

# **DISPERSIÓN DE PARTÍCULAS CARGADAS DE ALTA ENERGÍA**

**Miguel Angel Barco Zorita  
Director del trabajo: J. Manuel Udías**

# ÍNDICE

Página

1. Introducción.....	2
2. Métodos teóricos de resolución.....	3
2.1 El método de las ondas parciales.....	5
2.1.1 Validez del método de ondas parciales.....	6
2.1.2 Aplicación de las ondas parciales.....	7
2.2 La aproximación de Born.....	9
2.2.1 Validez de la aproximación de Born.....	9
2.2.2 Aplicación de la aproximación de Born.....	11
2.3 La aproximación Eikonal.....	12
2.3.1 El método WKB .....	12
2.3.2 Validez del método WKB.....	14
2.3.3 La aproximación eikonal.....	14
2.4 El método DWBA.....	16
3. Comparativa computacional de diferentes métodos.....	17

# 1. Introducción

Se denomina dispersión al proceso por el cual una partícula es desviada de su trayectoria por la interacción con un cierto potencial dispersor. El problema de estudio de estas desviaciones se resuelve clásicamente con el cálculo de las trayectorias de las partículas: conocido el momento inicial y el potencial originado por el centro dispersor podemos calcular el momento final en  $r \rightarrow \infty$  ya que entonces la partícula se encuentra libre de interacciones y su momento deja de variar.

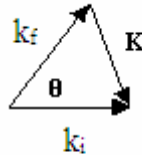


Figura 1

El ángulo de dispersión del proceso es el ángulo formado por el momento final e inicial:

$$\theta = u_f \cdot u_i$$

es decir por el producto escalar de los vectores unitarios en la dirección final e inicial. En mecánica cuántica el estado de una partícula no determina un ángulo de dispersión porque dicho estado no está ligado a una trayectoria concreta; dado que la descripción de la partícula que hace la función de onda la permite encontrarse en todo el espacio con cierta probabilidad. El ángulo de dispersión es pues solo determinable experimentalmente y el conocimiento del estado de la partícula solo me permite conocer la probabilidad de que la partícula salga dispersada con un determinado ángulo. El concepto importante ahora es pues la probabilidad de dispersión para un determinado ángulo, que designaremos por  $d\sigma/d\Omega$  y se conoce tradicionalmente también como sección eficaz diferencial de dispersión

La importancia de esta cantidad se debe a que es determinable tanto teórica como experimentalmente. Experimentalmente se puede calcular como muestra la figura 2..

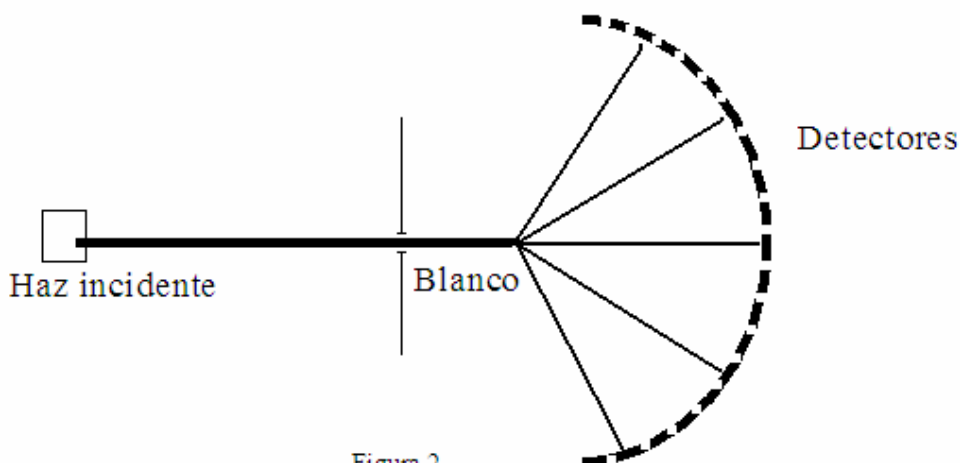


Figura 2

Si se controla el flujo de partículas que un cañón puede lanzar contra un blanco (centro dispersor) y se colocan una buena distribución envolvente de detectores, la probabilidad de que una partícula salga despedida con un determinado ángulo y llegue al detector correspondiente vendrá dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{disp}(\theta, \varphi)}{j_{inc}}$$

Desde un punto de vista teórico la probabilidad de dispersión se relaciona con la función de onda que es solución de la ecuación de Schrodinger. La interpretación de Born relaciona el modulo al cuadrado de la función de onda con la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en un punto del espacio. Por consiguiente la probabilidad de que una partícula se encuentre en una determinada dirección tras dispersarse sería  $|\psi(\theta, \varphi)|^2$  lo que quiere decir que tendremos también:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\psi(\theta, \varphi)|^2$$

En rigor, esto no es cierto ya que la solución de la ecuación de onda podría incluir una solución libre que no representa dispersión, esto es, que describiese un haz que incide de nuestro experimento; pero restringiendo lo suficiente la anchura del haz y colocando los detectores suficientemente lejos del centro dispersor, como muestra la figura, no hay posibilidad de que la detección se vea influenciada por este término y a todos los efectos esta relación se cumple. No obstante para no olvidar que la función de onda de la partícula es más que su parte dispersada, designaremos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2$$

a  $f(\theta, \varphi)$  la denominaremos amplitud de dispersión<sup>1</sup>.

Tenemos pues que la sección eficaz una teoría y experimento al poder determinarse por estas dos vías, y ahí reside su importancia: por un lado es un instrumento de validación de la ecuación de Schrodinger y por otro de conocimiento de las interacciones de la materia ya que me permite juzgar si el potencial introducido en la ecuación de onda es correcto según el grado de concordancia que exista entre esta cantidad obtenida a partir de la ecuación de Schrodinger y mediante experimentos.

El objetivo de nuestro trabajo se enfocará al tratamiento puramente teórico de la dispersión, exponiendo diferentes métodos existentes para el calculo de la sección eficaz, cuya mayor o menor eficacia deberá juzgarse en contraste con los datos aportados por la experimentación.

