se propone un modelado de la radiación interna mediante una sobreestimación de radiación externa (simulando un mayor grosor de material). Con ese modelo de

radiación, los algoritmos iterativos serían aplicables tal cual se proponen en este trabajo, ajustando únicamente la función de correlación entre bins.

3.3.3. Corrección multidimensional

La desconvolución radiativa del espectro de energías no basta, por sí sola, para corregir los datos experimentales: el resto de variables cinemáticas (especialmente \mathbf{p}_{miss}) han de ser estudiadas también.

En (Templon et al., 1999) se propone un método de corrección bidimensional, que aplica el método de desconvolución directa antes mencionado en histogramas de dos dimensiones, $(E_{\text{miss}}, |\mathbf{p}_{\text{miss}}|)$. Nuestro enfoque será ligeramente diferente: trabajaremos sobre la corrección en el espectro de energía para después, suponiendo la distribución de probabilidad obtenida para la radiación de fotones de determinada energía, corregir, evento a evento, el resto de variables cinemáticas. Para realizarla consideraremos válida la *peaking approximation* (es decir, que el fotón real se emite, o bien en la dirección del electrón incidente, o bien en la del electrón dispersado) y no tendremos en cuenta las aceptancias angulares del detector, es decir, para los ángulos de dispersión tomaremos los valores centrales (promedio) iguales para todos los eventos.

Para ello, a la hora de rellenar los histogramas de cada variable en cada evento, en lugar de hacerlo con su valor exacto, rellenaremos el histograma todos con los posibles valores de esa variable en caso de haber ocurrido radiación, ponderándolos por la probabilidad de que ocurran, calculada mediante el espectro de E_{miss} corregido.

Este proceso requiere, por tanto, dos iteraciones sobre todas las variables: en la primera se calcula el espectro de E_{miss} corregido, y en la segunda se utiliza ese espectro para corregir el resto de variables.

En esta parte de los resultados, aún preliminares, probaremos este método de corrección en dos variables. En primer lugar, aplicaremos la corrección evento a evento a la variable w , la energía del fotón virtual. Ésta se calcula como la diferencia entre el valor nominal de la energía del haz (para nuestra cinemática, $E_0=2649$ MeV) y el valor de la energía del electrón dispersado. Por tanto, toda pérdida de energía por

radiación de un fotón real de energía γ se convierte en una sobreestimación de w , de forma que:

$$w^{corr} = w^{medida} + \gamma$$

En segundo lugar, intentaremos corregir en el módulo de P_{miss} . Para ello expresamos la corrección al módulo en función de los ángulos que forma \mathbf{p}_{miss} con el electrón incidente o dispersado (ya que supondremos, en *peaking approximation*, que el fotón se emite en una de estas direcciones).

En la cinemática en la que se ha realizado el experimento (Kin01 de E006-07), los ángulos centrales (promediados sobre la aceptación) son:

$$\theta_{e'} = 21,4^\circ$$

$$\theta_q = 54,1^\circ$$

Por lo que, por trigonometría sencilla (ver Figura 10), obtenemos los ángulos entre los fotones y \mathbf{p}_{miss} (suponiendo cinemática perpendicular en todo momento) son:

$$\theta_{pe} = 35,9^\circ$$

$$\theta_{pe'} = 14,5^\circ$$

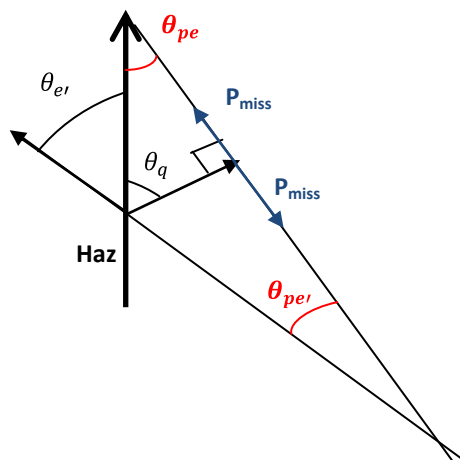


Figura 10. Deducción geométrica de la corrección del módulo de P_{miss} en *peaking approximation*