## 2. Métodos teóricos de resolución

La vía teórica de atacar el problema de la dispersión pasa por la resolución de la ecuación de Schrodinger, lo cual siempre es difícil para los potenciales de interés práctico. Pero además la resolución bruta de la ecuación de Schrodinger no me proporciona en principio la amplitud  $|f(\theta)|^2$  que es lo que yo mido experimentalmente. La razón es que la Ec. de Schrodinger proporciona una solución en la que, como toda ecuación diferencial, habrá unas constantes sin determinar. Ahora bien, la forma en que se realiza el experimento de algún modo condiciona el comportamiento que va a tener la partícula y por tanto condiciona la forma que ha de tener la función de onda que la describe. Es pues nuestro experimento el que nos informa como ha de ser la solución y por ello como han de elegirse las constantes. Si en un experimento de dispersión se lanza una partícula suficientemente lejos del centro dispersor esta partícula sería como

---

<sup>1</sup> A partir de ahora la amplitud dependerá únicamente de  $\theta$  lo cual es cierto para potenciales que únicamente dependan de la distancia  $V=V(r)$ .

libre y debería describirse como una onda plana. Sabemos experimentalmente además, que esta partícula dirigida hacia el blanco se dispersa en todas las direcciones con lo que dicha función de onda tras la dispersión debería tener la forma de una onda que diverge, y, como suficientemente lejos, la partícula sería de nuevo libre, la solución debería ser de la forma  $|f(\theta)| \frac{e^{ikr}}{r}$  que es la solución que se obtiene de la ecuación radial de Schrodinger para una partícula libre, imponiendo la condición de que la partícula se aleje del centro. Reuniendo toda esta información llegamos a que nuestra solución ha de ser de la forma:

$$\psi = e^{ikz} + |f(\theta)| \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1)$$

Que nuestra solución ha de poder expresarse así es algo a lo que hemos llegado con argumentos intuitivos, pero es posible demostrarlo. Ello se consigue si expresamos la ecuación de Schrodinger utilizando su forma integral en vez de su forma diferencial habitual. Para ello pongamos la ecuación de Schrodinger como:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = \frac{2m}{\hbar^2} U(r')\psi \quad (2.a)$$

El operador integral asociado al operador  $(\nabla^2 + k^2)$  permite expresar  $\psi$  en la forma:

$$\psi = \psi_0 + \int -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \frac{2m}{\hbar^2} U(r')\psi(r') dV' \quad \text{siendo } G(r, r') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \quad \text{el núcleo}$$

del operador integral (función de Green) y  $\psi_0$  la solución de la ecuación homogénea  $(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$  que es una onda plana. Nos queda por tanto:

$$\psi = e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} U(r')\psi(r') dV' \quad (2.b)$$

Si nuestro potencial U es de corto alcance, el integrando solo será apreciablemente distinto de cero para un rango de valores de  $r'$  que no sobrepasen significativamente a R (alcance del potencial). Como nos interesa conocer como es  $\psi$  a distancias en las que  $r \gg R$  (esto es los detectores de las partículas están lejos del centro dispersor) entonces podemos desarrollar  $|r-r'|$  en la forma  $|r-r'| = [(r-r')^2]^{\frac{1}{2}} \approx r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$  Sustituyendo este desarrollo en la solución anterior nos queda:

$$\psi = e^{ikz} - \frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r} \int e^{-ik_r \vec{r}'} U(r')\psi(r') dV' \quad (3)$$

Donde  $k_r = k u_r$  siendo  $u_r$  un vector unitario en la dirección de  $\vec{r}'$

Comparando (3) con (1) llegamos a que son la misma expresión si hacemos

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik_r \vec{r}'} U(r')\psi(r') dV' \quad (4)$$

Vemos que la versión integral de la ecuación de Schrodinger nos proporciona la forma adecuada que ha de tener nuestra solución, dada por (1), junto con la expresión para hallar  $f(\theta)$  que es en el fondo lo que nos interesa. Es conveniente, no obstante, tener claro dos cosas:

- (1) es la forma que tiene la solución asintóticamente  $r \gg R$

- Es válida únicamente si  $U(r)$  es de corto alcance, pues se ha deducido exigiendo esta condición.

La solución (1) tiene el inconveniente de que no nos proporciona directamente una solución porque conocer  $f(\theta)$  requiere saber la solución  $\psi$ . Aún así hay dos formas de que resulte útil.

- La primera es calcular la solución asintótica exacta de  $\psi$  resolviendo la ecuación diferencial de Schrodinger. La expresión (1) nos garantiza que sabiendo la  $\psi$  podemos conocer la  $f(\theta)$  (bastaría despejar, por ejemplo) pero es necesario idear un modo inteligente de hallar la amplitud que resulte adecuada para calcular a partir de ella la sección eficaz  $\sigma$ : el método de ondas parciales nos proporciona esa manera adecuada de obtenerla.
- La segunda es calcular  $\psi$  utilizando un valor aproximado de la amplitud. Ello puede conseguirse si en (4) introducimos una aproximación  $\psi_0$  a la solución que por alguna razón conozcamos. El valor de  $f(\theta)$  obtenido será una buena aproximación a la amplitud y nos permitirá calcular una mejor aproximación  $\psi_1$ , que si queremos podremos seguir utilizando iterativamente para obtener sucesivas mejores aproximaciones tanto para la amplitud como para la función de onda. Nosotros nos quedaremos en la primera aproximación. Existen diferentes métodos que proceden de esta forma y que difieren esencialmente porque parten de aproximaciones iniciales diferentes: El método de Born, la aproximación Eikonal y el método de ondas distorsionadas DWBA

## 2.1 El método de las ondas parciales

Si conocemos  $\psi$  es posible determinar  $f(\theta)$  si expresamos cada uno de los términos que aparecen en (1) de una manera conveniente. Si  $U=U(r)$ , la resolución de la ecuación de Schrodinger se descompone en una ecuación radial y otra angular, pudiéndose expresar la solución como:  $\Psi = \sum C_l R_l P_l \cos\theta$ .

Si  $U$  es de corto alcance  $R_l$  tendrá asintóticamente la forma:

$$\underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\text{sen}(kr - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_l)}{kr}$$

Sustituyendo el seno por exponenciales nos queda:

$$\exp(ikz) = \sum_l \frac{C_l}{2ikr} \left[ \exp i(kr - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_l) - \exp -i(kr - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_l) \right] P_l \cos(\theta)$$

Por su parte la onda plana podemos desarrollarla en ondas parciales y quedarnos con su forma asintótica:

$$\exp(ikz) = \sum_l i^l (2l+1) \frac{i^l (2l+1)}{2ikr} \left[ \exp i(kr - \frac{\pi\lambda}{2}) - \exp -i(kr - \frac{\pi\lambda}{2}) \right] P_l \cos(\theta)$$

Por último, la amplitud podemos desarrollarla en serie de polinomios de Legendre:

$$f(\theta) = \sum_l D_l P_l(\cos(\theta)) \quad (5)$$

Sustituyendo ahora todas estas expresiones en (1) tenemos:

$$\sum_l \frac{C_l}{2ikr} \left[ \exp i\left(kr - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_l\right) - \exp -i\left(kr - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_l\right) \right] =$$

$$\sum_l i^l (2l+1) \frac{i^l (2l+1)}{2ikr} \left[ \exp i\left(kr - \frac{\pi\lambda}{2}\right) - \exp -i\left(kr - \frac{\pi\lambda}{2}\right) \right] + \sum_l \frac{D_l}{r} \exp(ikr)$$

La ventaja de expresar así cada término residen que como los coeficientes acompañan a expresiones muy similares vamos a poder relacionarlos entre sí. En efecto, esta ecuación ha de cumplirse para cada  $l$  por separado y para cada uno ha de cumplirse para todo  $r$  por lo que exponenciales del mismo signo a uno y otro lado han de tener coeficientes iguales. Ello nos lleva a dos ecuaciones: una la que han de cumplir las exponenciales del tipo  $\exp i(kr)$  y otra las del tipo  $\exp -i(kr)$ . Nos queda entonces:

$$C_l = i^l (2l+1) \exp(i\delta_l)$$

$$i^l (2l+1) + 2ikDl \exp\left(i\pi \frac{l}{2}\right) = C_l \exp(i\delta_l)$$

De estas dos ecuaciones podemos despejar  $Dl$  y sustituirlo en el desarrollo (5):

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) \exp(2i\delta_l - 1) Pl(\cos(\theta)) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \exp(i\delta_l) \text{sen}(\delta_l) Pl(\cos(\theta))$$

Y esta expresión si es adecuada para calcular la sección eficaz:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_l (2l+1) \exp(i\delta_l) \text{sen}(\delta_l) Pl(\cos(\theta)) \right|^2$$

Esta aparatosa expresión se puede integrar con sencillez teniendo en cuenta la

ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Considerando además que  $\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l$

obtenemos:

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \text{sen}^2(\delta_l) \quad (6)$$

### 2.1.1 Validez del método de ondas parciales

Conviene decir que dado que la fórmula de la sección eficaz la hemos obtenido a partir de (1) solo será válida para un potencial de corto alcance. Por lo demás, el calculo de la sección eficaz dado por (6) es exacto, pero como la suma contiene infinitos términos es necesario truncarla, con lo que en la práctica también es este un método aproximado. El calculo de la sección eficaz será pues más preciso cuanto menor sea el valor de  $l$  a partir del cual los términos de la suma dejen de ser significativos, y ha de existir un  $l$  a partir del cual las contribuciones sean despreciables ya que para un potencial de corto alcance la sección eficaz es finita.

Veamos ahora que circunstancia hace que en la suma (6) baste considerar un numero pequeño de términos.

Una partícula clásica con momento  $L$  tendrá un parámetro de impacto  $\rho$  dado por  $L = \rho p$  siendo  $p$  el momento de la partícula. Por tanto si nuestra partícula cuántica tiene un momento  $L = \eta [l(l+1)]^{\frac{1}{2}}$  su parámetro de impacto será:

$$\rho_l = \frac{[l(l+1)]^{\frac{1}{2}}}{k} \quad (7)$$

Tal como muestra la figura 3 una partícula clásica siempre va a tener un parámetro de impacto menor que la distancia de máximo acercamiento  $D_{max}$ .

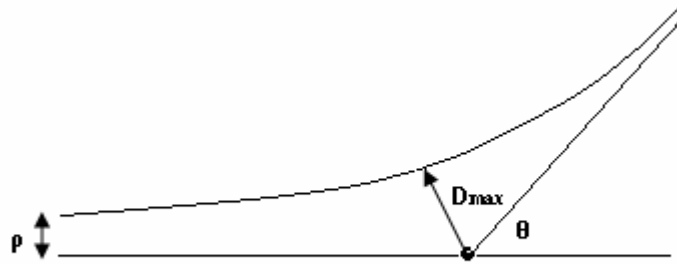
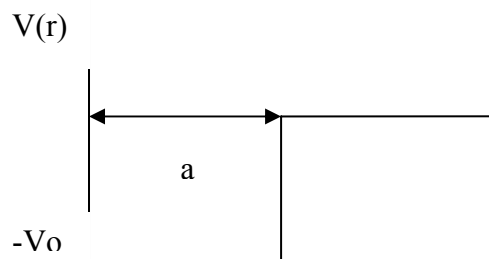


Figura 3

Si nuestra partícula es cuántica, podrá pasar por cualquier parte pero con máxima probabilidad se encontrará en la trayectoria clásica, de modo que la partícula tendrá una mayor probabilidad de encontrarse a una distancia mayor que el parámetro de impacto. Eso quiere decir que, si el alcance efectivo del potencial es  $R$ , si se cumple que  $\rho_l > R$  entonces la partícula no verá apenas el potencial y por ello su desfase  $\delta_l$  será despreciable,  $\sigma_l$  no contribuirá a la suma y a partir de ese  $l$  podríamos truncar. Obsérvese ahora que según (7) para un valor fijado del número  $l$  podemos hacer que el parámetro de impacto  $\rho_l$  aumente (hasta ser mayor que  $R$ ) disminuyendo el momento (y con ello la energía) de la partícula incidente. Procediendo así podemos hacer que  $\sigma_l$  deje de ser significativo para un valor cada vez más pequeño de  $l$  haciendo que la energía de la partícula sea pequeña. En ese caso la suma (6) se podrá realizar sin problemas al contener un número pequeño de términos. El método de las ondas parciales será más aplicable pues a bajas energías.

### 2.1.2 Aplicación de las ondas parciales: pared de potencial esférica



Como  $V$  depende solo del módulo de  $r$  podemos descomponer la ecuación de onda en una parte radial y otra angular. La resolución de la angular da los armónicos esféricos. La parte radial la calculamos mediante la ecuación:

$$\left[ \frac{-\eta^2}{2m} \left( \frac{d}{d^2 r} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V - E \right] R(r)$$

Por comodidad podemos hacer desaparecer las constantes adimensionalizando, esto es, haciendo el cambio  $\rho = qr$  donde  $q = \sqrt{\frac{2m(E+V)}{\eta^2}}$  :



$$\left[ \frac{d}{d^2 \rho} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right] \rho(r) = 0$$