De esta forma, si el fotón tiene una energía γ y radia según la dirección del electrón incidente, la corrección en \mathbf{p}_{miss} es:

$$\mathbf{p}_m^{corr} = \mathbf{p}_m + \gamma \frac{\mathbf{k}_i}{k_i}$$

$$(\mathbf{p}_m^{corr})^2 = \mathbf{p}_m^2 + \gamma^2 + 2\gamma \frac{\mathbf{k}_i}{k_i} \mathbf{p}_m$$

$$p_m^{corr} = \sqrt{p_m^2 + \gamma^2 + 2\gamma p_m \cos(\theta_{pe})}$$

Y de forma análoga, si el fotón se radia según la dirección del electrón dispersado,

$$p_m^{corr} = \sqrt{p_m^2 + \gamma^2 - 2\gamma p_m \cos(\theta_{pe'})}$$

Con estas dos expresiones, tomando una probabilidad del 50% para que el fotón sea emitido en cada una de las dos direcciones, podremos corregir el espectro del módulo de \mathbf{p}_{miss} .

4. Resultados

4.1. Corrección del espectro de energía

Para probar los algoritmos de corrección, utilizamos una serie de datos simulados por MCEEP, reproduciendo las condiciones en las que se han obtenido los datos experimentales de JLAB con los que trabajaremos (Hall A, experimento E06-007). MCEEP permite simular los datos con y sin radiación, y son estos datos simulados los que utilizamos, por ejemplo, para ajustar el parámetro p_{NR} de nuestro modelo de radiación (Sección 3.3).

En primer lugar, para comprobar la bondad de los dos métodos de desradiado descritos, probaremos ambos sobre los citados datos de simulación. El resultado se muestra en la Figura 11, donde aplicamos ambos algoritmos sobre unos datos con cierto ruido, simulados con radiación, con los mismos datos, simulados en idénticas condiciones, sin ruido ni radiación. Lo obtenido coincide con lo esperado: debido a la simplicidad del modelo $1/k$ utilizado para radiar, ambos espectros prácticamente coinciden, y los dos se ajustan bien al resultado simulado sin radiación, con una mejora apreciable del rendimiento para EM-ML: el valor de χ^2 por grado de libertad es de 1,418 para el método directo y de 0,603 para el iterativo, estimando un error del 5%.

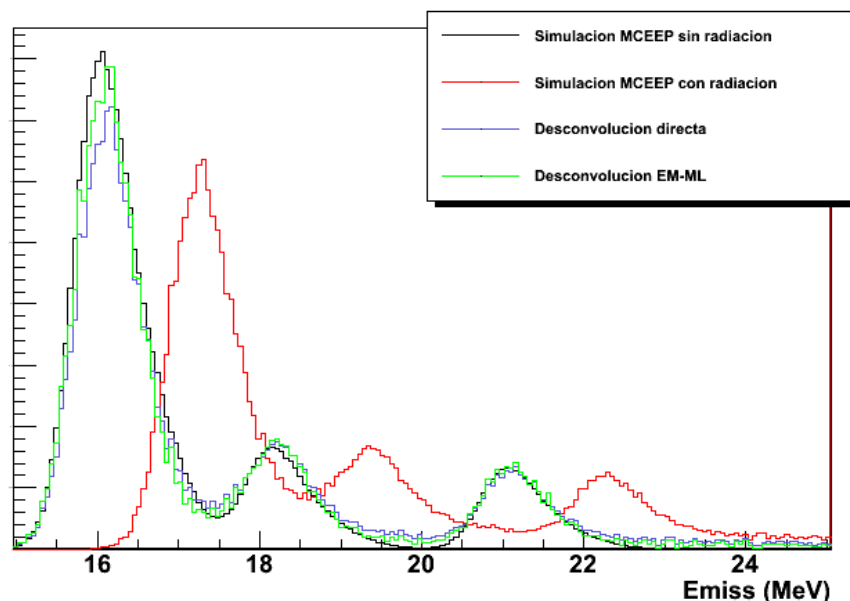


Figura 11. Aplicación de los algoritmos de desradiado en una dimensión a datos de Monte Carlo de la capa p del ^{12}C