Para esta ecuación es posible obtener las soluciones de manera exacta. En concreto la solución se puede expresar como combinación lineal de las funciones esféricas de Bessel y de Neuman. Las soluciones en función de r son:

$$R(r) = A j_l(kr) + B n_l(kr) \quad \text{Si } 0 \leq r \leq a \quad (8)$$

$$R(r) = C j_l(k'r) + D n_l(k'r) \quad \text{Si } R > a \quad (9)$$

Donde hemos designado con k y k' el valor de q para valores de r menores y mayores que a respectivamente. Impongamos ahora las condiciones de frontera. En primer lugar queremos que R(r) sea finita en el origen por lo que B=0. Imponiendo ahora las condiciones de continuidad para R y su derivada R' tenemos:

$$A j_l(ka) = C j_l(k'a) + D n_l(k'a)$$

$$k A j_l'(ka) = k' C j_l'(k'a) + k' D n_l'(k'a)$$

Dividiendo ambas nos queda:

$$\frac{k j_l'(ka)}{j_l(ka)} = \frac{k'(C j_l'(k'a) + D n_l'(k'a))}{C j_l(k'a) + D n_l(k'a)} \quad \text{Sacando C del numerador y denominador de}$$

la derecha:

$$\frac{k j_l'(ka)}{j_l(ka)} = \frac{k'(j_l'(k'a) + \frac{D}{C} n_l'(k'a))}{j_l(k'a) + \frac{D}{C} n_l(k'a)} \quad \text{De donde podemos despejar D/C:}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{k' j_l'(k'a) - \frac{k j_l'(ka)}{j_l(ka)} j_l(k'a)}{\frac{k j_l'(ka)}{j_l(ka)} n(k'a) - k' n'(k'a)} \quad (10)$$

El interés de encontrar una expresión para D/C es sencillamente que es lo único que nos interesa de cara a el calculo del desfase  $\delta_l$ . En efecto, para un potencial de corto alcance la solución radial a grandes distancias viene dada por:

$$\approx \frac{\text{sen}(k'r + \alpha)}{k'r} \quad \text{La solución de nuestro problema a grandes distancias vendrá dado}$$

por la forma asintótica de (9). Sabiendo que el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel y de Neuman es:

$$j_l(k'a) \approx \frac{1}{k'r} \text{sen}\left(k'r - \frac{\lambda\pi}{2}\right)$$

$$n_l(k'a) \approx -\frac{1}{k'r} \text{cos}\left(k'r - \frac{\lambda\pi}{2}\right)$$

Tendrá que cumplirse para (9) asintóticamente:

$$C \left( \frac{1}{k'r} \text{sen}\left(k'r - \frac{\lambda\pi}{2}\right) + \frac{D}{C} \frac{1}{k'r} \text{cos}\left(k'r - \frac{\lambda\pi}{2}\right) \right) \propto \frac{1}{kr} \text{sen}(k'r + \alpha)$$

Con lo que queda claro que no es el valor concreto de C como el de D/C lo que me puede permitir que la expresión de la izquierda tenga la forma de el de la derecha. No se necesita una iluminación especial para ver que si hacemos  $D/C = \text{tg}(\delta_l)$  y multiplicamos

el lado de la izquierda por  $\cos(\delta_1)$  -que no deja de ser una constante de proporcionalidad- entonces lado de la izquierda tendrá la forma de:

$$\text{sen}\left(k'r - \frac{\lambda\pi}{2}\right)\cos(\delta_1) + \cos\left(k'r - \frac{\lambda\pi}{2}\right)\text{sen}(\delta_1) \text{ que es precisamente } \text{sen}(k'r + \alpha) \text{ con}$$

$$\alpha = \delta_1 - \frac{\lambda\pi}{2} . \text{ Concluimos así para el desfase la relación:}$$

$$D/C = \text{tg}(\delta_1)$$

Para calcular la sección eficaz basta despejar  $\delta_1$  y meterlo en (6)

## 2.2 La aproximación de Born

Si la partícula dispersada interacciona poco con el potencial dispersor, su función de onda debería seguir siendo la misma onda plana incidente con buena aproximación. Sustituyendo en (4)  $\psi(r')$  por e una onda plana obtenemos la aproximación de Born para la amplitud de dispersión:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\eta^2} \int e^{-ik_r r'} U(r') e^{ik_z z'} dV' \text{ siendo } k_z = k u_z \text{ y } k_r = k u_r$$

Definamos el vector cesión cantidad de movimiento  $K = k_z - k_r$  entonces, como el choque es elástico y el modulo del vector de onda se conserva, un vistazo a la figura 4

nos permite concluir :  $K = 2k \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

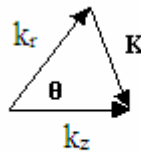


Figura 4

obtenemos entonces:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\eta^2} \int e^{iK \cdot r'} U(r') dV' \tag{11.a}$$

y trabajando un poco esta última expresión:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\eta^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty U(r') r'^2 U(r') dr' \int_0^\pi e^{iKr' \cos \vartheta} \text{sen} \vartheta d\vartheta$$

Con lo que:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\eta^2} \int_0^\infty U(r') \frac{\text{sen}Kr'}{Kr'} r'^2 dr' \tag{11.b}$$

La sección eficaz  $d\sigma$  viene dada en esta aproximación por:

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = -\frac{4m^2}{\eta^2} \left| \int_0^\infty U(r') \frac{\text{sen}Kr'}{Kr'} r'^2 dr' \right|^2 d\Omega \tag{12}$$

### 2.2.1 Validez de la aproximación de Born:

Consideremos de nuevo la ecuación (2.b) . Nótese que en esta expresión todavía no se ha hecho la simplificación de que el potencial es de corto alcance, de modo que lo que digamos vale para cualquiera hasta que no particularicemos más.

$$\psi(r) = e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\eta^2} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} U(r')\psi(r') dV'$$

El segundo sumando de esta ecuación da fe de la parte dispersada. Si consideramos que la onda sigue siendo después de la dispersión plana, entonces podemos sustituir esta solución plana  $\psi_0$  en el integrando, obteniendo así que la solución sería la suma de una onda plana más una corrección  $\psi_1$ .

$$\psi_1(r) = -\frac{m}{2\pi\eta^2} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} U(r')e^{ikz'} dV'$$

Pero como la solución es casi una onda plana se ha de cumplir  $|\psi_1| \ll |\psi_0|$  o de otro modo:

$$|\psi_1| \ll 1. \quad (13)$$

Y dado que  $|\psi_1|$  al aumentar la distancia al centro dispersor esta condición se cumplirá si se cumple en el origen de coordenadas:

$$|\psi_1(0)| = \left| -\frac{m}{2\pi\eta^2} \int \frac{e^{ik(r'+z')}}{r'} U(r') dV' \right| \ll 1 \quad (14)$$

Esta condición se puede simplificar bien en dos casos límite:

- Si se cumple  $KR \ll 1$  se puede hacer en (14)  $e^{ik(r'+z')} \approx 1$  y entonces obtenemos  $\frac{2m}{\eta^2} \int \frac{U(r')}{r'} dr' \approx \frac{m}{\eta^2} |U_0| R^2 \ll 1$  donde hemos considerado que U es de alcance R y que por tanto no se pierde el orden de magnitud si lo sacamos de la integral con su valor medio  $U_0$ . También podemos escribir la condición como:

$$U_0 \ll \frac{\eta^2}{mR^2} \quad (15.a)$$

Observemos ahora que la condición  $KR \ll 1$  es equivalente a  $E \ll \frac{\eta^2}{mR^2}$  (condición de partículas lentas) y que  $\frac{\eta^2}{mR^2}$  es del orden de magnitud de la profundidad mínima que ha de tener un pozo de potencial de radio R para que se forme un estado ligado. Por consiguiente a energías pequeñas la aproximación de Born será buena si tanto la energía de la partícula como la de interacción son pequeñas respecto a la energía potencial mínima necesaria para que se forme estado ligado en el pozo.

- Si se cumple la desigualdad opuesta  $KR \gg 1$  ( $E \gg \eta^2 / mR^2$ ) podemos evaluar  $\psi_1$  no a partir de (2.b) sino de la ecuación (2.a) de la que esta deriva. La consideración de que a orden cero la solución es una onda plana  $\psi_0$  entonces la corrección  $\psi_1$  me

vendrá dada según (2.a) como:  $\Delta\psi^1 + k^2\psi^1 = \frac{2m}{\eta^2} Ue^{ikz}$ . Busquemos soluciones a  $\psi_1$

de la forma  $\psi_1 = fe^{ikz}$ . Si introducimos esta solución prueba en la ecuación y despreciamos el termino que no está multiplicado por k frente a los que si (ya que k es

muy grande) obtenemos:

$2ik \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2mU}{\eta^2}$  que nos conduce integrando de 0 a R (alcance del potencial):

$$f = \frac{-im}{\eta^2 k} \int_0^R U dr' = \frac{-im}{\eta^2 k} U_0 R \text{ conociendo ya } f \text{ la condición (13) toma la forma:}$$

$|\psi_1| = |f| \approx (m/\eta^2 k) U_0 R \ll 1$  La condición a grandes energías queda para esta aproximación:

$$\frac{U_0 R}{\eta v} \ll 1 \quad (v: \text{velocidad de la partícula}) \quad (15.b)$$

### 2.2.2 Aplicación de la aproximación de Born: sección eficaz de un átomo

Según (11.a) y particularizando para una energía potencial electrostática  $U = e\phi$  la amplitud de dispersión al cuadrado se puede expresar como:

$$|f(\theta)|^2 = \frac{m^2 e^2}{4\pi^2 \eta^4} \left| \int e^{iK \cdot r'} \phi(r') dV' \right|^2 \quad (16)$$

o sea la sección eficaz diferencial se expresa por la transformada de Fourier del potencial. En electrostática, el potencial se relaciona fácilmente con sus fuentes –las cargas– por lo que esta expresión nos debería poder permitir conocer cual es la sección eficaz de una partícula cargada.

La densidad de carga es el laplaciano del potencial  $\Delta\phi = 4\pi\rho$  con esto y la propiedad de la transformada para las derivadas de una función tenemos todo lo necesario:  $TF(\Delta\phi) = -K^2 TF(\phi) = TF(4\pi\rho) \rightarrow TF(\phi) = (-4\pi/K^2) TF(\rho)$  luego la transformada de Fourier del potencial se puede expresar como la transformada de Fourier de la densidad de carga y (16) queda:

$$|f(\theta)|^2 = \frac{4m^2 e^2}{\eta^4 K^4} \left| \int e^{iK \cdot r'} \rho(r') dV' \right|^2 \quad (17)$$

Vemos pues que conociendo una distribución de carga, (17) nos proporciona su sección eficaz diferencial. El sistema mas interesante cargado es el atómico. Para el la distribución la podemos expresar con bastante sencillez:  $\rho(r) = Ze\delta(r) - en(r)$ . Donde Z es el número de protones, n es la distribución de carga electrónica que vendrá dada por el cuadrado de la función de onda electrónica. Como el núcleo está muy localizado su distribución de carga queda bien expresado por una delta de Dirac. Sustituyendo la  $\rho$  en (17) queda:

$$|f(\theta)|^2 = \frac{4m^2 e^4}{\eta^4 K^4} \left| \int Ze^{iK \cdot r'} \delta(r') dV' - \int e^{iK \cdot r'} n(r') dV' \right|^2$$

$$|f(\theta)|^2 = \frac{4m^2 e^4}{\eta^4 K^4} |Z - F(K)|^2 \quad (18)$$

donde:

$$F(K) = \int e^{iK \cdot r'} n(r') dV' \quad (19)$$

La cantidad F se conoce como factor de forma atómico. Si consideramos solo el núcleo atómico,  $F(K)=0$  y sustituyendo K por su valor obtenemos la sección eficaz diferencial del núcleo atómico que es la misma que dedujo Rutherford clásicamente:

$$|f(\theta)|^2 = \frac{m^2 e^4 Z^2}{4\eta^4 k^4} \frac{1}{\text{sen}^4(\theta/2)} \text{ y sabiendo que } \frac{m}{\eta k} = v \text{ nos queda:}$$

$$|f(\theta)|^2 = \frac{e^4 Z^2}{4m^2 v^4} \frac{1}{\text{sen}^4(\theta/2)} \quad (20)$$

Consideremos ahora que hay un electrón orbitando y que por tanto el factor de forma no es cero. El intervalo de integración efectivo para la  $F(K)$  es el tamaño atómico  $a$  ya que mas allá la probabilidad de encontrar al electrón es despreciable. Si los ángulos de dispersión son pequeños ( $Ka \ll 1$ ) es posible obtener una expresión sencilla para (18) pues la integral  $F(K)$  puede desarrollarse en serie. Tenemos entonces:

$$Z - F(K) = Z - Z - iK \int n(r') r' dV' + 1/2 \int n(r') (K \cdot r')^2 dV'$$

la primera integral representa el momento dipolar y como el integrando es impar vale cero (el átomo no tiene momento dipolar). Solo sobrevive el último termino que al integrarse respecto a los ángulos da:

$$Z - F(K) = \frac{2\pi K^2}{3} \int n(r') r'^4 dr' \text{ y obtenemos para la sección eficaz para } Ka \ll 1:$$

$$|f(\theta)|^2 = \left( \frac{4\pi m e^2}{3\eta^2} \right)^2 \left| \int n(r') r'^4 dr' \right|^2$$

Para el caso opuesto de ángulos de dispersión grandes tenemos  $Ka \gg 1$  por lo que el integrando de  $F(K)$  oscilará muy rápidamente y en consecuencia el valor de la integral será muy pequeño, con lo que la sección eficaz será debida mayormente al núcleo y recuperamos así la expresión de Rutherford.