Tras probar con la simulación, aplicamos nuestros métodos a datos reales medidos en JLAB (Figura 12). De nuevo puede observarse una buena coincidencia entre los datos obtenidos al desradiar el espectro del ^{12}C y los simulados sin radiación, tanto para el método de desconvolución directa como para el EM-ML.

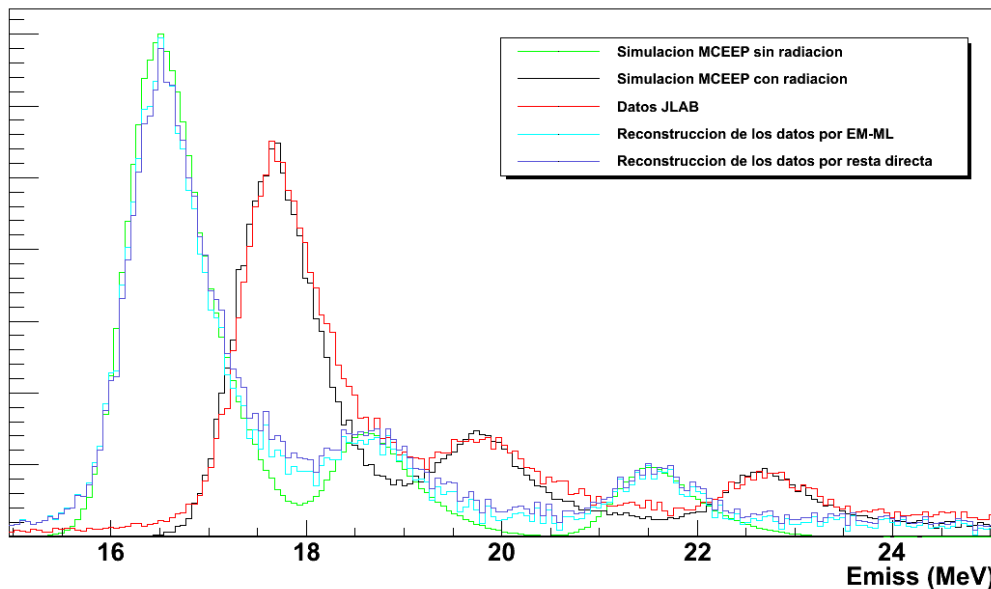


Figura 12. Aplicación de los algoritmos de desradiado en una dimensión a datos de la capa p del ^{12}C del experimento E06-007 de JLAB

Podemos ampliar la Figura 12 en escala logarítmica, para observar las diferencias entre ambos métodos. Comparando los datos reales reconstruidos de las dos formas con la simulación sin radiación, obtenemos una χ^2 por grado de libertad de 2,66 para la resta directa y de 1,43 para EM-ML, estimando un error del 5% en los datos.