## 2.3 La aproximación Eikonal

### 2.3.1 El método WKB

Si en (4) sustituimos en el integrando como aproximación a  $\psi$ , en vez de una onda plana, una solución aproximada llamada WKB (Wenzel-Kramers-Brillouin) y hacemos alguna aproximación adicional que pronto veremos, tenemos la que se conoce amplitud de dispersión en aproximación eikonal.

Una de las posibilidades de cara a la resolución de la ecuación diferencial de Schrodinger es introducir una solución prueba dependiente de varios parámetros y sustituirla en la ecuación, obteniendo así otra ecuación que me permita obtener dichos parámetros y que pueda ser más sencilla que la ecuación diferencial de partida. Así se hace, por ejemplo, cuando se expresa la solución con un desarrollo en serie dejando indeterminados los coeficientes de dicho desarrollo. Pues bien, esta misma idea, aunque utilizando otra expresión para la solución, utiliza el método WKB del que nos ocuparemos antes que nada.

Este método parte de una solución a la Ec. de Schrodinger expresada en la el forma

$$\psi = \sqrt{\rho(r,t)} \exp i \left( \frac{S(r,t)}{\eta} \right) \quad (21)$$

Siempre es posible expresar la solución así: si todo número complejo  $z$  se puede expresar como  $z = A \exp i\alpha$  siendo  $A$  el módulo y  $\alpha$  el argumento, toda función compleja se podrá expresar entonces de la misma manera pero con un módulo y argumento que tengan dependencia espacio temporal  $z(\bar{x},t) = A(\bar{x},t) \exp i\alpha(\bar{x},t)$ . En

nuestro caso, considerando que el potencial depende únicamente de r y centrándonos sólo en la parte radial tenemos únicamente la componente espacial r.

Veamos ahora el significado de el modulo  $\sqrt{\rho(r,t)}$  y el argumento  $S(r,t)/\eta$  de nuestra  $\psi$ .

La densidad de probabilidad para nuestra solución tiene la forma:  $|\psi|^2 = \psi\psi^* = \sqrt{\rho(r,t)} \cdot \sqrt{\rho(r,t)} = \rho(r,t)$  razón por la que nos anticipamos a designar el módulo como  $\sqrt{\rho(r,t)}$

En cuanto a la fase la expresamos con un  $\eta$  en el denominador por similitud con las ondas planas ya que S tiene un significado similar al momento p de las ondas planas. Para verlo calculemos el flujo de nuestra  $\psi$ :

$$j = \eta/m \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) = \rho \nabla S / m$$

Si recordamos que clásicamente  $j = \rho v$ ,  $\nabla S/m$  tendrá cierto significado de velocidad y  $\nabla S$  de momento por lo que aún sabiendo que (21) no tiene momento bien definido, no hay inconveniente en hacer:

$$p = \nabla S \tag{22}$$

Otro detalle importante es que  $\rho$  y S no son independientes entre si, pues si como hemos visto S está asociado al flujo y  $\rho$  a la densidad de probabilidad, ambas cantidades han de poder relacionarse a través de la ecuación de continuidad.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \frac{\nabla S}{m}) = 0$  Teniendo en cuenta que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  por ser nuestro estado estacionario obtenemos  $\nabla \cdot (\rho \cdot \nabla S / m) = 0$  que implica:

$$\rho \cdot \frac{\nabla S}{m} = cte \tag{23}$$

Teniendo ya un poco claro como es la solución (21) podemos sustituirla en la ecuación de Schrodinger y esperar obtener la expresión funcional de S y con ella la de  $\rho$  a través de (23). La sustitución directa da:

$$-\frac{\eta^2}{2m} \left[ \nabla^2 \sqrt{\rho} + \frac{2i}{\eta} (\nabla \sqrt{\rho}) \cdot \nabla S - \frac{1}{\eta^2} \sqrt{\rho} |\nabla S|^2 + \frac{i}{\eta} (\sqrt{\rho}) \nabla^2 S \right] + \sqrt{\rho} U = i\eta \left[ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} + \frac{i}{\eta} \sqrt{\rho} \frac{\partial S}{\partial t} \right]$$

Esta ecuación es demasiado aparatosa como para no pensar que hemos perdido el tiempo, pero se puede simplificar si asumimos que  $\eta$  es pequeño y se cumple esta condición cuyo significado veremos en seguida:

$$\eta |\nabla^2 S| \ll |\nabla S|^2 \tag{24}$$

Entonces la aparatosa ecuación anterior queda simplemente como:

$$\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + U + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

Y esta ecuación resulta ser la de Hamilton -Jacobi de mecánica clásica, muy fácilmente reducible a cuadraturas si tenemos en cuenta que, como estamos interesados en soluciones estacionarias de la función de onda, S ha de tener la forma  $S(r,t)=W(r)-E(t)$  en cuyo caso la ecuación Hamilton es simplemente:

$$\frac{1}{2m} |\nabla W|^2 + U = 0$$

y la solución:

$$W = \pm \int^r dr' \sqrt{2m[E - U(r')]} \quad (26)$$

$$S = \pm \int^r dr' \sqrt{2m[E - U(r')]} - Et \quad (27)$$

Haciendo uso ahora de (23) llegamos a la expresión que ha de tener  $\rho$  :

$$\rho = \frac{cte}{[E - U(r')]^{\frac{1}{2}}} \quad (28)$$

Introduciendo (27) (28) en la solución (21) llegamos a la aproximación WKB para la función de onda:

$$\psi = \frac{cte}{[E - U(r')]^{\frac{1}{4}}} \exp i \left( \pm \int^r \sqrt{\frac{2m[E - U(r')]}{\eta^2}} dr' - Et \right) \quad (29)$$

### 2.3.2 Validez del método WKB

La solución obtenida será válida siempre y cuando sea posible que se cumpla la condición (24), que en el caso estacionario es equivalente a:

$$\eta |\nabla^2 W| \ll |\nabla W|^2$$

Que haciendo uso de (22) se puede poner como:

$$\frac{|\nabla^2 W|}{|\nabla W|^2} = \eta \left| \frac{\nabla P}{P} \right| = \frac{d}{dr} \left| \frac{\eta}{P} \right| = \left| \frac{d\Delta}{dr} \right| \ll 1$$

Sustituyendo W por su valor llegamos a:

$$\left| \frac{d\Delta}{dr} \right| = \frac{\eta \frac{dU}{dr}}{2[2m(E - U)]^{\frac{3}{2}}} \ll 1 \quad (30)$$

Según esto, la aproximación WKB es válida si la diferencia entre la energía total de la partícula y potencial en cada punto es grande comparado con lo que varía la energía potencial en dicho punto. Esto sucederá ordinariamente para Energías elevadas o potenciales débilmente variables o poco intensos.