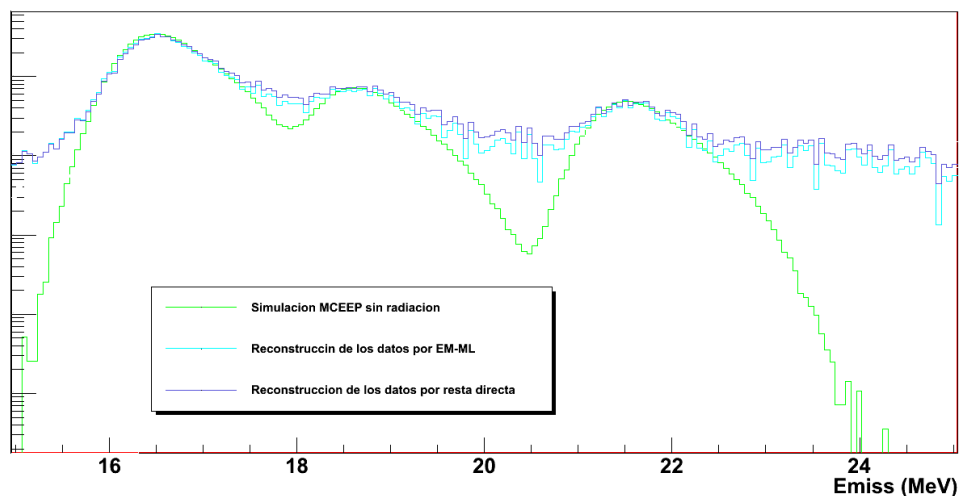


Figura 13. Detalle en escala logarítmica de la aplicación de los algoritmos de desradiado en una dimensión a datos de la capa p del ^{12}C del experimento E06-007 de JLAB

4.2. Corrección multidimensional

Para comprobar la viabilidad del análisis multidimensional descrito, lo hemos aplicado a datos simulados por MCEEP de la extracción de un protón de la capa $p_{3/2}$ del ^{12}C , dejando al ^{11}B en su estado fundamental. Los resultados, tanto en $|\mathbf{p}_{\text{miss}}|$ como en w , resultan muy prometedores: en ambos casos se logra una corrección promedio del histograma, hasta diferir muy poco los datos con radiación corregidos, de las simulaciones sin radiación, como se muestra en las Figura 14 y Figura 15.

Por ejemplo, en $|\mathbf{p}_{\text{miss}}|$, se logra reproducir el efecto de la radiación, que desplaza el pico de la distribución en aproximadamente 30 MeV/c (Figura 14).

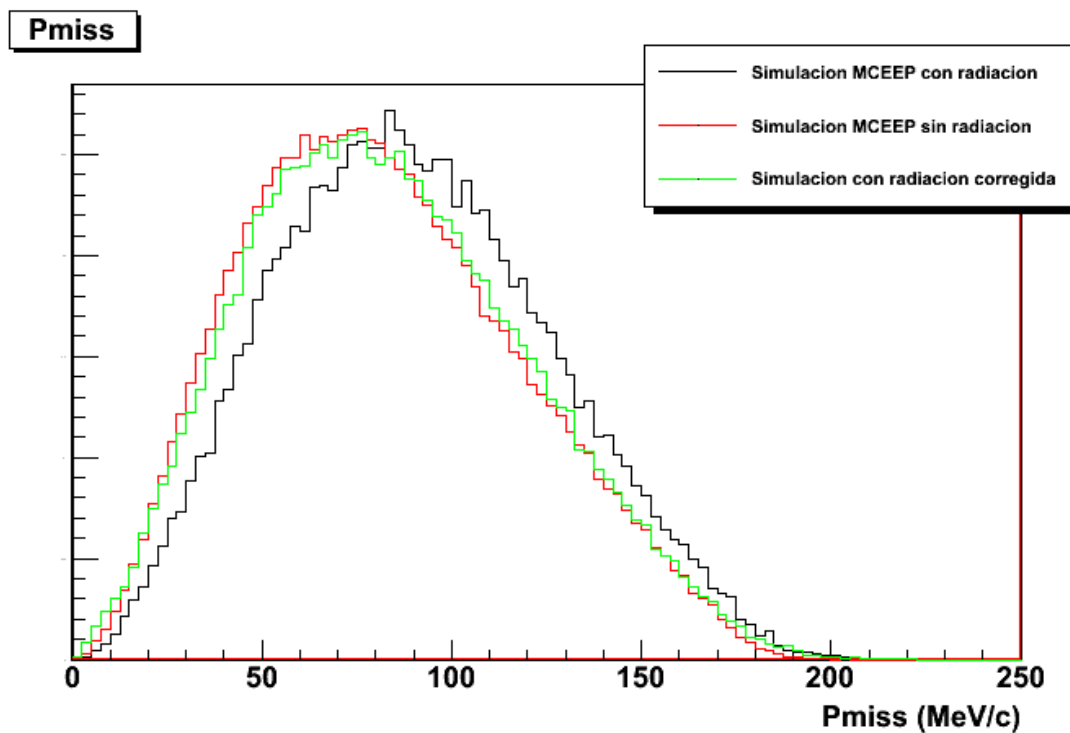


Figura 14. Aplicación del algoritmo de desradiado multidimensional sobre el módulo de p_{miss} en datos simulados por MCEEP de la capa p del ^{12}C