### 2.3.3 La aproximación eikonal

La solución (29) no es muy manejable por lo que, en ese sentido, la aproximación WKB no es suficiente. Sin embargo si la condición de que  $E - V \gg 1$  se cumple (que no lo exige necesariamente WKB) es posible hacer dos simplificaciones más que mejoran el aspecto de (29):

Por un lado es posible eliminar la raíz de la exponencial desarrollando esta en serie:

$$\sqrt{\frac{2m[E - U(r')]}{\eta^2}} = \sqrt{k^2 - \frac{2mU}{\eta^2}} = k \sqrt{1 - \frac{2mU}{\eta^2 k^2}} \approx k \left[ 1 - \frac{mU}{\eta^2 k^2} \right]$$

y por otro lado podemos considerar que al ser la partícula muy rápida, la trayectoria se realiza prácticamente en el eje de incidencia (eje z), con lo que podemos realizar la integración únicamente respecto a z. Si además tenemos en cuenta que si  $E \gg U$ ,  $E - U$  puede considerarse una constante (28) toma la forma:

$$\psi = cte \cdot \exp i \left( \pm \int_{z_0}^z k - \frac{mU(\sqrt{b^2 + z^2})}{\eta^2 k} \right)$$

donde  $r = \sqrt{z^2 + b^2}$

Si queremos que la solución represente una onda que se propaga de izquierda a derecha e incide desde lejos como una onda plana habremos de elegir  $z_0 = -\infty$  y coger sólo el signo + de la integral. Introduciendo todos estos cambios llegamos a:

$$\psi = cte \cdot \exp ikz \cdot \exp i \left( + \int_{-\infty}^z - \frac{mU(\sqrt{b^2 + z^2})}{\eta^2 k} \right) \quad (31)$$

Teniendo en cuenta que  $kz = k_z \cdot \bar{r} = k_z \cdot (b + zu_z)$  sustituyendo esta solución en (4) nos queda para la amplitud de dispersión:

$$f(\theta) = - \frac{m}{2\pi\eta^2} \int dV' e^{i(k_z - k_r) \cdot (b + zu_z)} U(\sqrt{b^2 + z^2}) \cdot \exp \left( - \frac{im}{\eta^2 k} \int_{-\infty}^{z'} U(\sqrt{b^2 + z''^2}) dz'' \right) \quad (32)$$

Agrandes energías, tal como muestra la figura 5,  $k_z - k_r$  es pequeño y casi perpendicular al eje z además b, que esta en el plano x-y, es perpendicular al eje z por lo que podemos hacer  $(k_z - k_r) \cdot (b + zu_z) \approx -k_r b$

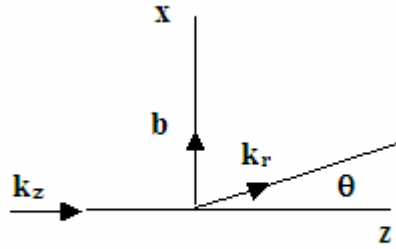


Figura 5

El hecho de que los vectores incidente y dispersado se hayan dibujado en el plano eje z no hace perder generalidad ya que como U es radial y la dirección de incidencia es el eje z, cualquier plano que pase por el eje z va a tener la misma amplitud de dispersión.

Expresando  $-k_r b$  en función de los ángulos tenemos:

$-k_r b = (k \text{sen } \theta u_x + \cos \theta u_z) (b \cos \phi_b u_x + b \text{sen } \phi_b u_y) \approx kb \theta \cos \phi_b$  donde hemos tenido en cuenta que  $\text{sen } \theta \approx \theta$ . Si introducimos esto en (32) todas las coordenadas serán cilíndricas por lo que integraremos respecto a ellas.

$$f(\theta) = - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\eta^2} \int_0^\infty b db \int_0^{2\pi} d\phi_b e^{-ik_b \theta \cos \phi_b} \int_{-\infty}^\infty dz' U(\sqrt{b^2 + z'^2}) \exp \left( - \frac{im}{\eta^2 k} \int_{-\infty}^{z'} U(\sqrt{b^2 + z''^2}) dz'' \right)$$

Realizando la integral en  $z'$  tenemos:

$$f(\theta) = - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\eta^2} \int_0^\infty b db \int_0^{2\pi} d\phi_b e^{-ik_b \theta \cos \phi_b} \exp \left( - \frac{im}{\eta^2 k} \int_{-\infty}^{z'} U(\sqrt{b^2 + z''^2}) dz'' \right) \Bigg|_{-\infty}^\infty$$

Para compactar un poco esta formidable expresión se define:

$$2\pi J_0(kb\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi_b e^{-ik_b \theta \cos \phi_b} \quad (33)$$



con lo que podemos poner la amplitud finalmente como:

$$f(\theta) = -ik \int_0^{\infty} db \, b J_0(kb\theta) [e^{2i\Delta(b)} - 1] \quad (34)$$

donde

$$\Delta(b) \equiv \frac{-m}{2k\eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{b^2 + z^2}) dz \quad (35)$$

La fórmula (34) no nos proporciona una expresión analítica para la amplitud, pero puede hacerse numéricamente. En cuanto a (35) habrá que proceder también numéricamente. Aunque en el caso importante de Coulomb puede resolverse de manera analítica

$$\Delta(b) = Ln \frac{b}{2a} \quad (a \gg b)$$

Como comentario final hay que decir que condición de alta energía en la aproximación de Born e eikonal difiere un poco: en la primera la condición E-V grande puede no servir si el alcance R del potencial es grande. En la aproximación eikonal en cambio puede no servir si, en virtud de (30), el potencial varía rápidamente.