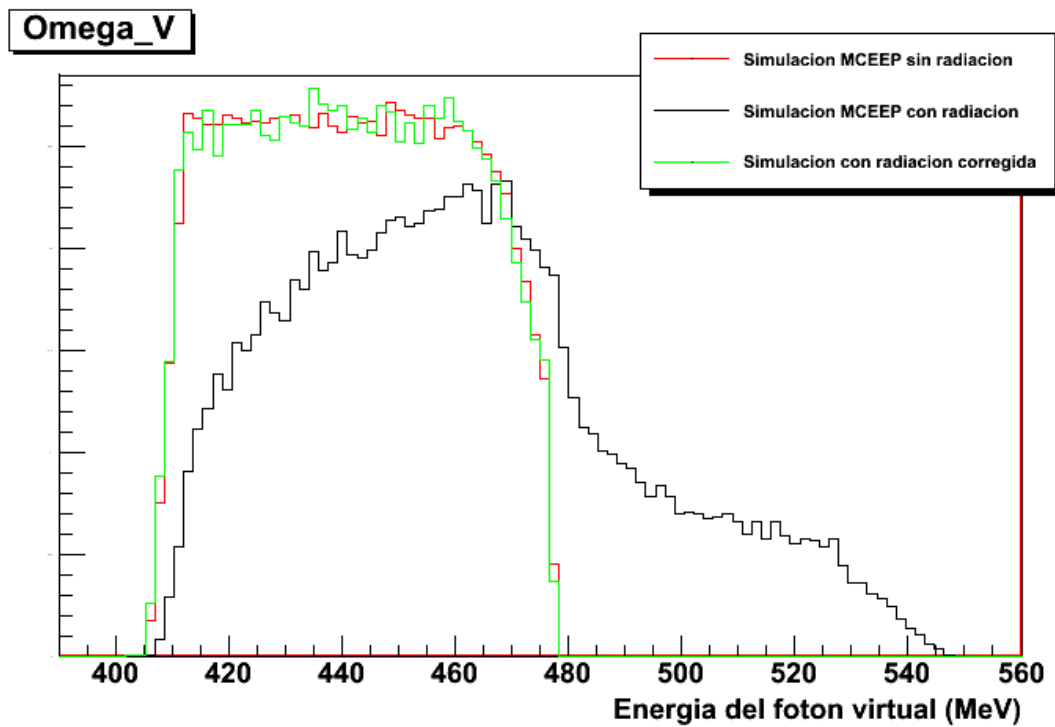


Figura 15. Aplicación del algoritmo de desradiado multidimensional sobre el módulo de p_{miss} en datos simulados por MCEEP de la capa p del ^{12}C

Una forma habitual de representar el efecto de la corrección multidimensional es mediante histogramas en dos dimensiones, E_{miss} , p_{miss} . Como se muestra en la Figura 16, el efecto de la corrección consiste en recuperar los eventos situados en la cola radiativa para situarlos dentro del pico.