## 2.4 El método DWBA

El método DWBA proporciona un modo de conocer la amplitud de dispersión, cuando el potencial de interacción se puede poner como suma de dos: uno  $V_1$  para el que se sabe su solución exacta para la ecuación de Schrodinger y otro  $V_2$  cuya solución no se conoce. Sería deseable que, ya que conocemos parte del problema, pudiéramos utilizar la solución de  $V_1$  como aproximación, y debería poder usarse si  $V_2$  fuese suficientemente pequeño como para considerarlo una perturbación. En ese caso se podría simplemente meter dicha solución aproximada en (4) y ya está pero el método DWBA proporciona una expresión más adecuada y la obtiene simplemente manipulando la formula de la amplitud (4) haciéndola quedar expresada en función de las soluciones de  $V_1$ . Para llevar a cabo esa transformación de (4) conviene que trabajar con ella en esta forma:

$$f(\theta) = \frac{-m}{2\pi\eta^2} \langle b|T|a \rangle \quad \text{con} \quad \langle b|T|a \rangle = \int \exp(-ik_b \cdot \vec{r}) V \psi^+ dV \quad (36)$$

Donde  $\psi^+$  es la solución del problema completo. el hecho de indicar esta solución con un superíndice + es porque en la dispersión las soluciones deben propagarse hacia fuera. Pero también existen soluciones convergentes. Anteriormente no se hizo esta distinción de signos porque no había riesgo de confusión, pero ahora si ha de hacerse, ya que veremos que el elemento de matriz T lo vamos a poder expresar en función de soluciones de  $V_1$  utilizando este tipo de solución convergente.

Asignemos las notaciones  $\psi_1$  (en su versión + o -) para la solución de  $V_1$  y  $\psi$  para la solución del potencial total  $V$ . Teniendo en cuenta que toda solución convergente y divergente se puede expresar de manera equivalente a (2.b) pero más manejable para nosotros como:

$$\psi_a^+ = u_a + (E - H + i\varepsilon)^{-1} V \psi_a^+ \quad (37.a)$$

$$\psi_a^- = u_a + (E - H - i\varepsilon)^{-1} V \psi_a^- \quad (37.b)$$

podemos expresar el elemento de matriz T como:

$$\langle b|T|a \rangle = [u_b, (V_1 + V_2)\psi_a^+] = [\psi_{1b}^-, (V_1 + V_2)\psi_a^+] - [(E - H - i\varepsilon)V_1\psi_{1b}^-, (V_1 + V_2)\psi_a^+] =$$

$$\left[ \psi_{1b}^-, (V_1 + V_2) \psi_a^+ \right] - \left[ \psi_{1b}^-, V_1 (E - H - i\varepsilon)^{-1} (V_1 + V_2) \psi_a^+ \right]$$

Notando que  $(E - H - i\varepsilon)^{-1} (V_1 + V_2) \psi_a^+$  es sencillamente  $\psi_a^+ - u_a$  y que

$\psi_{1b}^-, V_1 u_a = u_b, V_1 \psi_{1a}^+ = \langle b|T|a \rangle$  como se sigue de 37.a y 37.b sin más, Obtenemos para la amplitud:

$$f(\theta) = \frac{-m}{2\pi\eta^2} \langle b|T|a \rangle = \frac{-m}{2\pi\eta^2} \left( \langle b|T_1|a \rangle + \left( \psi_{1b}^-, V_2 \psi_{1a}^+ \right) \right)$$

Esta relación es exacta, pero no podemos evaluar el elemento de matriz de  $V_2$  porque no conocemos la solución. Sin embargo como decíamos si  $V_2$  es pequeño podemos introducir como aproximación  $\psi_{1a}^+$  y nos queda:

$$f(\theta) = \frac{-m}{2\pi\eta^2} \langle b|T|a \rangle = \frac{-m}{2\pi\eta^2} \left( \langle b|T_1|a \rangle + \left( \psi_{1b}^-, V_2 \psi_{1a}^+ \right) \right) \quad (38)$$

Por consiguiente el método DWBA calcula la amplitud de dispersión de un potencial  $V$  como la suma de la amplitud obtenida de  $V_1$  más un elemento de matriz  $V_2$  evaluado ente dos estados distorsionados por  $V_1$  con lo que queda justificado su nombre.

### 3. Obtención computacional del cuadrado de la amplitud para Aproximación de Born, eikonal y ondas parciales.

Una vez expuestos los métodos, probaremos ahora como difieren a la hora de predecir la amplitud de dispersión para diferentes núcleos atómicos. Utilizaremos núcleos de hidrógeno ( $Z=1$ ), Calcio( $z=20$ ) y Plomo( $z=82$ ). El método de ondas parciales es el más exacto por naturaleza, por tanto nos centraremos en ver que es lo que hace que Eikonal y ondas planas se alejen de su comportamiento.

La comparación es necesario hacerla a la luz de la función de onda utilizada para cada aproximación.

$$\text{Aproximación eikonal } \psi = cte \cdot \exp ikz \cdot \exp i \left( + \int_{-\infty}^z - \frac{mU(\sqrt{b^2 + z^2})}{\eta^2 k} \right)$$

$$\text{Aproximación de onda plana: } \psi = e^{ikz}$$

En la aproximación eikonal el cálculo de la amplitud se hará añadiéndole una corrección al momento  $k$  debido a que cerca del núcleo la partícula modifica su energía fruto de la interacción electrostática.

## GRÁFICAS

En el eje vertical se indica el número  $Z$  y la energía de incidencia.

Para  $z=1$  la interacción electroestática es despreciable por lo que con muy buena aproximación, para cualquier energía todos los métodos coinciden, ya que las ondas e las partículas serán casi planas.

Si  $z=20$  se empieza a ver discrepancia, pues ya la eikonal no tiene los mínimos tan acentuados, debido a que ahora al haber más interacción cerca del núcleo la onda no puede considerarse plana. Por otro lado se observa que a la energía de 700 Mev concuerda mejor la eikonal con la de ondas parciales, cosa lógica, pues la eikonal está pensada para energías altas. Se percibe también el desfase de los mínimos debido a la consideración de que  $k$  varía a causa de la interacción electroestática y esta interacción es diferente para el electrón y el positrón.

Por último en el plomo se percibe mejor que en ninguno la disconformidad que es la aproximación de ondas planas en núcleos pesados con una gran interacción electroestática. El desfase entre los mínimos de difracción del electrón y positrón también es mayor y a la energía de 1500 Mev eikonal y ondas parciales coinciden muy bien.

La última gráfica muestra como varía la concordancia entre eikonal y DWBA con el momento transferido para alta y baja energía. Es claro que a pequeños momentos transferidos ambas se han de parecer más, ya que la eikonal parte de ese hecho: que la partícula a penas se desvía. A mayor energía hay mayor concordancia para momentos mayores, pero es porque al aumentar la energía aumenta el momento y también la transferencia del mismo, por lo que no implica una desviación mayor.