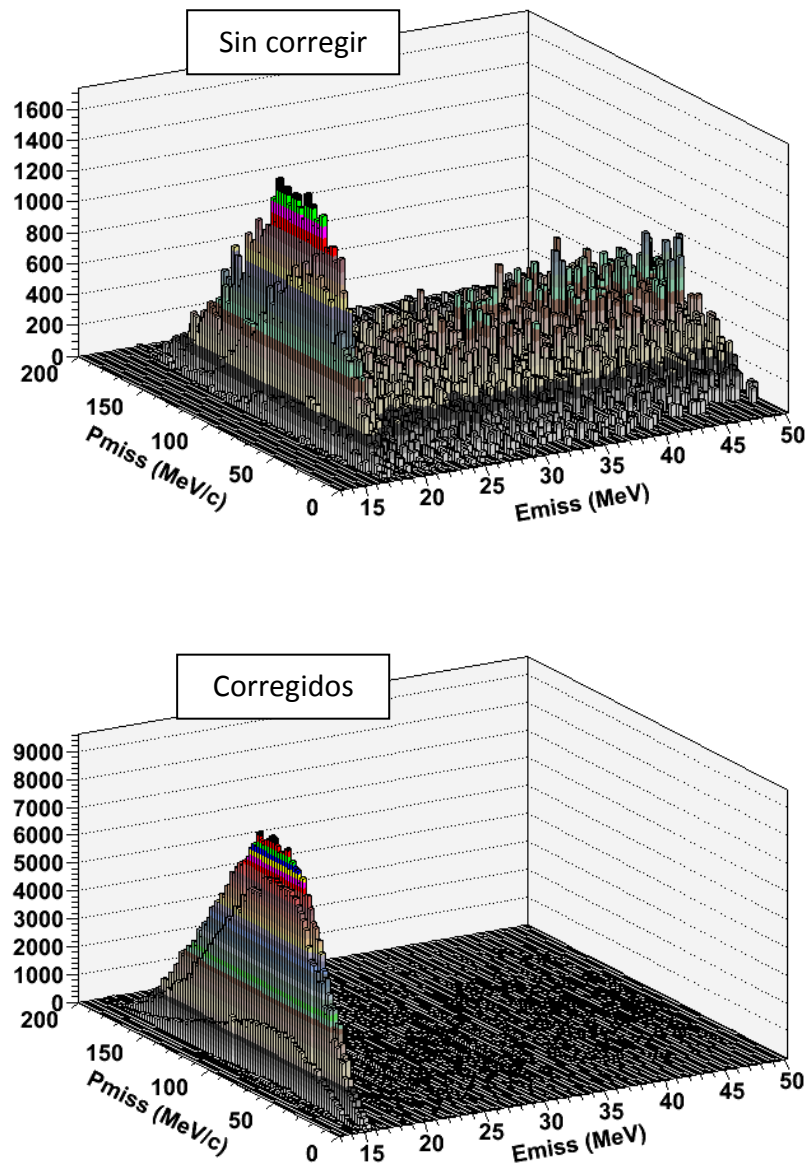


Figura 16. Representación de la corrección bidimensional (E_{miss} , p_{miss})

5. Conclusiones

Este Trabajo Académicamente Dirigido presenta los principales resultados derivados del trabajo del alumno dentro del Grupo de Física Nuclear entre los meses de febrero y junio de 2009.

En primer lugar, se han logrado modelar de forma muy intuitiva las pérdidas radiativas del espectro de energía de la reacción $(e,e'p)$, obteniendo un modelo muy sencillo, pero aplicable a los datos experimentales.

En segundo lugar, se ha demostrado la aplicabilidad de los métodos estadístico-iterativos, usados con frecuencia por el Grupo en el campo de la reconstrucción de imagen médica, en experimentos de dispersión de electrones, implementando y probando en concreto el algoritmo EM-ML.

Y finalmente, se han obtenido prometedores resultados (sobre datos de simulación) en la corrección multidimensional de las variables cinemáticas de la reacción $(e,e'p)$ a partir del espectro de energías.

Estos resultados serán presentados a la comunidad científica en la próxima *XXXII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física (RSEF)*, a celebrarse en Ciudad Real en septiembre de 2009. Además, parte de ellos serán también incluidos en la Tesis Doctoral de Joaquín López Herraiz, director principal de este trabajo.

El trabajo aquí expuesto no se considera, ni mucho menos, cerrado. Más bien al contrario, abre algunas líneas muy claras, entre las que se encuentran la aplicación de las técnicas iterativas sobre un modelo de radiación más sofisticado, utilizando todo su potencial y robustez, y la aplicación exhaustiva de las técnicas multidimensionales a todas las variables cinemáticas.

Bibliografía

Afanasev, A. (2008). Radiative corrections for Lepton Scattering. *Presentation for PPD/Neutrino Department, 22 Feb 2008*. Hampton University.

Borie, E., & Drechsel, D. (1971). Radiative Corrections for (e,e'p) coincidence experiments. *Phys. Rev. A*, 167 (2), 369-375.

Brun, R., & Rademakers, F. (1997). ROOT - An Object Oriented Data Analysis Framework. *AIHENP'96 Workshop, Lausanne, Sep. 1996, Nucl. Inst. & Meth. in Phys. Res. A* 389, (pp. 81-86).

Byrne, C. L. (2005). *Signal Processing: A Mathematical Approach*. A.K. Peters.

Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 39, 1-38.

Ent, B. et al. (2001). Radiative Corrections for (e,e'p) reactions at GeV Energies. *Phys. Rev. C*, 64, 054610.

Herraiz, J. L. (2009). *Study of the (e,e'p) Quasielastic Reaction in Complex Nuclei, Tesis Doctoral*. Universidad Complutense de Madrid [en preparación].

Herraiz, J. L., Udías, J. M. et al. (2009). Status of the E06-007 experiment: Impulse Approximation limitations to the (e, e'p) reaction on 208Pb, 208Bi and 12C. *Hall A Collaboration Meeting, 11th June 2009*.

JLAB Experimental Hall A Website. (2009). <http://hallaweb.jlab.org>.

Leo, W. R. (1994). *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*. Berlin: Springer-Verlag.

LeRose, J. et. al. (1985). Direct Measurement of the radiative tail in electron scattering from atomic nuclei. *Phys. Rev. C*, 32 (2), 449-451.

MCEEP, Monte Carlo for (e, e'p) experiments. (2009). Retrieved from <http://hallaweb.jlab.org/software/mceep/mceep.html>

Mo, L. W., & Tsai, Y. S. (1969). Radiative Corrections to Elastic and Inelastic ep and up Scattering. *Rev. Mod. Phys.* , 41, 205.

Parcerisa, D. S., Herraiz, J. L., & Udías, J. M. (2009). Correcciones radiativas en espectros de energía de la reacción cuasielástica $^{12}\text{C}(e, e'p)$ mediante técnicas estadístico-iterativas. *XXXII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física (RSEF)*. Ciudad Real, 2009.

Quint, E. N. (1988). *Tesis Doctoral, Universiteit van Amsterdam* .

Rvachev, M. M. (2003). *Study of the Quasielastic $^3\text{He}(e, e'p)$ Reaction at $Q^2 = 1.5$ (GeV/c) 2 up to Missing Momenta of 1GeV/c*. Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology.

Schwinger, J. (1949). On Radiative Corrections to Electron Scattering. *Phys. Rev.* , 75, 898.

Starck, J. L., Pantin, E., & Murtagh, F. (2002). Deconvolution in Astronomy: A Review. *The Publications of the Astronomical Society of the Pacific* , 114 (800), 1051-1069.

Templon, J. et al. (1999). Radiation tail in (e, e'p) reactions and corrections in experimental data. *Phys. Rev. C* , 61, 014607.

Templon, J. (1999). Radiation Tails in 89-044. *Conferencia en JLAB, 21 febrero 1999* .

Tsai, Y. S. (1974). Pair production and brehmstrahlung of charged leptons. *Rev. Mod. Phys* , 41, 205.

Weissbach, F. (2006). *Improved radiative corrections to (e, e'p) experiments and their impact on Rosenbluth measurements*. Tesis Doctoral, Basel Universität.

Yennie, D. R., Frautschi, S. C., & Suura, H. (1961). The infrared divergence phenomena and high energy processes. *Ann. Phys.* , 13 (2), 309-310.